O jisté grupě rovinných kollineací.

Dr. B. Bydžovský.

(Dokončení.)

4. *Skupiny šestibodové, jež odpovídají podgrupám G_6, leží na kuželosečkách.* Neboť součet příslušných argumentů je kongruentní k nulle.

Ježto podgrupy G_6 jsou čtyři, procházejí každým bodem u čtyři kuželosečky, mající mimo to ještě bod $-u$ společný, na nichž leží všechny body skupiny 18bodové. Je tedy všech takových kuželoseček $\frac{9 \cdot 4}{3} = 12$ (neboť každou kuželosečku obdržíme trojím způsobem).

Tím nabýváme nové vlastnosti 18bodové konfigurace: ***tyto body leží po šesti na dvanácti kuželosečkách. Žádné dvě z nich se neprotínají ve více než dvou bodech křivky. Z této skupiny kuželoseček lze vybrati čtverým způsobem tři kuželosečky, jež se na křivce neprotínají a obsahují tedy všech osmnáct bodů.***

Uvažujme jednu z těchto kuželoseček, jež prochází body $(0, 0)$, (m, n), $(2m, 2n)$, $[0, 0]$, $[m, n]$, $[2m, 2n]$, což lze také psáti

$$(0, 0), (m, n), (-m, -n), [0, 0], [m, n], [-m, -n].$$

Rovnici této kuželosečky obdržíme ve tvaru determinantu, vyjádříme-li, že má procházeti pěti z těchto šesti bodů:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ p^2 & pp' & p'^2 & p & p' & 1 \\ p^2 & -pp' & p'^2 & p & -p' & 1 \\ p^2 & pp' & p'^2 & p & p' & 1 \\ p^2 & -pp' & p'^2 & p & -p' & 1 \\ p^2 & pp' & p'^2 & p & p' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Argument elliptickych funkcí řádku druhého a třetího je u, čtvrtého a pátého $u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$, šestého $u - \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$.

Odečteme-li třetí řádek od druhého, pátý od čtvrtého, a rozvedeme pak determinant dle elementů zbývajících v řádku druhém a čtvrtém, obdržíme po zkrácení rovnici kuželosečky ve tvaru jednoduchém:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & 1 \\ p^2 & p'^2 & p & 1 \\ p^2 & p'^2 & p & 1 \\ p^2 & p'^2 & p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

kde argumenty jsou: u, $u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$, $u - \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$.

Zavedeme stručné označení

$$\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 \\ p^2 & p & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{vmatrix} = \varDelta.$$

V determinantu, jenž tvoří koefficient při x^2, nahraďme p'^2 výrazem $4p^3 - g_2p - g_3$; tím nabude tento koefficient tvaru

$$4\begin{vmatrix} p^3 & p & 1 \\ p^3 & p & 1 \\ p^3 & p & 1 \end{vmatrix} = 4(p + p + p)\varDelta.$$

Koefficient při y^2 je $-\varDelta$; při x:

$$4\begin{vmatrix} p^2 & p^3 & 1 \\ p^2 & p^3 & 1 \\ p^2 & p^3 & 1 \end{vmatrix} - g_2\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 \\ p^2 & p & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{vmatrix} = -\varDelta\,[4(pp + pp + pp) + g_2].$$

Absolutní člen

$$-4\begin{vmatrix} p^2 & p^3 & p \\ p^2 & p^3 & p \\ p^2 & p^3 & p \end{vmatrix} + g_3\begin{vmatrix} p^2 & 1 & p \\ p^2 & 1 & p \\ p^2 & 1 & p \end{vmatrix} = \varDelta(4ppp - g_3).$$

I lze celou rovnici krátiti výrazem $\varDelta$ a obdržíme:

$$4(p + p + p)x^2 - y^2 - x\,[4(pp + pp + pp) + g_2] \\ + 4ppp - g_3 = 0,$$

kde argumenty jsou u, $u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$, $u - \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$.

