Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 5, 609--617

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123815

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu.

Dr. Jan Vojtěch v Brně.

(Dokončení.)

Vzhledem k souměrnosti křivky stačí stopovati její část od $(0, 0)$ do $(l\sqrt{2}, 0)$, část ležící v I. čtvrti; neboť v ostatních třech čtvrtích jsou části téhož tvaru. Od počátku do vrcholu $\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}, \frac{l}{2}\right)$ křivka stoupá, odtud do průsečíku s osou X klesá, vrchol určený je proto horní. Neboť upravíme-li výraz pro y' dosazením $y^2 + x^2 = l\sqrt{4x^2 + l^2} - l^2$ na tvar

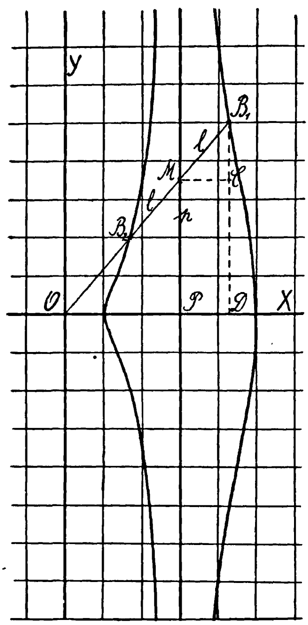
$$y' = -\frac{x}{y} \cdot \frac{l\sqrt{4x^2 + l^2} - 2l^2}{l\sqrt{4x^2 + l^2}} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{\sqrt{4x^2 + l^2} - 2l}{\sqrt{4x^2 + l^2}},$$

vidíme, že v I. čtvrti při kladných souřadnicích (x, y) jest znaménko derivace y' kladné nebo záporné dle toho, zdali $\sqrt{4x^2 + l^2} - 2l$ je záporné nebo kladné, t. j. zda platí

$$\sqrt{4x^2 + l^2} \lesseqgtr 2l;$$

avšak pro $x \lesseqgtr \frac{l}{2}\sqrt{3}$ čili pro $x^2 \lesseqgtr \frac{3}{4} l^2$ platí uvedené nerovnosti. Křivka mající vrchol horní v I. čtvrti je tam dutá zdola (rovněž tak v II. čtvrti), v III. (také v IV.) čtvrti je následkem souměrnosti vypuklá; při přechodu z III. do I. čtvrti mění tedy zakřivení a má tam bod inflekční, rovněž při přechodu z II. do IV. kvadrantu; proto je v $(0, 0)$ zároveň bod dvojný, jehož singularita už prokázána. Tečnami křivky jsou v něm přímky $y = x$ a $y = -x$. Výhodno jest též vzíti při vyšetřování křivky jako pomůcku svazek $y = mx$.

g) Dán pevný bod O a pevná přímka p (mimo něj). Veďme bodem O svazek paprsků; protne-li jeden z nich přímku p v bodě M, nanesme od M na obě strany paprsku délku danou l; body $B(x, y)$ tak sestrojené tvoří křivku, jež sluje *konchoida přímky.*



Obr. 33. Konchoida přímky $(x^2 + y^2)(x - a)^2 - l^2x^2 = 0$, $a = 3$. *a*) $l < a$, $l = 2$.

Nazveme vzdálenost bodu O od přímky p délkou a. Kolmici a zvolme za osu X, bod O za počátek souřadnic. Přímka p je tedy rovnoběžná s osou Y ve vzdálenosti a. Souřadnice bodu křivky hoví rovnici

$$l^2 = (x - a)^2 + (y - \overline{MP})^2$$

[z trojúhelníka MB_1C]; z $\triangle$ MOP a $\triangle$ B_1OD vidíme, že

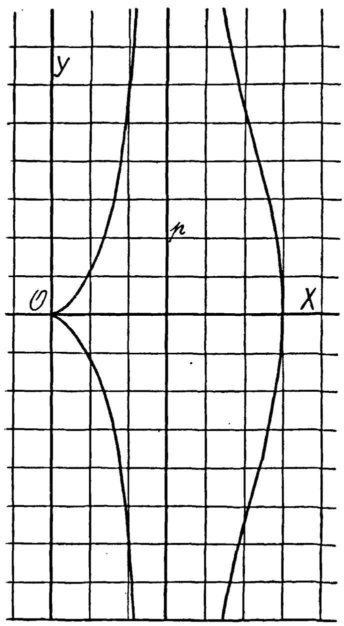
$$MP : y = a : x, \text{ tedy } MP = \frac{ay}{x}.$$

Dosadíme-li do předchozí rovnice, dostaneme po úpravě

$$y^2 = \frac{l^2x^2}{(x-a)^2} - x^2$$

čili

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - l^2x^2 = 0.$$



Obr. 33. *b*) $l = a$, $l = 3$.

