Josef Pour

Pošinování podobných obrazců v rovině, jichž střed podobnosti zůstává stálým

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 1, 28--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123745

Pošinování podobných obrazců v rovině, jichž střed podobnosti zůstává stálým.

Napsal

Josef Pour,

professor v Praze.

1. Dvě přímo podobné soustavy, jichž body a, b, c, . . , a_1, b_1, c_1, . . ., sobě odpovídají, mají vždy samodružný bod s (bod dvojný, střed podobnosti). Bod tento jest společným vrcholem podobných trojúhelníků, jimž jsou půdicemi přímky aa_1, bb_1, cc_1, . . . spojující body sobě příslušné; společným vrcholem párů podobných trojúhelníků, jimž jsou půdicemi sobě příslušné přímky ab, a_1b_1; ac, a_1c_1; . . .; a společným ohniskem parabol určených přiřaděnými body kterýchkoli dvou sobě příslušných přímek.[1])

Z tohoto výměru vyvineme některé věty o pošinování podobných obrazců, jichž střed podobnosti zůstává stálým.

Bezprostředně plynou odtud věty:

2. Otáčí-li se trojúhelník $a_0a_1a_2$, zůstávaje sobě podoben, kolem vrcholu a_0, opisují vrcholy a_1, a_2 obrazce podobné.

Otáčí-li se trojúhelník $a_0a_1a_2$, zůstávaje sobě podoben, kolem vrcholu a_0, a šine-li se vrchol a_1 po přímce P_1, opisuje vrchol a_2 přímku P_2.

Přímka jakákoli Q_2, jež není totožná s přímkou P_2, protíná přímku P_2 toliko v jednom bodě:

Daným bodem a_0 lze sestrojiti všeobecně toliko jeden trojúhelník $a_0a_1a_2$ danému podobný, jehož vrcholy a_1, a_2 nalézají se na daných přímkách P_1, Q_2.

Poněvadž podobné n-úhelníky rozděliti lze úhlopříčnami vedenými souhlasnými vrcholy v podobné trojúhelníky, rozšíříme vyslovené věty takto:

3. Otáčí-li se podobný n-úhelník $a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ kolem vrcholu a_0, opisují ostatní vrcholy podobné obrazce K_1, K_2, . . ., K_{n-1}.

---

[1]) Viz *J. S. Vaněček,* Pošinování geom. útvarů, pag. 40; *G. Bellavitis,* Meth. equipollencí, přel. *K. Zahradník,* p. 13; *Bratří Weyrové,* Zákl. vyšší geom. II., a j.

Otáčí-li se podobný n-úhelník $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ kolem vrcholu a_0, a šine-li se jeden z jeho vrcholů, a_1, po přímce P_1, opisuj ostatní vrcholy přímky $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

Ve všech těchto případech byl bod a_0, (samodružný bod pošinující se podobné soustavy), stálým, avšak s pošinujícím se obrazcem přímo spojen. Vynecháme-li v předešlé větě a_0 z počtu vrcholu n-úhelníka, obdržíme všeobecnou větu:

4. *Šine-li se podobný obrazec ve své rovině tak, že zůstává střed podobnosti stálým, opisují body jeho křivky (obrazce) podobné.*

Otáčí-li se podobný n-úhelník $a_1 a_2 \ldots a_n$ kolem pevného bodu a_0 strany $a_1 a_2$, a šinou-li se vrcholy a_1, a_2 po přímkách rovnoběžných P_1, P_2, opisují ostatní vrcholy přímky $P_3, P_4, \ldots, P_n$; bod a_0 jest pevným středem podobnosti veškerých poloh.

5. *Šine-li se podobný trojúhelník $a_1 a_2 a_3$ vrcholy svými po přímkách P_1, P_2, P_3, zůstává střed pošinutí stálým.*

Důkaz. Buďtež $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$ libovolné tři polohy šinoucího se podobného trojúhelníka, body a_1, b_1, c_1 na přímce P_1, a_2, b_2, c_2 na P_2 a a_3, b_3, c_3 na P_3, a a_0 středem podobnosti trojúhelníků $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$; otáčí-li se trojúhelník $a_0 a_1 b_1$ kolem bodu a_0, a šine-li se vrchol a_1 po obvodě trojúhelníka $a_1 a_2 a_3$, opisuje vrchol b_1 trojúhelník $b_1 b_2 b_3$.

Je-li bod c_1 na tento otáčející se podobný trojúhelník vázán dle zákona podobnosti, jest trajektorie jeho (2) trojúhelník, podobný trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$, a poněvadž vrcholy jeho jsou na přímkách P_2, P_3 (2), opisuje bod c_1 trojúhelník $c_1 c_2 c_3$.