Lze dokázati, že *tato rovnice závisí lineárně na jediném parametru*. Je totiž patrno, že všechny tři symmetrické funkce funkcí

$$p(u),\ p\left(u+\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right),\ p\left(u-\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)$$

mají tytéž tři póly dvojnásobné:

$$0,\ \pm\frac{2m\omega+2n\omega'}{3};$$

koefficienty při hlavních členech u prvé jsou 1, u druhé

$$2p\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right),\quad \text{u třetí}\quad p^2\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right).$$

Mohou tedy funkce

$$2p^2\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)(p+p+p)$$

a

$$p\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)(pp+pp+pp)$$

lišiti se od funkce $2ppp$ jen o additivní konstantu. Tu snadno nalezneme specialisací pro $u=\alpha$, kde α je argument, pro nějž $p(u)=0$; upravíme-li pak příslušné výrazy, obdržíme

$$2p^2\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)(p+p+p)$$
$$=2ppp-g_2p\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)-2g_3,$$

$$16p^2\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)(pp+pp+pp)$$
$$=32p\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)ppp+g_2^2+16g_3p\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right).$$

Na základě toho lze rovnici kuželosečky zjednodušiti; pišme $P=ppp$ a $p_1=p\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}\right)$:

$$4P(x-p_1)^2-2x^2(g_2p_1+2g_3)-p_1^2y^2-x\left(g_2p_1^2+\right.$$
$$\left.+4g_3p_1+\frac{g_2^2}{4}\right)-g_3p_1^2=0.$$

5. Odtud vychází na jevo, že *všechny kuželosečky tvoří svazek a to takový, že se navzájem dotýkají ve dvou bodech přímky inflexní*[12])

$$x = p\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right),$$

t. j. přímky, jež spojuje inflexní bod v nekonečnu 0, 0 s oběma inflexními

$$\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}, \quad -\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}.$$

Průsečíky svazku s touto inflexní přímkou obdržíme dosazením $x = p_1$ do hořejší rovnice; obdržíme

$$p_1 y^2 = -3g_2 p_1^2 - 9g_3 p_1 - \frac{g_2^2}{4}.$$

Avšak p_1 hoví známé rovnici[13])

$$x^4 - \frac{1}{2}g_2 x^2 - g_3 x - \frac{1}{48}g_2^2 = 0.$$

Jestliže z obou rovnic eliminujeme g_3, obdržíme

$$p_1 y^2 = -9\left(p_1^2 - \frac{g_2}{12}\right)^2.$$

Avšak užitím téže rovnice lze ukázati, že

$$p_1 p'^2_1 = 3\left(p_1^2 - \frac{g_2}{12}\right)^2,$$

tak že konečně

$$y_{12} = \pm p'_1 \cdot i\sqrt{3}.$$

Utvoříme-li dvojpoměry bodů 0, 0; m, n, bodů m, n, $2m$, $2n$ a bodů $2m$, $2n$; 0, 0 vzhledem k bodům y_1. y_2, vychází po každé táž hodnota, totiž $\sqrt[3]{1}$. Avšak ternárně cyklickou projektivností na inflexní přímce jsou inflexní body sobě přidruženy

---

[12]) Srv. s větou na str. 36 Čas. pro p. m. a f. roč. 35. v článku K. Petr »O jedné větě pro racionální křivky třetího stupně«.

[13]) V. Tannery-Molk: Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Vzorce CIV.

způsobem právě napsaným; dle věty o konstantním dvojpoměru v projektivnosti plyne odtud, že *body* y_1, y_2 *jsou dvojné body této projektivnosti.*

Ježto pak společné tečné svazku jsou vzhledem ke grupě G_6 invariantní, je patrno, že jsou to další dvě inflexní přímky, které s prvou tvoří inflexní trojhran

Náš důkaz se vztahuje především jen na ty čtyři systémy kuželoseček, jichž base leží na inflexních přímkách jdoucích bodem 0, 0. Avšak transitivnost grupy G_{18} dovoluje výsledky rozšířiti na každou z 12 kuželoseček. Platí tedy věta:

Pohybuje-li se bod po křivce, opisuje každá z dvanácti kuželoseček, na nichž 18bodová skupina leží, svazek, jehož společné tečny a společná polára tvoří trojstran inflexní.

