Jiří Klapka

Poznámka ke konstrukcím tečen k průsečné křivce dvou ploch v bodě dotyku

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 4, 336--342

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123765`

Sur les équations algébriques aux racines multiples.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur prouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation algébrique du degré n n'ait que k racines différentes, sont exprimées par les relations

$$a_0^{n+k}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & s_r \\ \dots & & & & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s^2_{k-1} & s_{r+k} \end{vmatrix} = 0,\ r = k,\ k+1, \dots, n-1$$

et

$$a_0^{2k-2}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ \dots & & & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-1} \end{vmatrix} \neq 0;$$

s_k est la somme des k-ièmes puissances des racines de l'équation donnée. Les premières relations peuvent être transformées de sorte qu'elles prennent la forme des n-k premiers coefficients annulés du covariant, dont le premier membre a pour son coefficient le déterminant écrit ci-dessus pour $r = k$. Elles peuvent aussi être remplacées par des semiinvariants. L'auteur fait encore voir, comment on peut examiner la multiplicité de chaque racine et comment ces conditions peuvent être exprimées par les coefficients des covariants de l'équation donnée.

Poznámka ke konstrukcím tečen k průsečné křivce dvou ploch v bodě dotyku.

Napsal *Jiří Klapka*, asistent české techniky v Brně.

a) Pan prof. Sobotka podává*) tuto konstrukci středu křivosti D čtvrtého normálního řezu v obyčejném bodě O plochy P_1, jsou-li dány tři tečny a, b, c a tři středy křivosti A, B, C jiných řezů normálních v bodě O:

Bodem O veďme libovolnou kružnici k v tečné rovině τ bodu O. Bodům na normále n jako středům křivosti norm. řezů přísluší dvojice tečen v τ a to tak, že spojnice průsečíků dvojic těchto tečen s k tvoří svazek (p) s řadou na n promětný. Tento svazek jest však nevlastní — t. j. jeho střed neleží v konečnu, — neboť přímka úběžná, odpovídajíc bodu O, má býti paprskem svazku.

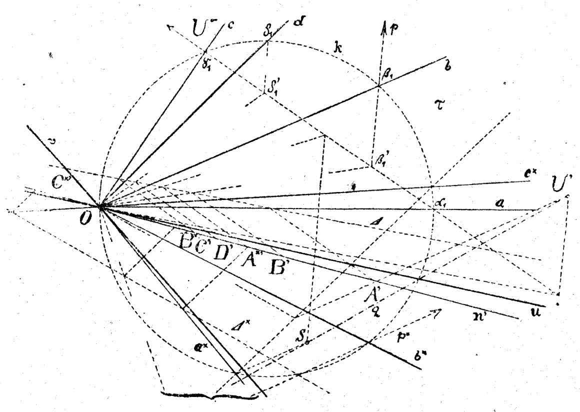
Normálu n sklopme či promítněme do τ (obr. 1.), při čemž středy A, B, C na n se promítnou v A', B', C' na n'. Kružnice k

*) Rozpravy Čes. Akad., roč. XIX., tř. II., č. 58. článek „Konstrukce týkající se křivosti plochy v daném bodě“.

nechť protíná tečny a, c ještě v bodech α_1, γ_1 mimo v O. Mysleme si svazek (p) protťat spojnicí $\overline{\alpha_1 \gamma_1}$. Pak sklopené či promítnuté středy A', C', $O' \equiv O$ promětně odpovídají bodům α_1, γ_1, U^∞, kde U^∞ jest nevlastní bod řady $\alpha_1, \gamma_1 \dots$ Sestrojme direkční osu Δ_1 této promětnosti a k prvku B' nalezněme odpovídající β'_1. Spojnice $\overline{\beta_1 \beta'_1}$ — kde β_1 značí průsečík tečny b s k — udává směr paprsků svazku (p).

K dané čtvrté tečně d stanovíme průmět D' odpovídajícího středu křivosti, když průsečíkem ϑ_1 tečny d s k vedeme $\overline{\vartheta_1 \vartheta'_1} // \overline{\beta'_1 \beta_1}$ a k bodu ϑ'_1 řady $\alpha_1 \gamma_1 U^\infty \dots$ stanovíme promětně příslušný bod D' na n'.

Je jasné, jak se řeší dvojznačná úloha obrácená.



Obr. 1.

Autor ukazuje v citovaném pojednání, jak výhodně lze užíti této konstrukce v průmětě centrálním, neboť kružnici k v τ bodem O lze vždy tak voliti, aby i její centrální průmět byl kružnicí.