Křivka ta je souměrná k ose X (y jen ve 2. mocnině). Aby y bylo reálné, musí býti

$$\frac{l^2x^2}{(x-a)^2} \geqq x^2 \text{ čili } l^2 \geqq (x-a)^2;$$

musí tedy býti jednak

$$x - a < l, \text{ t. j. } x < a + l,$$

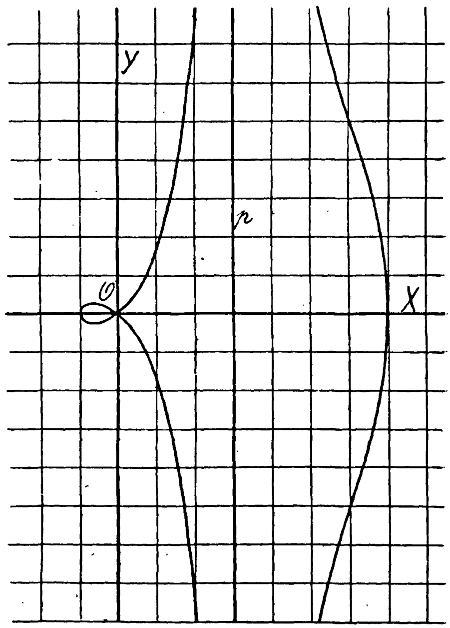
jednak

$$x - a > -l, \text{ t. j. } x > a - l.$$

Křivka leží v intervalu $(a - l, a + l)$ pro x. Tento interval má různou polohu dle poměrné velikosti daného l vůči pevné úsečce a; je-li $l < a$, leží křivka jenom v I. a IV. kvadrantu, neboť obě meze hodnot x, totiž $a - l$ i $a + l$ jsou kladné, od počátku souřadnic až do $x = a - l$ nemá křivka žádný bod. Jestliže $l = a$, rozkládá se křivka od počátku až k $x = 2a$. Volíme-li konečně $l > a$, leží křivka ve všech kvadrantech, od

$$x = a - l = -(l - a) \text{ až do } x = a + l.$$

Počátek patří křivce ve všech třech případech. Viz obr. 33. a, b, c. Pro $x = a$ máme $y = \infty$, tedy bod v nekonečnu.



Obr. 33. c) $l > a$, $l = 4$.

Platí dále

$$y' = -\frac{x}{y}\left(\frac{al^2}{(x-a)^3} + 1\right) = -\frac{x}{y} \cdot \frac{(x-a)^3 + al^2}{(x-a)^3},$$

kamž v případě potřeby dosadíme

$$y = \pm \frac{x}{x-a} \sqrt{l^2 - (x-a)^2}.$$

Pro bod (0, 0) jest $y' = \frac{0}{0}$, počátek tedy bodem singulárním;

po dosazení za y krátí se x a obdržíme

$$y' = \pm \frac{(x-a)^3 + al^2}{(x-a)^2\sqrt{l^2-(x-a)^2}} = \pm \frac{al^2 - a^3}{a^2\sqrt{l^2-a^2}}$$
$$= \pm \frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}.$$

Bod tento dvojný má různou povahu dle volby konstanty l; je to uzel pro $l > a$ (obr. 33. c), hrot pro $l = a$ (obr. 33. b), isolovaný bod pro $l < a$ (obr. 33. a). Máme podle toho tři typy konchoidy. Tečny konchoidy s uzlem mají v tomto bodě směrnice

$$\pm \frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a},$$

tečna konchoidy s hrotem má tam směrnici $y' = 0$, jest to osa X; konchoida s bodem isolovaným nemá ovšem reálných tečen v tomto bodě. Pro vrchol musí býti