Víme (III. 4), že body u, $-u$ procházejí čtyři z těchto dvanácti kuželoseček; z předchozího důkazu plyne, že base příslušných čtyř svazků leží na inflexních přímkách

$$x = p\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right),$$

jež jsou čtyři; i lze vysloviti další větu:

Kuželosečky, jež se protínají ve dvou bodech křivky, mají své base ve dvou inflexních přímkách, jež se protínají v inflexním bodě — a naopak tedy:

Kuželosečkám, jež se na křivce neprotínají, přísluší inflexní přímky, jež se neprotínají v inflexním bodu; čili: *takové tři kuželosečky, na nichž leží všech 18 bodů skupiny* (III. 4.), *přísluší k témuž trojstranu inflexnímu*; *každá z nich prochází dvěma jeho vrcholy a třetí vrchol je pól spojnice prvých dvou.*

Nazveme-li vrcholy a, b, c, procházejí zmíněné kuželosečky po řadě body a, b; b, c; c, a.

Nebudeme podrobně sledovati zajímavou konfiguraci dvanácti kuželoseček; budiž jen připomenuto, že *konfigurace dvanácti inflexních přímek je jen zvláštním jejím případem.* Věty platící o prvé přeneseme ihned na druhou, nahradíme-li v oněch větách výraz „dvojice bodová“ (čímž je míněna dvojice bodů $\pm u + \left.\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right)$ výrazem „bod inflexní“ a kuželosečku přímkou inflexní.

Budiž upozorněno ještě na jednu okolnost. Každá z nalezených kuželoseček protíná křivku ve dvou trojicích bodových, odpovídajících téže podgrupě. Jest pak ihned patrno, že dvě trojice bodové, odpovídající téže podgrupě, jen tehdy leží na kuželosečce, tvoří-li současně skupinu šestibodovou (t. j. odpovídající podgrupě st. 6.).

6. Budiž poukázáno ještě na některé vlastnosti skupin trojbodových, jež odpovídají podgrupám G_3. Vytkněme na C^3 dvě skupiny trojbodové:

$$u, \ u \pm \frac{2m_1\omega + 2n_1\omega'}{3},$$

$$v, \ v \pm \frac{2m_2\omega + 2n_2\omega'}{3}.$$

Spojme prvé dva body; třetí průsek s křivkou má parametr $-(u+v)$. Spojme pak druhý bod prvé trojice s třetím bodem druhé trojice, třetí bod prvé s druhým bodem druhé. Třetí průsečíky jsou

$$-(u+v) - \frac{2\omega(m_1 - m_2) + 2\omega'(n_1 - n_2)}{3},$$

$$-(u+v) - \frac{2\omega(m_2 - m_1) + 2\omega'(n_2 - n_1)}{3}.$$

Takovým způsobem jsme obdrželi tři body; tyto tři body splynou tehdy a jen tehdy, když

$$m_1 - m_2 \equiv 0 \qquad n_1 - n_2 \equiv 0,$$

t. j. $$m_1 \equiv m_2 \qquad n_1 \equiv n_2 \mod 3.$$

Jinými slovy: tři body, které jsme obdrželi, splynou v jediný, jestliže vyjdeme ze dvou trojic, jež přísluší téže podgrupě G_3. Opakujme tutéž konstrukci ještě dvakráte, zaměňujíce cyklicky body obou trojic; obdržíme další dva body, tak že úhrnem nabýváme trojice bodové

$$-(u+v), \ -(u+v) \pm \frac{2m_1\omega + 2n_1\omega'}{3},$$

jež náleží téže podgrupě. Lze tedy vysloviti větu:

Označíme-li body dvou trojic, příslušných téže podgrupě G_3, v libovolném pořádku

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2, \end{array}$$

protínají se paprsky

$$\begin{array}{llll} \overline{a_1a_2}, \ \overline{b_1c_2}, \ \overline{b_2c_1} & \textit{v jediném} & \textit{bodě} & d_1 \\ \overline{a_1c_2}, \ \overline{b_1b_2}, \ \overline{a_2c_1} & \text{"} & \text{"} & d_2 \\ \overline{a_1b_2}, \ \overline{a_2b_1}, \ \overline{c_1c_2} & \text{"} & \text{"} & d_3; \end{array}$$

tyto tři body leží na křivce a tvoří trojici příslušnou téže podgrupě[14]).

Je patrno, že věta III. 1. je jen specialisací této, když obě trojice původní splynou.

Nazveme tři trojice, jež jsou ve vztahu nahoře odvozeném, konjugovanými; je totiž patrno, že, vyjdeme-li od kterýchkoli dvou trojic z hořejších tří, obdržíme vždy třetí.

Z této věty plyne lineárná konstrukce bodů křivky C^3. Neboť známe-li tři trojice bodové nekonjugované, lze postupným spojováním dvou a dvou obdržeti nové tři trojice a tak pokračovati.

Věta nahoře napsaná se specialisuje, leží-li obě původní trojice na téže kuželosečce. V tom případě musí platiti

$$3u + 3v \equiv 0,$$

t. j.

$$3(u + v) \equiv 0.$$

Avšak bod o parametru $(u + v)$ hovícím této rovnici je bod inflexní; i následuje z toho, že *trojice bodů konjugovaná k dvěma trojicím, jež leží na kuželosečce, je trojice bodů inflexních ležících na přímce.* Geometricky je ostatně jasné, *že tato přímka je Pascalovou přímkou oněch šesti bodů.*

7. Užijeme věty o konjugovaných trojicích na skupinu 18bodovou. Vzhledem k určité podgrupě G_3 seřadí se 18 bodů

---

[14]) V. K. Petr l. c. str. 36., kde tato věta je dokázána pro křivky racionálné.

v 6 trojic bodových. Je-li na př. tato podgrupa (0, 0) (1, 0) 2, 0), jsou trojice bodové:

$$(00)\ (10)\ (20);\ (01)\ (11)\ (21);\ (02)\ (12)\ (22);$$

$$[00]\ [10]\ [20];\ [01]\ [11]\ [21];\ [02]\ [12]\ [22].$$

Všech šest trojic lze spojovati po dvou celkem patnáctkráte; tak vznikne 15 nových trojic, jež nebudou všechny různé.

a) Spojujme nejprve trojice bodů (m, n). Každá trojice má tvar

$$(0n)\ (1n)\ (2n).$$

Spojme ji s trojicí $(0n')\ (1n')\ (2n')$. Obdržíme body

$$-\left(2u + \frac{\overline{2n + 2n'\omega}}{3}\right),\quad -\left(2u + \frac{\overline{4\omega + 2n + 2n'\omega'}}{3}\right),$$

$$-\left(2u + \frac{\overline{2\omega + 2n + 2n'\omega'}}{3}\right),$$

čili

$$-2\left(u + \frac{\overline{n + n'\omega'}}{3}\right),\quad -2\left(u + \frac{\overline{2\omega + n + n'\omega'}}{3}\right),$$

$$-2\left(u + \frac{\overline{4\omega + n + n'\omega'}}{3}\right),$$

t. j. tečnové body bodů $(0, n + n')$, $(1, n + n')$, $(2, n + n')$. To však jsou body třetí trojice.

b) Zcela totéž platí o trojicích bodů $[m, n]$.

c) Spojme trojici $(0n)\ (1n)\ (2n)$ s trojicí $[0n']\ [1n']\ [2n']$. Obdržíme body

$$-\frac{2(n + n')\omega'}{3},\quad -\frac{4\omega + 2(n + n')\omega'}{3},\quad -\frac{2\omega + 2(n + n')\omega'}{3}$$

To však jsou v každém případě body inflexní, jak také plyne z toho, že takové dvě trojice leží na kuželosečce (v. větu nahoře uvedenou.). I nabýváme věty:

Spojováním všech možných trojic ve skupině 18bodové nabýváme jednak bodů inflexních, jednak všech tečnových bodů skupiny.