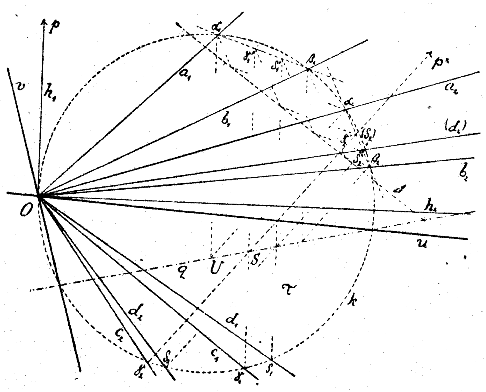
b) Uvažujme ještě druhou plochu P_2, jež má v bodě O rovněž bod obyčejný a dotýká se tam plochy P_1. Bodové řadě na n odpovídá jednak již uvedený nevlastní svazek (p) a svazek (p^*) obdobného významu pro plochu P_2. Oba tyto svazky, promětné s touže řadou na n, jsou promětné mezi sebou a to tak, že průsečík homologických paprsků vytvořuje přímku q. Snadno zjistíme, že průsečíky přímky q s k procházejí tečny u, v k průsečné křivce obou ploch v bodě O.

Jsou-li tedy dány tři normální řezy plochy P_1 resp. P_2 s tečnami a, b, c resp. a^*, b^*, c^* a se středy křivosti A, B, C resp. A^*, B^*, C^*, nalezneme paprsky (obr. 1.) odpovídající úběžnému bodu normály ve svazcích (p) a (p^*). Jejich průsečík U jest jedním bodem přímky q — tvoří tudíž dvojice asymptot. tečen obou ploch s tečnami u, v tři dvojice involuce 2°.**)

Druhý bod S přímky q stanovíme jako průsečík paprsků odpovídajících na př. bodu A^* ve svazku (p) resp. (p^*).

Abychom rozřešili úkoly: dány hlavní tečny $h_1 \perp h_2$ plochy P_1 a tři dvojice a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 tečen k normálním řezům ploch P_1 resp. P_2 stejně zakřiveným α) stanoviti tečny u, v průsečné křivky a β) k další dané tečně d_1 stanoviti odpovídající d_2:

α) opišme opět bodem O libovolnou kružnici k o středu třeba na h_2 (obr. 2.); tato protíná přímky $a_1, a_2, b_1 \dots . d_1$ v bodech



Obr. 2.

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \dots . \delta_1$ mimo v O. Na spojnicích $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ resp. $\overline{\alpha_2 \beta_2}$ vytínají nevlastní svazky (p) resp. (p^*) podobné řady, při čemž α_1, α_2 a β_1, β_2 jsou dvojice elementů odpovídajících. Můžeme tedy stanoviti direkční osu Δ této podobnosti a k danému elementu nalézti odpovídající. Paprsky svazku (p) jsou rovnoběžné s h_1 a jeden z nich promítá bod γ_1 do γ'_1 na $\overline{\alpha_1 \beta_1}$. Spojnice odpovídajícího bodu γ'_2 v přímé řadě $\alpha_2, \beta_2 \dots .$ s γ_2 udává směr paprsků svazku (p^*), takže v průsečíku S spojnic $\overline{\gamma_1 \gamma'_1}$ a $\overline{\gamma_2 \gamma'_2}$ jest jeden a v průsečíku rovnoběžek bodem α_1 resp. α_2 nebo β_1 resp. β_2 s $\overline{\gamma_1 \gamma'_1}$ resp. $\overline{\gamma_2 \gamma'_2}$ vedených jest druhý bod U přímky q. Tato protíná k v bodech, jimiž procházejí hledané tečny u, v.

