Emil Weyr

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 3, 113--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123750

$$J_2 = \frac{16}{175} g h^3$$

$$p = \frac{4}{3} g h$$

tedy:

$$a = \sqrt{\frac{J_1}{p}} = g \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.447213\, g$$

$$b = \sqrt{\frac{J_2}{p}} = h \sqrt{\frac{12}{175}} = 0.261861\, h.\text{*)}$$

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně.

(Podává Dr. *Emil Weyr.*)

(Pokračování.)

Podmínku, kterou jsme pro tři na téže přímce ležící body racionální křivky třetího stupně na analytickém základě byli vyvinuli, může se též ryze geometricky odůvodniti a to spůsobem následujícím. Budiž C_3 (obr. 17.) naše křivka a δ jejím bodem dvojným. Na křivce vytkněme sobě libovolný bod v co vrchol svazku paprskového. Každý paprsek X tohoto svazku protne křivku ještě v dalších dvou bodech x_1, x_2, poněvadž křivka naše co čára 3. stupně s každou přímkou tři společné body míti *musí*. Body x_1 x_2 určují s bodem δ dva paprsky $\delta \bar{x}_1$, δx_2 aneb kratčeji X_1, X_2. Naopak protíná každý, bodem δ procházející paprsek X_1 křivku C_3 jen ještě v jediném bodě x, který s bodem v úplně určuje paprsek $v\bar{x}_1$ neb X. Takto odpovídá každému paprsku (jako X_1) svazku δ jen jediný paprsek (X) svazku v, ale naopak každému paprsku (X) svazku v odpovídají dva paprsky *(X_1 X_2)* svazku δ. Dva takové paprsky

*) Srovnej: Die graphische Statik von K. Culmann". §§. 61. a 69.
Dále: „Handbuch der rationellen und technischen Mechanik von G. Decher". Díl druhý, §§. 421 - 425.

jako X a X_1 neb X a X_2 nazýváme sobě příslušnými paprsky. Takové dva svazky nazýváme „*dva svazky jedno-dvou-členné*" (ein-zweideutig), svazek δ jest *dvoučlenný* a svazek v jest *jednočlenný*. *)

(Všeobecněji: Máme-li dva prvořadé útvary U_m, U_n (svazky neb řady bodové) v takové geometrické souvislosti, že každému prvku útvaru U_m odpovídá n prvků útvaru U_n; a naopak každému prvku útvaru U_n m prvků útvaru U_m, tu nazýváme tyto dva útvary útvary „*m-n-členné*"; a tudíž nazýváme U_m útvarem m-členným (dvou, tří, čtyr, pětičlenným a t. d.) a útvar U_n n-členným. **)

Určujeme-li paprsek X svazku jednočlenného pomocí karakteristického poměru x vzhledem k libovolným dvěma základním paprskům svazku v, a obdobně příslušný paprsek (X_1 neb X_2) ve svazku δ pomocí karakteristického poměru ξ vzhledem ku dvěma libovolným základním paprskům tohoto svazku, pak musí mezi parametry x, ξ sobě příslušných dvou paprsků platiti rovnice:

$$F(x, \xi) = 0,$$

z které pro každé x plynou dvě hodnoty ξ_1 ξ_2, ale naopak pro každé ξ jen jediná hodnota x. Jinými slovy: rovnice musí býti lineární co do x a kvadratická co do ξ, tedy všeobecně tvaru:

$$x(a\xi^2 + b\xi + c) + (\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma) = 0 \text{ †)} \qquad (6)$$

a, b, c, α, β, γ jsou ještě pouze na křivce C_3 a na poloze vrchole v a na základních paprscích závisící stálé veličiny.

Libovolnému paprsku dvoučlenného svazku δ, jehož karakteristický poměr nechť jest ξ, odpovídá v jednočlenném svazku paprsek, pro jehož karakteristický poměr x z rovnice (6) plyne:

$$x = -\frac{\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma}{a\xi^2 + b\xi + c};$$

naopak obdržíme dle (6) poměry paprsků X_1 X_2 dvoučlenného,

*) Viz: Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde"... B. G. Teubner, Leipzig 1869.

**) Viz: Die Erzeugung algebraischer Curven durch mehrdeutige Elementargebilde"; v aktách kr. č. učené společnosti str. 4. Praha 1870.