Druhá část věty je nám v přesnějším znění již známa (III. 1.); prvou část vyslovíme také tak:

Promítneme-li z libovolného bodu (m, n) *všechny body* $[m, n]$, *obdržíme všechny body inflexní.* Odtud se udává jednoduchý způsob konstrukce celé skupiny 18bodové, jež náleží k určitému bodu u, jsou li známy body inflexní. Promítneme z bodu u všechny body inflexní; obdržíme všechny body $[m, n]$; pak z libovolného tohoto bodu promítneme body inflexní a obdržíme všechny body (m, n), čímž nabýváme celé skupiny [15]. Z toho na př. věta:

Skupina 18bodová leží na 81 paprscích, které po devíti procházejí body inflexními.

Tato věta s větou III. vyjadřuje základní vlastnosti lineárné 18bodové skupiny [16].

8. Tři trojice konjugované tvoří zajímavou konfiguraci na křivce. Je otázka, zdali tato konfigurace je charakteristická pro podgrupy stupně třetího. Buďtež dány dvě trojice bodů

$$u_1, u_2, u_3,$$

$$v_1, v_2, v_3$$

té vlastnosti, že, spojujeme-li jejich body všemi možnými způsoby, obdržíme jako další průseky spojnic s křivkou jen tři body. Spojíme-li body u_1, v_1, musí třetí průsečík spojnice býti totožný s třetím průsečíkem

a) spojnice bodů u_2, v_2 a tedy také u_3, v_3,

b) spojnice bodů u_2, v_3 a tedy také u_3, v_2.

a) I musí

$$u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2 \equiv u_3 + v_3.$$

Pak spojnice bodů u_1, v_2 musí protínati křivku v témže bodu jako

---

[15]) V. Petr, l. c. obsahuje příslušnou větu pro racionálné křivky.

[16]) Některé věty o skupinách, jež zde uvažujeme, obsahuje: Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, str. 286—303 (věty sdělené Küpperem), v. ostatně pozn. 2.

α) spojnice bodů u_2, v_1, tedy také jako spojnice bodů u_3, v_3, avšak to není možno, ježto by pak

$$u_1 + v_2 \equiv u_3 + v_3 \equiv u_1 + v_1$$

t. j.

$$v_2 \equiv v_2,$$

což vylučujeme;

β) spojnice bodů u_2, v_3 a tedy také spojnice bodů u_3, v_1, t. j.

$$u_1 + v_2 \equiv u_2 + v_3 \equiv u_3 + v_1.$$

Tyto podmínky spojujeme s předchozími

$$\begin{array}{l} u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2 \\ u_1 + v_2 \equiv u_2 + v_3 \\ \hline v_1 - v_2 \equiv v_2 - v_3, \text{ t. j. } v_1 + v_3 \equiv 2v_2, \\ u_2 + v_2 \equiv u_3 + v_3 \\ u_2 + v_3 \equiv u_3 + v_1 \\ \hline v_2 - v_3 \equiv v_3 - v_1, \text{ t. j. } v_1 + v_2 \equiv 2v_3. \end{array}$$

Odečtením obou výsledků: $3v_2 \equiv 3v_3$.