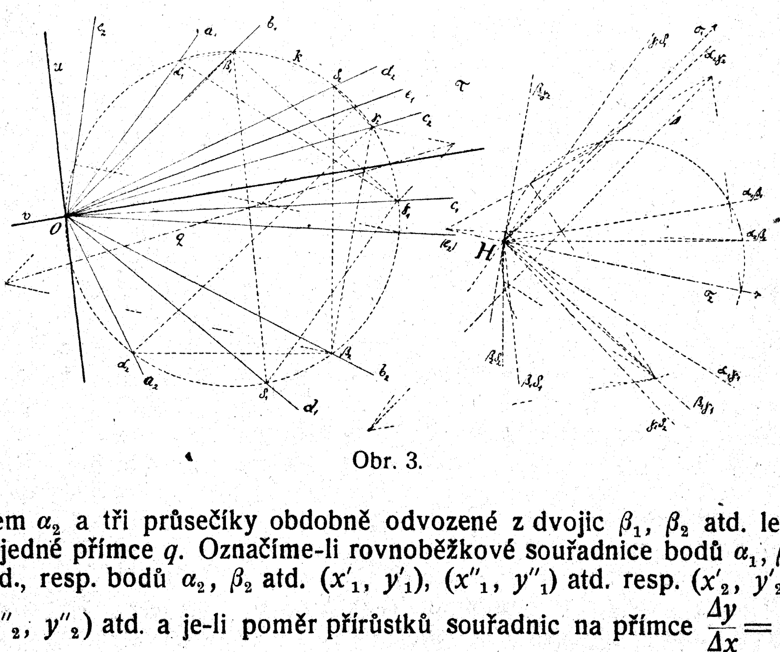
β) Konečně promítněme δ_1 paprskem svazku (p) do δ'_1 na $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ nalezněme odpovídající δ'_2 a tímto bodem veďme paprsek svazku (p^*)

**) Platí však obecněji, že tři dvojice tečen k průsečným křivkám tří ploch v bodě dotyku patří téže involuci 2°.

protínající k v bodech δ_2 a (δ_2), jimiž procházejí tečny obou normálních řezů plochy P_2 stejně zakřivených jako normální řez plochy P_1 o tečně d_1.

Z mnoha podobných strojných úloh nejobtížnější asi jest konstrukce tečen u, v ke křivce průsečné a dalších dvojic odpovídajících tečen, dány-li čtyři dvojice tečen a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 k stejně zakřiveným norm. řezům plochy P_1 resp. P_2 (obr. 3.).

Protněme opět tyto tečny kružnicí k jdoucí bodem O v bodech α_1, α_2, β_1, ... δ_2 a hledejme dva směry σ_1 a σ_2 té vlastnosti, že průsečík rovnoběžky se σ_1 bodem α_1 a rovnoběžky se σ_2 bo-



Obr. 3.

dem α_2 a tři průsečíky obdobně odvozené z dvojic β_1, β_2 atd. leží v jedné přímce q. Označíme-li rovnoběžkové souřadnice bodů α_1, β_1 atd., resp. bodů α_2, β_2 atd. (x'_1, y'_1), (x''_1, y''_1) atd. resp. (x'_2, y'_2), (x''_2, y''_2) atd. a je-li poměr přírůstků souřadnic na přímce $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, obdržíme pro dva směry o parametrech k_1 a k_2, z nichž první promítá body α_1, β_1, γ_1, druhý α_2, β_2, γ_2, podmínku, aby tři průsečíky odpovídajících paprsků ležely na přímce

$$\frac{1}{k_1 - k_2}\left\{ k_1 k_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_2 & x''_2 & x'''_2 \\ x'_1 & x''_1 & x'''_1 \end{vmatrix} + k_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x''_1 & x'''_1 \\ y'_2 & y''_2 & y'''_2 \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_1 & y''_1 & y'''_1 \\ x'_2 & x''_2 & x'''_2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_2 & y''_2 & y'''_2 \\ y'_1 & y''_1 & y'''_1 \end{vmatrix} \right\} = O.$$

Z rovnice vidíme, že v našem případě, kdy totiž nemohou žádné 3 z uvažovaných bodů ležeti na přímce, neboť leží na kružnici k, směry promítající tříčlenné skupiny do perspektivních (nevlastních) svazků si odpovídají promětně. Položíme-li osu x soustavy souřadné do spojnice $\beta_1 \gamma_1$, osu y do $\beta_2 \gamma_2$, bude

$$y_1'' = y_1''' = x_2'' = x_2''' = O$$

a minulá rovnice přejde v

$$\text{(1)} \quad \frac{1}{k_1 - k_2} \left\{ k_1 \, k_2 \, x_2' (x_1'' - x_1''') + k_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_1'' & x_1''' \\ y_2' & y_2'' & y_2''' \end{vmatrix} + y_1' (y_2''' - y_2'') \right\} = O$$

takže pro $k_1 = O$ obdržíme $k_2 = \infty$, t. j. $\overline{\beta_1 \gamma_1}$, $\overline{\beta_2 \gamma_2}$, jest dvojice směrů odpovídajících, což platí i o dvojicích $\overline{\alpha_1 \beta_1}$, $\overline{\alpha_2 \beta_2}$ a $\overline{\alpha_1 \gamma_1}$, $\overline{\alpha_2 \gamma_2}$.