†) Kdyby rovnice $F(x, \xi) = 0$ byla co do x stupně m-tého a co do ξ stupně n-tého, pak by svazek v byl m-členným a svazek δ n-členným svazkem. Oba by pak byly dva m-n-členné svazky.

svazku δ, které odpovídají libovolnému paprsku X svazku v z kvadratické rovnice:

$$\xi^2(a x + \alpha) + \xi(b x + \beta) + (c x + \gamma) = 0,$$

z kteréž plyne:

$$\xi = \frac{-(b x + \beta) \pm \sqrt{(b x + \beta)^2 - 4(a x + \alpha)(c x + \gamma)}}{2(a x + \alpha)}$$

Kdežto každému paprsku svazku δ vždy reálný paprsek svazku v odpovídá (poněvadž hodnota x pro každé reálné ξ jest též reálná), budou paprsky X_1 X_2 odpovídající paprsku X reálné neb pomyslné dle toho, je-li

$$(b x + \beta)^2 - 4(a x + \alpha)(c x + \gamma) \gtrless 0$$

Z předcházející úvahy algebrické plyne ten geometrický výsledek: kdežto *každá* bodem dvojným δ proložená přímka křivku C_3 v reálném bodě protíná, protne bodem v procházející přímka křivku C_3 v dvou reálných neb pomyslných bodech dle toho, platí-li první neb druhá z posledních dvou nerovností.

Jest-li tudíž právě:

$$(b x + \beta)^2 - 4(a x + \alpha)(c x + \gamma) = 0,$$

pak přímka X protíná v dvou splývajících bodech křivku C_3 t. j. paprsek X bude tečnou křivky C_3. Jelikož poslední rovnice, z které plynou parametry bodem v procházejících tečen (od tečny křivky v bodu v různých), jest stupně druhého, tu soudíme, že každým bodem v křivky C_3 prochází *dvě* buď reálných aneb pomyslných tečen této křivky (dotýkajících se v bodech od bodu v různých). Tyto dvě tečny nazýváme *hlavními paprsky* jednočlenného svazku v. (Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels.) Označíme je písmenami H H'. Poněvadž každý z hlavních paprsků protíná křivku v dvou splývajících bodech, tu mu příslušejí patrně dva splývající paprsky dvoučlenného svazku; tyto paprsky nazýváme *dvojnými paprsky* (Doppelstrahlen) dvoučlenného svazku, a označíme je písmenami H_{12}, H'_{12}. Jsou-li kořeny poslední kvadratické rovnice pomyslné pak nemění ve výrazu pro ξ pod odmocninou se nalezající funkce *nikdy* znamenko a z toho soudíme, že pro tento případ (a pro reálnou křivku C_3) *každá* bodem v procházející přímka protne křivku v reálných bodech. Pro reálné kořeny kvadratické rovnice oddělují tyto celou nekonečnou řadu hodnot x na dvě části; pro hodnoty jedné z obou bude ξ reálné, pro hodnoty druhé pak (sdruženě) pomyslné. Tedy:

„Procházejí-li bodem v dvě reálné tečny H, H' ku křivce C_3, oddělují tyto celý svazek v na dvě vrcholové části; paprsky jedné vrcholové části protínají, a paprsky druhé neprotínají křivku v reálných bodech. Jsou-li bodem v procházející tečny pomyslné, pak protíná každá bodem v procházející příčka křivku v reálných bodech.“ Bodem v procházející tečny H, H' dotýkají se křivky C_3 v bodech h_{12}, h'_{12}, které s bodem δ spojeny určují dvojné paprsky H_{12}, H'_{12} dvoučlenného svazku. Vezmeme-li tyto dva paprsky za paprsky základní v dvoučlenném svazku (posud jsme nechali základní paprsky neurčité), tu jim pak přísluší co parametry 0 a ∞ a parametry hlavních paprsků H, H' plynou tedy z rovnice:

$$x = -\frac{\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma}{a\xi^2 + b\xi + c} = -\frac{\alpha + \frac{\beta}{\xi} + \frac{\gamma}{\xi^2}}{a + \frac{b}{\xi} + \frac{c}{\xi^2}}$$

pro $x = 0$ a $x = \infty$. Tím obdržíme pro hlavní paprsky H a H':

$$x = -\frac{\gamma}{c} \quad x' = -\frac{\alpha}{a} \qquad (\omega)$$

Tyto dvě hodnoty musí tudíž pro tento případ býti kořeny kvadratické rovnice:

aneb: $$(bx + \beta)^2 - 4(ax + \alpha)(cx + \gamma) = 0$$

$$x^2(b^2 - 4ac) + 2x[b\beta - 2(a\gamma + c\alpha)] + [\beta^2 - 4\alpha\gamma] = 0$$

t. j. musí býti (dle známých vlastností kořenů a činitelů)

$$-\frac{\alpha}{a} - \frac{\gamma}{c} = -\frac{b\beta - 2(a\gamma + c\alpha)}{b^2 - 4ac}$$

$$\frac{\alpha\gamma}{ac} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{b^2 - 4ac}$$

aneb co jest totéž:

$$(b^2 - 2ac)(\alpha c + \gamma a) - abc\beta = 0, \qquad (\omega')$$

$$b^2\alpha\gamma - \beta^2 ac = 0$$

a vložíme-li z této rovnice plynoucí hodnotu pro ac do rovnice předcházející, obdržíme snadně:

$$(\beta^2 - 2\alpha\gamma)(\alpha c + \gamma a) = \alpha\beta\gamma b. \qquad (\omega'')$$

Nyní předpokládejme dále, že v jednočlenném svazku v jsou základními paprsky hlavní paprsky H' H, tak že jím přísluší karakteristické poměry ∞ a 0. Dle vzorců (ω) musí tedy býti

$$c = 0, \quad \alpha = 0,$$

aniž by však současně γ neb a se nulle rovnalo.

Rovnice (ω') přejde tím v následující

$$b^2 \gamma a = 0$$

a rovnice (ω'')

$$\beta^2 \gamma a = 0,$$

a poněvadž γa jest od nully rozdílná hodnota, musí býti:

$$b = 0, \beta = 0$$

Máme tudíž pro případ, že použijeme dvojných paprsků H_{12} H_{12}' a hlavních paprsků H' H v obou svazcích za paprsky základní, současně

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ b = 0, \ c = 0$$

tak že rovnice mezi x a ξ platící zní:

$$a x \xi^2 + \gamma = 0$$

aneb položíme-li $-\frac{\gamma}{a} = \lambda$

$$x \xi^2 = \lambda \text{ *)} \tag{7}$$

Jelikož z této rovnice plyne

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{x}}$$

shledáváme, že karakteristické poměry paprsků dvoučlenného svazku, které odpovídají témuž paprsku svazku jednočlenného, pouze znamenkem se liší, tak že tedy takové dva paprsky harmonicky oddělují paprsky základní.**) Z toho plyne věta: „Paprsky odpovídající libovolnému paprsku jednočlenného svazku oddělují harmonicky paprsky dvojné ve svazku dvoučlenném.“

Protíná-li tedy libovolná bodem v procházející přímka X naši křivku v bodech x_1 x_2, a určují-li tyto s bodem δ paprsky X_1 X_2, pak tyto dva paprsky oddělují harmonicky paprsky H_{12} H'_{12}, které spojují bod δ s body styku obou bodem v procházejících tečen (H H') křivky C_3. Všecky páry paprsků X_1 X_2 tvoří tedy involuci, pro kterou H_{12} H'_{12} jsou paprsky dvojnými. Máme tedy následující věty: „Veškeré páry paprsků svazku δ tvoří involuci, která má za dvojné paprsky dvojné paprsky

*) Tato rovnice platí patrně zcela všeobecně mezi parametry sobě příslušných elementů dvou jedno- dvou-členných útvarů prvořadých, zvolíme-li dvojné elementy dvojčlenného a v opačném pak pořádku hlavní elementy jednočlenného útvaru za prvky základní. Viz: Geometrische Mittheilungen I. v zasedacích zprávách cís. akademie věd ve Vídni, dne 12. května 1870.

**) Viz: Základové vyšší geometrie str. 13.

svazku dvoučlenného.“ *) „Prokládáme-li pevným bodem ν racionální křivky třetího stupně příčky, a spojíme-li vždy další dva průseky těchto příček a křivky s bodem dvojným, obdržíme involuci paprskovou, pro kterouž dvojnými paprsky jsou přímky spojující dvojný bod s body styku obou bodem ν proložených ku křivce tečen.“

Tuto involuci nazveme *„bodu ν co středu příslušnou involucí.“*

Tato involuce jest se svazkem ν v tom vzájemném vztahu, že každému paprsku X svazku ν odpovídá *jeden pár* paprsků X_1 X_2 involuce δ a naopak, každému páru involuce jediný paprsek svazku ν. Proto pravíme, že svazek ν jest s involucí δ *promětným.*