$$(x-a)^3 + al^2 = 0 \text{ čili } x = a - \sqrt[3]{al^2};$$

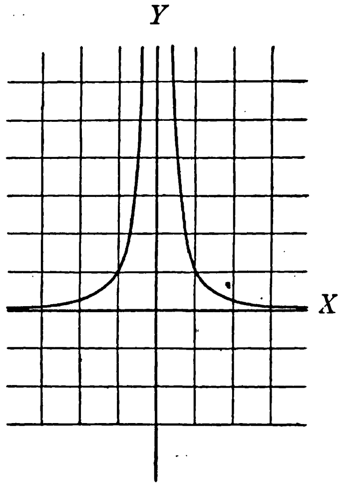
při $l < a$ jest toto $x < a - l$, křivka nemá bod s touto úsečkou; při $l > a$ jest vskutku vrchol, konchoida s uzlem má dva vrcholy, souměrně sdružené dle osy X, jejichž úsečka jest

$$a - \sqrt[3]{al^2}.$$

Přímka $x = a$ jest asymptotou konchoidy. Konchoida ve všech třech tvarech má dvě větve (dle vzniku), jež obě se blíží v nekonečnu k přímce $x = a$.

h) Je-li v pevném bodě A zdroj světelný (tepelný, zvukový), šíří se odtud světlo tak, že intensity osvětlení ubývá se čtvercem vzdálenosti. Za jednotku intensity osvětlení při určitém zdroji zvolíme osvětlení plochy 1 cm^2 ve vzdálenosti 1 cm kolmo k paprskům postavené (obdobně za jednotku oteplení oteplení téže plochy za jednotku doby, za jednotku intensity zvuku sílu zvuku ve vzdálenosti 1 cm). I jest intensita osvětlení (oteplení, zvuku) ve vzdálenosti x cm dána výrazem $y = \frac{1}{x^2}$.

Příslušnou křivku (obr. 34.) vyšetříme velmi snadno z rovnic



Obr. 34. $y = \frac{1}{x^2}$.

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y' = -\frac{2}{x^3}, \quad y'' = \frac{6}{x^4}.$$

Jest souměrná vzhledem k ose Y; pro $x = 0$ má bod v nekonečnu, rovněž pro $y = 0$. Leží v I. a II. čtvrti; v II. čtvrti stoupá s rostoucím x, v I. klesá, osy jsou asymptotami. Jest všude vypuklá zdola; poloměr křivosti

$$r = \frac{x^5}{6} \sqrt{(x^6 + 4)^3},$$

na př. v bodě (1, 1) jest

$$r_1 = \frac{5}{6} \sqrt{5} = 1{\cdot}86,$$

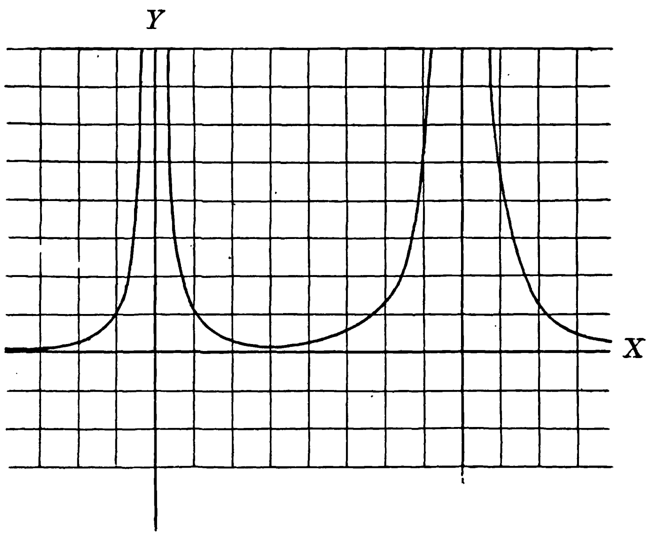
v bodě $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ jest už

$$r_2 = \frac{1088}{3} \sqrt{68} = 2990{\cdot}63.$$

Jsou-li dva zdroje tepelné v bodech A, B ve vzdálenosti 8 *cm* (na př.), a to v B zdroj 5krát silnější než v A, jest na přímce oba body spojující AB ve vzdálenosti x od bodu A oteplení 1 cm^2 v jednotce doby dáno výrazem

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-8)^2}.$$

Disskuse příslušné křivky (obr. 35.) zakládá se na této rovnici



Obr. 35. $y = \frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-8)^2}$.