Ponecháme-li mimo úvahu body α_1 a α_2 a nahradíme je body δ_1 a δ_2 obdržíme úplně analogicky rovnici promětnosti mezi směry promítajícími 3členné skupiny $\beta_1 \gamma_1 \delta_1$ a $\beta_2 \gamma_2 \delta_2$ ve svazky perspektivní. Tuto rovnici při těchže osách obdržíme také z rovnice (1) dosazením x_1^{IV} a y_1^{IV} za x'_1 a y'_1 a rovněž x_2^{IV}, y_2^{IV} za x'_2 a y'_2.

Směry $\overline{\beta_1 \gamma_1}$ a $\overline{\beta_2 \gamma_2}$ jsou jedním párem elementů v obou promětnostech si odpovídajících; avšak v obecném případě našemu účelu nevyhovují, neboť obě čtyřčlenné skupiny se naznačeným způsobem v jejich směrech nepromítají do bodů jedné přímky. Jestliže ve zvláštním případě tyto body přece leží na přímce, musí průměty bodů první skupiny ve směru x do y tvořiti řadu podobnou k řadě průmětů bodů druhé skupiny ve směru y do x. Totéž vyjadřuje rovnice

$$\begin{vmatrix} x_2' & y_1' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_2^{IV} & y_1^{IV} & 1 \end{vmatrix} = O \quad \text{čili}$$

$$\text{(2)} \qquad y'_1 \, x_2^{IV} - x'_2 \, y_1^{IV} = O.$$

Vyloučíme-li z rovnice (1) a z rovnice z ní vzniklé uvedeným dosazením parametr k_2, obdržíme pro k_1 rovnici

$$k_1 \left\{ \left[x_2' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^{IV} & x_1'' & x_1''' \\ y_2^{IV} & y_2'' & y_1''' \end{vmatrix} - x_2^{IV} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_1'' & x_1''' \\ y_2' & y_2'' & y_2''' \end{vmatrix} \right] k_1 + (y_2'' - y_2''') (y_1' \, x_2^{IV} - x_2' y_1^{IV}) \right\} = O$$

takže shledáváme, že druhý vyhovující pár směrů σ_1 a σ_2 jest různý od směrů os x a y pokud absolutní člen ve vlnité závorce není nulový. Tak tomu však jest je-li splněna relace (2), takže v tom případě, kdy směry $\overline{\beta_1 \gamma_1}$ a $\overline{\beta_2 \gamma_2}$ promítají obě čtyřčlenné skupiny ve svazky perspektivní, ztotožňuje se s tímto párem směrů i druhý pár σ_1, σ_2 směrů v obou promětnostech si odpovídajících.

Odtud plyne tento předpis pro naši konstrukci:

Libovolným bodem H veďme rovnoběžky se směry $\overline{\alpha_1 \beta_1}$, $\overline{\alpha_2 \beta_2}$; $\overline{\alpha_1 \gamma_1}$, $\overline{\alpha_2 \gamma_2}$; $\overline{\beta_1 \gamma_1}$ a $\overline{\beta_2 \gamma_2}$, čímž obdržíme tři páry paprsků dvou promětných svazků; veďme další rovnoběžky tímto bodem s $\overline{\delta_1 \beta_1}$, $\overline{\delta_2 \beta_2}$; s $\overline{\delta_1 \gamma_1}$, $\overline{\delta_2 \gamma_2}$, které s $\overline{\beta_1 \gamma_1}$ a $\overline{\beta_2 \gamma_2}$ tvoří rovněž tři páry odpovídajících paprsků jiných dvou promětných svazků. Stanovme druhý pár elementů σ_1 a σ_2 v obou promětnostech si odpovídajících, který bude v obecném případě různý, ve zvláštním totožný s párem rovnoběžek s $\overline{\beta_1 \gamma_1}$, $\overline{\beta_2 \gamma_2}$. Směr σ_1 udává směr paprsků svazku (p), druhý svazku (p^*). Přímka q, do které směry σ_1 a σ_2 promítají obě čtyřčlenné skupiny, protíná k v bodech, jimiž procházejí hledané tečny u, v.

Je-li dán normální řez plochy P_2 s tečnou e_1, nalezneme tečny e_2 a (e_2) obou norm. řezů plochy P_2 v O stejně zakřivených, vedeme-li průsečíkem e_1 s k paprsek svazku (p) a jeho průsečíkem s q paprsek svazku (p^*), jenž protíná k v bodech, jimiž hledané tečny procházejí.