Prochází-li paprsek X bodem δ aneb aspoň nekonečně blízko kolem tohoto bodu, tu protne křivku C_3 v dvou bodech x_1 x_2 bodu dvojnému δ nekonečně blízkých, tak že paprsky δx_1, δx_2 budou tečnami křivky C_3 v bodě dvojném; tečny ty označíme písmenami T_1 T_2. A tu shledáváme dle dřívějšího, že tvoří též pár paprsků involuce δ, totiž onen pár, který přísluší paprsku $\nu\delta$ svazku jednočlenného bodem δ procházejícímu Tento, oběma svazkům společný paprsek $\delta\nu$ můžeme též ku svazku dvoučlennému přičítati a tu nastává otázka, který paprsek odpovídá mu ve svazku jednočlenném? Co odpověď na tuto otázku shledáme, že „oběma svazkům společnému paprsku odpovídá v jednočlenném svazku paprsek, dotýkající se ve vrcholi ν křivky C_3“. Neb vskutku otáčíme-li paprsek X_1 tak kolem δ, až splyne s paprskem $\delta\nu$, tu přejde bod x_1 v polohu bodu ν nekonečně blízkou, tak že v skutku příslušný paprsek νx_1 co přímka dva nekonečně blízké body spojující, bude tečnou křivky C_3 v bodě ν. Paprsku oběma svazkům společnému odpovídají tudíž dle toho, čítáme-li jej k jednočlennému aneb k dvoučlennému svazku, buď tečny dvojného bodu δ aneb tečna vrchole jednočlenného svazku. Mění-li se bod ν na křivce C_3, tu obdržíme pro každou polohu tohoto bodu jinou involuci na dvojném bodě δ, avšak všecky tyto involuce mají tečny T_1 T_2 bodu dvojného za společný pár paprsků sobě příslušných.

Jelikož však dvojné paprsky H_{12} H'_{12} každé takové involuce harmonicky oddělují sobě příslušné pevné a všem invo-

*) Totéž platí o jedno-dvou-členných útvarech vůbec.

lucím společné paprsky T_1 T_2, soudíme z toho, že dvojné paprsky všech řečených involucí tvoří opět involuci, pro kterouž tečny T_1 T_2 bodu dvojného jsou paprsky dvojnými.

Jinými slovy:

Sestrojíme-li s každého bodu v křivky C_3 k této křivce tečny H H' a spojíme-li jich body styku h_{12} h'_{12} s bodem dvojným δ, obdržíme dva paprsky H_{12} H'_{12} příslušné involuci, pro kterou tečny T_1 T_2 bodu dvojného jsou paprsky dvojnými. Spojíme-li při této konstrukci každý bod v naší křivky s dvojným bodem δ paprskem δv aneb V, tu můžeme paprsky H_{12} H'_{12} považovati za paprsky paprsku V příslušné a naopak. Takto obdržíme dva koncentrické svazky (společného vrchole δ), jeden pozůstávající z jednotlivých paprsků V a druhý pak z párů H_{12} H'_{12} involuce dříve určené; o těchto svazcích snadno se přesvědčíme, že jsou jedno-dvou-členné. Neb v skutku přísluší každému paprsku V pár paprsků H_{12} H'_{12}, které obdržíme, proložíme-li průsekem v křivky C_3 a paprsku V ku křivce tečny H H' a spojíme-li jich body styku h_{12} h'_{12} s bodem δ; naopak přísluší každému paprsku H_{12} svazku druhého jen jediný paprsek V svazku prvního, který obdržíme, spojíme-li δ s průsekem v křivky a tečny té křivky v onom bodě h_{12}, v kterém H_{12} křivku protíná. Patrně jest v tangencialním bodem bodu h_{12} (a taktéž bodu h'_{12}). Pro dvoučlenný svazek jsou dle dřívějšího tečny T_1 T_2 bodu dvojného δ (co dvojné paprsky involuce párů H_{12} H'_{12}) paprsky dvojnými. Tytéž dvě tečny má však (v opačném pořádku) jednočlenný svazek za paprsky hlavní. Neb splyne-li V s tečnou T_1 na příklad, tu bod v jest bodu δ nekonečně blízký na T_1 ležící bod; s bodu toho ku křivce proložené tečny H H' dotýkají se v dvou bodu δ na druhé větvi (tečny T_2 se dotýkající) nekonečně blízkých bodech h_{12} h'_{12}, tak že paprsky H_{12} H'_{12} splývají s tečnou T_2; tato tečna T_2 odpovídá tudíž co dvojný paprsek tečně T_1 co paprsku svazku jednočlenného. Tečna T_1 jest tudíž hlavním paprskem svazku jednočlenného. Obdobně jest T_2 druhým hlavním paprskem, kterému odpovídá dvojný paprsek T_1. Zavedeme-li tedy pro oba svazky T_1 T_2 co paprsky základní, pak odpovídati budou parametrům (karakteristickým poměrům) 0 ∞ hlavních paprsků T_1 T_2 parametry ∞, 0 příslušných dvojných paprsků T_2 T_1