Násobíme-li prvý třemi:

$$3v_1 + 3v_3 \equiv 6v_2,$$

pak dle konečného výsledku $3v_1 \equiv 3v_2$, t. j. $3v_1 \equiv 3v_2 \equiv 3v_3$ s podmínkou

$$v_1 - v_2 \equiv v_2 - v_3 \equiv v_3 - v_1.$$

Avšak to zřejmě vyžaduje

$$v_2 = v_1 + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3},$$

$$v_3 = v_1 - \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}.$$

b) V druhém případě musí

$$u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_3 \equiv u_3 + v_2.$$

Spojnice bodů u_1, v_2 musí protínati křivku v témže bodu jako spojnice bodů u_2, v_2; u_3, v_3, t. j.

$$u_1 + v_2 \equiv u_2 + v_1 \equiv u_3 + v_3.$$

Zde bychom došli k témuž závěru jako v případě a).

Úhrnem jsme tedy dokázali:

Vlastnost vyjádřená vztahem tří konjugovaných trojic je charakteristická pro trojice příslušné některé podgrupě třetího stupně.

IV. Skupiny osmnáctibodové.

1. Podrobíme li celé pole rovinné, v němž leží křivka C^3, transformacím grupy G_{18}, seřadí se všechny body ve skupiny 18bodové. Toto seřazení nejsnáze přehlédneme takto: je-li f forma původní, h její hessián, je

$$f + \lambda h = 0$$

rovnice syzygetického svazku, jehož každá křivka se grupou, jak známo [17], reprodukuje. Je pak jasno, že vše, co jsme odvodili pro křivku C^3, platí pro každou křivku tohoto svazku; a je důležito vytknouti, že *každá 18bodová skupina roviny leží na jedné křivce svazku a že tedy všechny skupiny mají tytéž vlastnosti jako kterákoliv jedna z nich* [18].

Budiž jen připomenuto, že inflexní trojstrany, jakožto zvláštní případy křivek svazku syzygetického, jsou vzhledem ke grupě invariantní. Každý vrchol pak (a strana jemu protilehlá) zůstává stálým pro transformace jedné podgrupy stupně šestého.

2. Tím, že jsme přešli do roviny, nabyli jsme také jistých vět o ternárně cyklických kollineacích. Neboť je jasno, že vždy lze křivku stupně třetího voliti tak, aby její grupa G_{18} obsahovala určitou cyklickou kollineaci; mimo to každé tři trojice konjugované leží na křivce stupně 3. (a sice na nekonečně mnoha takových křivkách); i *platí věta o konjugovaných trojicích všeobecně v poli ternárně cyklickém* [19]. *Zároveň lze snadno nahlédnouti, že tato věta je charakteristická pro toto pole.*

3. Theorie grupy G_{18} a bodových skupin právě provedená umožňuje nám vysloviti některé věty, platné všeobecně pro všechny skupiny projektivně význačných bodů na křivce.

---

[17]) F. Klein, l. c. pg. 354.

[18]) Studují-li se obdobné skupiny v prostoru, shledá se snadno, že všechny skupiny nemají týchž vlastností jako určitá z nich. Proto je třeba tuto okolnost vytknouti

[19]) V. o tom můj loňský článek v programmu c. k. reálky v Kladně: »Podrobnosti k ternárné cyklické kollineaci.«

Má-li bod v křivky míti nějakou projektivnou vlastnost, jíž se liší od ostatních, musí jeho parametr vyhovovati jistému vztahu. Ježto všechny projektivné konstrukce lze vyjádřiti lineárnými kongruencemi, musí také tento vztah míti tvar lineárné kongruence

$$av + b \equiv 0.$$

Zde pak užijeme okolnosti, že kubická křivka se reprodukuje grupou G_{18}. Ježto bod s určitou projektivnou vlastností musí kteroukoliv transformací této grupy přejíti v bod se stejnou vlastností, je vztah právě napsaný nutně invariantní pro celou grupu. Zcela snadnou úvahou seznáme, že vzhledem k tomu má onen vztah nutně tvar

$$3kv \equiv 0.$$

Odtud následuje:

a) *Parametry všech projektivně význačných bodů jsou vázány vztahem*

$$3kv \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Určitému k odpovídá určitá projektivná vlastnost a v. v. *I lze každou projektivnou vlastnost bodu vyjádřiti požadavkem, aby v něm se křivky dotýkala křivka stupně k $3k$-násobně*[20]. K vůli stručnosti můžeme mluviti o význačných bodech stupně k-ho; i jsou inflexní body stupně 1., sextaktické 2. atd. Připomeneme-li si vztah mezi parametrem bodu a parametrem jeho bodu tečnového, snadno shledáme:

b) Tečnové body bodů význačných stupně k-ho pro k liché náleží zase do skupiny těchto bodů; z toho ihned plyne, že pro k liché jsou význačné body stupně k-ho seskupeny v polygony, jichž strany jsou utvořeny tečnami ve význačných bodech; jsou to tedy polygony současně opsané i vepsané.

c) Tečnový bod význačného bodu stupně k pro k sudé je význačný bod stupně dvakráte nižšího. Z toho plyne, že postupné vedení tečen ve význačných bodech končí vždy ve význačných bodech lichého stupně.

---

[20]) S tohoto stanoviska jednal o těchto bodech Halphen, v. Math. Ann. XV. str. 359—379.

d) Vedeme-li tečny ke křivce ze všech význačných bodů téže skupiny, obdržíme jakožto body dotyčné všechny body význačné stupně dvakráte vyššího. Z *b*) a *c*) mimo to plyne: je-li N počet význačných bodů stupně k-ho, je počet bodů stupně $2k$-ho $3N$ pro k liché, $4N$ pro k sudé.

e) Počet význačných bodů stupně k-ho, je-li k prvočíslo větší než jedna, je $9(k^2 - 1)$; počet význačných bodů stupně $2^n k$ v témže případě je $27 \cdot 4^{n-1}(k^2 - 1)$, jak plyne z dodatku k větě *d*). Počet význačných bodů stupně 2^n je $27 \cdot 4^{n-1}$.

f) Počet význačných bodů kteréhokoli stupně $k \geqq 3$ je nutně dělitelný osmnácti; všechny body určitého stupně rozpadají se ve skupiny osmnáctibodové dříve studované. Všechny vlastnosti těchto skupin přenášejí se ihned na body význačné, po případě s některými modifikacemi.

Zvláště buďtež vytčeny věty:

g) Promítneme-li ze všech bodů inflexních určitý bod význačný, obdržíme devět bodů stejného druhu, tvořících skupinu devítibodovou.

h) Z tečnového bodu význačného bodu stupně k promítá se osm dalších bodů téhož stupně equianharmonickou čtveřinou paprsků.

Spojíme-li tuto větu s větou *d*), obdržíme:

i) Význačné body stupně lichého lze seskupiti po devíti tak, že jeden bod tvoří střed equianharmonické čtveřiny paprsků, jež obsahují ostatních osm.

k) Význačné body stupně k leží v určitém seskupení na kuželosečkách, jež protínají inflexní paprsky v určitě vyznačených bodech. Mimo jiné lze tyto kuželosečky voliti tak, že se protínají navzájem ve vrcholech téhož inflexního trojstranu a nikde na křivce.

l) Pro k liché lze význačné body seskupiti v trojiny konjugovaných trojic bodových.

Řadu těchto vět by ovšem bylo možno ještě značně prodloužiti.

4. Theorie transformací grupy G_{18} jeví se v každém směru jako sevšeobecnění theorie inflexních bodů. Geometricky lze to sledovati u všech odvozených vět.