Lze podotknouti, že i tyto konstrukce jsou použitelny v deskriptivní geometrii promítání paralelního a s malými změnami i v průmětech centrálních. Ze vztahu poloměru indikatrice plochy k poloměru křivosti norm. řezu vyplývají z uvedených konstrukcí řešení některých úloh o kuželosečkách soustředných,*) po případě promítneme-li tyto centrálně, o 2 kuželosečkách navzájem obecně položených.

c) Libovolná rovina obsahující normálu n protíná P_1 v norm. řezu o středu křivosti M_1, plochu P_2 v řezu norm. o středu M_2. Rovina druhého norm. řezu plochy P_1 o středu křivosti M_1 obsahuje norm. řez plochy P_2 o středu křivosti v M'_2. Odpovídají tedy bodu M_1 tímto způsobem dva body M_2 a M'_2. Po snadném výpočtu nalezneme, že příbuznost [2, 2] uvedeným způsobem definovaná se specialisuje na promětnost dvou involucí 2° tehdy a jen tehdy, když tečny ke křivkám křivosti plochy jedné půlí úhel tečen obdobného významu na ploše druhé.

*

Remarque concernant la construction des tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces au point de contact.

(Extrait de l'article précédent.)

Si deux surfaces se touchent au point O, leurs sections planes possèdent au point O dans la direction des tangentes principales

*) Viz na př. de la Gournerie: Traité de géometrie descriptive, 3ième partie, 1901 page 54.

u, *v* un contact du 2^e ordre. Si le centre de courbure parcourt la normale commune, les tangentes des sections normales correspondantes engendrent des involutions projectives. Les éléments unis de cette correspondance spéciale [2, 2] sont, d'une part, les droites isotropes, d'autre part les directions cherchées. Si l'on prend pour point de départ la construction de M. Sobotka, qui permet de trouver le centre de courbure pour une section normale, étant donné les centres de courbure de trois sections normales, on peut construire les tangentes cherchées directement, sans construire d'abord les indicatrices des deux surfaces (comme l'exige la construction d'Olivier bien connue). On trouve en même temps une série d'autres constructions concernant la courbure des sections normales. On trouve, en outre, le théoreme, facile à vérifier, que la correspondance [2, 2], déterminée par les centres de courbure situés dans les mêmes plans normaux, se réduit à l'homographie de deux involutions dans le cas où les tangentes des courbes de courbure d'une surface sont les bissectrices des tangentes anaogues de l'autre surface.

O pohybu v prostoru.

Napsal Dr. *J. Žďárský.*

Článek Dr. J. Vojtěcha „Analytické vyjádření pohybu v prostoru" (v čís. 3. roč. 51. časopisu) poskytuje mi vhodnou příležitost ukázati přednosti vektorového počtu před obvyklými methodami analytické geometrie. Užijeme-li associačně distributivné operace multiplikační (Hamiltonovy), dostaneme pro součin $\mathfrak{m} . \mathfrak{n}$ vektorových jednotek $\overline{OM} = \mathfrak{m}$, $\overline{ON} = \mathfrak{n}$ svírajících úhel ω

$$\mathfrak{m} . \mathfrak{n} = \cos \omega + i \sin \omega . a \qquad (a)$$

kde a značí jednotku direktní kolmice k vektorům $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ a i obyčejnou imaginárnou jednotku arithmetickou. (Odkazuji ke svému pojednání „Užití vektorového počtu v theorii ploch" v Rozpravách akademie, roč. XXVI. č. 45.) Přemístěním úhlu MON v jeho vlastní rovině se součin $\mathfrak{m} . \mathfrak{n}$ nezmění, překlopením úhlu změní součin $\mathfrak{m} . \mathfrak{n}$ pouze znaménko. Součin $\mathfrak{m} . \mathfrak{n}$ lze vyjádřiti pomocí obvyklého skalárného ($\wedge$) a vektorového součinu $\times$:

$$\mathfrak{m} . \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n} + i\, \mathfrak{m} \times \mathfrak{n} \qquad (b)$$

Je-li R' ($\overline{OR'} = \mathfrak{r}'$) bod souměrný s běžným bodem $R(\overline{OR} = \mathfrak{r})$ dle vektorové jednotky $\overline{OM} = \mathfrak{m}$ jest $\sphericalangle (\mathfrak{r}', \mathfrak{m}) = \sphericalangle (\mathfrak{m}, \mathfrak{r})$ t. j.

$$\mathfrak{r}' . \mathfrak{m} = \mathfrak{m} . \mathfrak{r}.$$

Operací . $\mathfrak{m}$ obdržíme: $\mathfrak{r}' = \mathfrak{m} . \mathfrak{r} . \mathfrak{m}$ (1)