Bod a_0 jest společným vrcholem podobných trojúhelníků $a_0 a_1 c_1$, $a_0 a_2 c_2$, $a_0 a_3 c_3$; $a_0 b_1 c_1$, $a_0 b_2 c_2$, $a_0 b_3 c_3$, tedy (1) společným středem podobnosti trojúhelníků $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$.

Dále jest

$$\frac{a_1 a_2}{a_2 a_3} = \frac{b_1 b_2}{b_2 b_3} = \frac{c_1 c_2}{c_2 c_3}, \text{ t. j.}$$

Šine-li se podobný trojúhelník $a_1 a_2 a_3$ vrcholy svými po přímkách P_1, P_2, P_3, obalují strany $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$ paraboly o společném ohnisku.

Přihlížíme-li k větám předešlým (4, 5), obdržíme následující:

Šine-li se podobný n-úhelník třemi vrcholy po přímkách, opisují též ostatní vrcholy přímky a strany obalují paraboly, jichž společným ohniskem jest stálý střed podobnosti.

Z výměru středu podobnosti (1) plyne dále:

6. Kružnice procházející libovolným párem příslušných bodů a, a_1 dvou podobných rovinných soustav, a průsečíkem p jimi procházejících přiřaděných přímek ab, a_1b_1, prochází středem podobnosti.

Otáčí-li se přímka ab, náležející podobné soustavě Σ, kolem pevného bodu p přímky ab, a jsou-li trajektorie bodů a, b, kružnice K_a, K_b, jež bodem p procházejí: přísluší veškerým polohám podobné soustavy Σ tentýž střed podobnosti s, druhý průsečík kružnic K_a, K_b.

Veškeré body soustavy Σ opisují (4) kružnice, jež (6) procházejí středem s.

Body přímky ab opisují (6) kružnice procházející bodem p.

Je-li v soustavě Σ libovolná přímka P, protínající přímku ab v bodě c a c_1P_1, c_2P_2 některé další polohy v pošinující se podobné soustavě, jest

$$\sphericalangle pcP = \sphericalangle pc_1P_1 = \sphericalangle pc_2P_2 = \ldots;$$

poněvadž tyto úhly jsou obvodovými úhly kružnice K_c a ramena jejich cp, c_1p, c_2p, ... procházejí pevným bodem p této kružnice, protínají se též přímky P, P_1, P_2 v jiném pevném bodě kružnice K_c.

Máme tedy větu:

7. *Otáčí-li se strana a_1a_2 podobného n-úhelníka $a_1a_2\ldots a_n$ v rovině kolem pevného bodu svého p, a zůstává-li střed podobnosti s stálým, otáčejí se ostatní strany n-úhelníka kolem pevných svých bodů q, r ....*

Šinutý pohyb podobného n-úhelníka takový, že strany otáčejí se kolem pevných svých bodů, nastane v těchto případech:

a) Otáčí-li se libovolného strana podobného n-úhelníka kolem pevného bodu svého a jsou-li trajektorie vrcholů této strany kružnice pevným bodem strany procházející.

b) Otáčejí-li se dvě sousední strany podobného n-úhelníka kolem pevných bodů svých a je-li trajektorie jednoho z nespolečných vrcholů těchto stran kružnice, procházející pevným bodem příslušné strany.

c) Otáčejí-li se strany libovolného, třemi vrcholy a_k, a_l, a_m podobného n-úhelníka určeného trojúhelníka kolem pevných svých bodů.

O rekurrentní rovnici

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} c_\nu$$

Napsal

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Nadepsaná rovnice rekurrentní, již lze symbolicky též psáti $c^n = (1 - c)^n$, má tu vlastnosť, že nedefinuje veličiny $c_1, c_2, c_3 \ldots$ naprosto, nýbrž že tyto veličiny obsahují určité libovolné konstanty.

Abychom ustanovili řešení nadepsané rovnice, předpokládejme, že pro jedno z nich řada

$$\text{(1)} \qquad F(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} y^\nu$$

konverguje v jistém okolí bodu $y = 0$. Pak bude

$$e^y F(-y) = \sum \frac{y^\mu}{\mu!} \sum (-1)^\nu \frac{c_\nu}{\nu!} y^\nu = \sum_{\mu,\nu} \frac{(-)^\nu c_\nu}{\mu!\,\nu!} y^{\mu+\nu},$$

$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

součinitel při y^n je zde tedy

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu c_\nu}{\nu!\,(n-\nu)!} = \frac{c_n}{n!},$$