a platí tedy pro karakteristické poměr dvou sobě příslušných paprsků obou jednodvoučlenných koncentrických svazků rovnice (7):

$$x\xi^2 = \lambda,$$

při čemž tedy x jest karakteristický poměr paprsku V neb δv a $\pm\xi$ karakteristické poměry obou příslušných paprsků δh_{12}, dh'_{12} neb H_{12} H'_{12}. Připomeňme si, že dle dřívějšího (viz 1. sešit str. 32.) můžeme x a ξ považovati za parametry *bodů* v a h_{12}, tak že poslední rovnice nám představuje též vztah mezi parametry libovolného bodu h_{12} a příslušného bodu tangenciálního v. Tím obdrželi jsme nám již známou rovnicí, vyskytující se ve formě

$$u_1 u^2 = K$$

na 34. stránce 1. sešitu. Tím současně zbudovali jsme si zde znova a to ryze geometrickými úvahami (bez analytické geometrie) základ k celé v prvním sešitu obsažené theorii. Vrátíme-li se tedy k dřívějšímu označení, t. j. píšeme-li u_1 u a K místo x ξ a λ, zní rovnice (7):

$$u_1^2 u = K, \qquad (7')$$

z které opět plynou všecky ty konsekvence, jak jsme si je vyvinuli v 1. sešitu. Nyní ukážeme, jak lze z této rovnice (7') vyvinouti podmínku pro tři body křivky C_3 na téže přímce se nalezající. Prokládáme-li libovolným pevným bodem u_3 *) naší křivky C_3 paprsky U, tu protínají tyto křivku v dalších dvou bodech u_1 u_2, které s bodem δ spojeny určují involuci paprskovou, v kteréž dle dřívějšího též paprsky T_1 T_2 pár příslušných paprsků představují. Mezi parametry u_1 u_2 sobě příslušných paprsků stává, jak známo (a jak z výměnlivosti v involuci vždy platné ihned plyne), rovnice prvního stupně symmetrická t. j. tvaru:

$$u_1 u_2 + A(u_1 + u_2) + B = 0,$$

z které plyne na př.

$$u_1 = -\frac{B + Au_2}{A + u_2}.$$

Poněvadž však T_1 T_2 sobě přísluší a mají parametry 0 a ∞, musí pro $u_2 = 0$ býti $u_1 = \infty$ t. j. $A = 0$; pak již samo

*) Nyní opět nazveme jednoduše body křivky C_3 jako jim příslušné parametry.

sebou pro $u_2 = \infty$ bude $u_1 = 0$. Rovnice involuce v našem případě zní tedy:

$$u_1 u_2 + B = 0$$

aneb

$$u_1 u_2 = -B.$$

Stane-li se paprsek $u_1 u_2$ t. j. U tečnou křivky v bodě u_3, tu pak jeden bod na př. u_1 splyne s u_3 a druhý u_2 stane s bodem tangenciálním bodu u_3, tedy bude:

$$u_1 = u_3 \text{ a } u_2 = \frac{K}{u_3^2}, \qquad \text{(dle 7')}$$

tak že máme

$$u_1 u_2 = u_3 \frac{K}{u_3^2} = -B,$$

z čehož jde

$$-B = \frac{K}{u_3}$$

a rovnice involuce zní tedy

$$u_1 u_2 = \frac{K}{u_3},$$

z čehož jde

$$u_1 u_2 u_3 = K$$

co podmínka, by body u_1 u_2 se nalezaly s bodem u_3 na téže přímce aneb jinými slovy, by tři body u_1 u_2 u_3 naší křivky na přímce se nalezaly.

Tím konečně opět dospěli jsme k té užitečné základní rovnici, z které jsme již v prvním sešitu některé zajímavé theoremy vyvinuli a kterou v příštích úvahách zvšeobecniti a na složitější věty a problémy upotřebiti hodláme.

(Pokračování.)