a dalších

$$y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{10}{(x-8)^3}, \quad y'' = \frac{6}{x^4} + \frac{30}{(x-8)^4}.$$

Křivka leží jen v I. a II. čtvrti (y musí býti kladné, ježto pro $\pm x$ jsou zlomky na pravé straně kladné); pro $x = 0$ a pro $x = 8$ jest y nekonečně veliké, rovněž tak x pro $y = 0$. Pro x záporné jest x^3 i $(x-8)^3$ záporné, tedy y' kladné, křivka stoupá v II. kvadrantu; $y' = 0$, jestliže

$$2(x-8)^3 + 10x^3 = 0,$$

tedy pro

$$x - 8 = -x\sqrt[3]{5}$$

čili pro

$$x = \frac{8}{1 + \sqrt[3]{5}} = 2{\cdot}95,$$

v bodě tom má křivka vrchol dolní (y'' kladné); pro x kladné $< 2{\cdot}95$ křivka klesá, pro $x > 2{\cdot}95$ stoupá do nekonečna (pro $x = 8$); pro $x > 8$ opět klesá (y' záporné). Asymptotami jsou obě osy a přímka $x = 8$. Křivka je všude vypuklá.

26. *Příklady k cvičení.*

1. V geometrii definuje se parabola jako křivka, jejíž každý bod jest od pevného bodu a od pevné přímky stejně vzdálen. Budiž pevnou přímkou osa X, pevným bodem bod $(0, p)$; jest ukázati, že podmínce uvedené hoví křivka, jejíž rovnice jest tvaru

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Dává tedy geom. definice touž křivku jako naše původní definice $y = x^2$. Jest podati rozbor křivky dle nalezené rovnice (opakování).

2. Výměr hyperboly v geometrii zní: jest křivka, jejíž každý bod má od dvou pevných bodů konstantní rozdíl vzdáleností. Buďtež pevnými body (s, s) a $(-s, -s)$, rozdíl pak r; jest ustanoviti rovnici křivky dle této definice a srovnati ji pro $r = 2s$ s rovnicí

$$y = \frac{k^2}{x} \text{ a } y = \frac{1}{x},$$

dříve uvedenou pro hyperbolu. Diskusse této speciální rovnice nalezené (opakování).

3. Kruh má rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

je-li střed jeho v počátku souřadnic, obecně rovnici

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

je-li středem bod (a, b). Podati diskussi, také ukázati shodu poloměru křivosti s poloměrem r.

4. Podati rozbor křivky

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0.$$

5. $9x^2 + 4y^2 - 6x + 10y - 15 = 0.$

6. $xy - x^2 + x - y - 1 = 0.$
7. $8x^2 - 12xy + 5y^2 - 4x + 2y - 7 = 0.$
8. $x^2 + xy - 2y^2 - 4x - 2y = 0.$
9. Rozbor křivky $y = x^3$ nebo obecněji položené
$y - b = (x - a)^3$ (opakování).
10. $y^2 = x^3$ nebo $y^2 = \frac{4}{27} x^3$ nebo obecněji položené
$(y - b)^2 = (x - a)^3.$
11. $x^2y \pm x^3 \mp 1 = 0.$
12. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$
13. $y = \frac{1 - x - x^2}{x^2}.$
14. $y = (x^2 - 1)^2.$
15. $4x^2y + 2x + y - 1 = 0.$
16. $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ pro $a < b < c$; potom pro 3 zvláštní případy $a = b$, $b = c$, $a = b = c$.
17. $y^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}.$
18. $y^2 = \frac{a^2x}{a - x}.$
19. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2).$
20. $y^2(a + x) = x^2(a - x).$
21. $y^2 = x^3 + 2x^2 - 5$ nebo obecně
$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$
22. $xy^2 - 2x^2 + 3x - 1 = 0.$
23. $x^2y + y^2 - x = 0.$
24. $x^3 \pm y^3 = c^3.$
25. $x^2y - a^2x + a^2y = 0.$
26. $x^2y \pm x^2 - y^2 = 0.$
27. $x^3 - xy + 1 = 0.$
28. $x^4 - 2rx^3 + r^2y^2 = 0.$
29. $x^2y^2 - x^2 + y^2 = 0.$
30. $y^2(1 \pm x^2) = 1.$

V BRNĚ, v únoru 1908.