Se stanoviska funkční theorie je theorie bodů inflexních totožna s theorií dělení period elliptických funkcí pro $n = 3$; theorie grupy G_{18} je rozšířením tohoto problému; uvažujeme místo argumentu $\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$ argument zvětšený o u. Pro devět argumentů $\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}$ máme rovnici již dříve napsanou

$$J(x) = x^4 - \frac{1}{2} g_2 x^2 - g_3 x - \frac{1}{48} g_2^2 = 0.$$

Její kořeny jsou $p\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right)$, kteréžto hodnoty, vyjímaje $p(0)$, jsou vždy po dvou stejné. Měli bychom úplněji psáti

$$ax^9 + J^2(x) = 0,$$

kde a se stává rovným nulle, což odpovídá kořenu

$$x = p(0) = \infty.$$

5. Rovnici pro body skupiny 18bodové snadno obdržíme. Lze snadno poznati, že každá 18bodová skupina je souměrná dle osy X, mají tedy vždy dva a dva body úsečky stejné. Pro úsečky tedy obdržíme rovnici stupně 9. Tato rovnice obsahuje proměnný parametr λ, který je funkcí u. Ježto rovnice musí pro jisté λ přejíti v rovnici $J^2(x) = 0$, lze ji psáti

$$f_9 + \lambda J^2(x) = 0,$$

kde λ musí býti tak voleno, aby bylo

$$\lambda = \infty \quad \text{pro} \quad u = \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}.$$

Mimo to musí $\lambda(u)$ býti neproměnné pro transformace grupy G_{18}; najdeme snadno, že lze položiti

$$\lambda = \Pi p\left(u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right) \qquad m, n = 0, 1, 2,$$

jestliže f_9 určíme tak, aby mělo stejné kořeny s funkcí $\lambda(u)$. Tyto kořeny jsou $\alpha + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{2}$, jestliže $p(\alpha) = 0$; i lze psáti

$$f_9 = x f_8,$$

kde f_8 má kořeny $p\left(\alpha + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right)$ vyjímaje pro hodnoty $m = 0$, $n = 0$. I lze psáti

$$xf_8 + \lambda J^2 = 0. \qquad (1)$$

Že pak skutečně tato rovnice podává úsečky 18bodové skupiny; je také patrno z toho: koefficienty této rovnice jsou symmetrické funkce kořenů $p\left(u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right)$; ty všechny lze vyjádřiti jako celistvou lineární funkci jediné, na př. Π. Tak jsme vedeni také k rovnici (1). Funkce f_8 stupně 8. má, jak lze snadno dokázati, za koefficienty racionálné funkce obou invariantů g_2, g_3.

Řešení hořejší rovnice je jednoduché. Jedním kořenem je vždy $x_1 = p(u)$. Všechny ostatní kořeny $x_2, \ldots, x_9$ lze pak na základě x_1 jednoduše vyjádřiti. Je totiž jasno, že funkci

$$p\left(u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}\right)$$

lze vyjádřiti jako lineárnou funkci hodnot $p(u)$, $p'(u)$; to právě znamená, že bod grupy 18bodové vznikne z jiného kollineací. V těchto lineárných funkcích lze pak položiti

$$p'(u) = \sqrt{4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3};$$

i je pak *každý kořen vyjádřen jako známá funkce kořene* x_1. Lze ovšem týmž způsobem vyjádřiti všechny kořeny na základě jiného. Píšeme-li dle toho

$$x_2 = f_2(x_1, X_1)$$
$$x_3 = f_3(x_1, X_1),$$

kde $$X_1 = \sqrt{4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3},$$

lze z těchto lineárných rovnic vyloučiti X_1, i obdržíme potom vztah $$R(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

kde R značí racionálnou funkci, lineárnou vzhledem ke každému argumentu. *Mají tedy kořeny naší rovnice tu vlastnost, že na základě dvou lze třetí vyjádřiti racionálně*[21]).

---

[21]) Vzhledem k tomu bylo by zajímavo srovnati naši rovnici s t. zv. »Tripelgleichung« st. 9-ho, jež platí pro inflexní body. V. Weber, Algebra II. pg. 410; C. Jordan, Traité des substitutions; str. 304. Hesse, Crelle's J. 34. (1847) »Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9-ten Grades etc.« str. 193 sq.