Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

Některé konstrukce ploch stupně druhého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 16--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123723

Je tedy těchto křivek pro $n \overline{>} 3$ nekonečně mnoho; přímka, o níž mluví věty *a*) *β*), *b*) odst. 11. počítaná n-kráte, tvoří sama také jednu z těchto křivek.

Právě tak se nahlédne, že existují křivky n-té třídy obecně se nerozpadající, jež vzniknou specialisací křivek n-té třídy, o nichž mluví věty *a*), *b*) odst. 9. Pro ty jsou tečny v n-násobných bodech hyperoskulační, t. j. tečna z tohoto bodu ke křivce vedená vznikla splynutím n tečen. Rovnice těchto křivek zní v souřadnicích tečnových pro n sudé

$$(\xi_1 + \xi_2)^n + (\xi_2 + \xi_3)^n + (\xi_3 \mp \xi_1)^n - \xi_1^n - \xi_2^n - \xi_3^n + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f_{n-3}(\xi_i) = 0$$

a pro n liché:

$$(\xi_1 + \xi_2)^n + (\xi_2 + \xi_3)^n + (\xi_3 + \xi_1)^n - \xi_1^n - \xi_2^n - \xi_3^n + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f_{n-3}(\xi_i) = 0.$$

Těchto křivek je pro $n \geqq 3$ nekonečně mnoho; kuželosečka, po případě bod, o nichž mluví věty *α*), *β*), lze pokládati, počítáme-li je v příslušné násobnosti, pro n sudé za jednu z těchto křivek.

Některé konstrukce ploch stupně druhého.

(Další serie [1]).

Podává dvor. rada prof. Dr. **Vinc. Jarolímek.**

1. *Sborcená plocha 2. stupně buď dána dvěma mimoběžkami A, B a třemi rovinami tečnými ϱ, σ, τ.*

Budiž společný průsečík daných rovin $(\varrho\,\sigma\,\tau) \equiv v$. Každá rovina položená površkou je tečnou rovinou plochy sborcené, tedy i roviny $(vA) \equiv \alpha$, $(vB) \equiv \beta$. K rovinám α, β, ϱ, σ, τ sestrojme tečný kužel 2. stupně $\varkappa$. Obecně určují řídící přímky A, B a kužel $\varkappa$, jehož přímka tvořící stále se dotýká, sborcenou plochu stupně čtvrtého, která však v našem případě, ježto přímky A, B jsou tečnami kužele $\varkappa$, se rozpadá v plochu stupně dru-

---

[1]) Viz Čas. mathem. roč. XLI, str. 371; XLII, 145; XLIV, 24; Jarolímek, Základové geometrie polohy, svazek II, str. 66—75; III, 102—105; IV, 35—44; Rozpravy II. třídy České Akademie věd, 1916.

hého φ^2 a ve dva svazky paprskové, které ležíce v rovinách α, β, mají středy své v průsečících $(\beta A) \equiv a$, $(\alpha B) \equiv b$. Každá tečná rovina kužele $\varkappa$ seče přímky A, B ve dvou bodech, jichž spojnice dá površku plochy φ^2.

Jsou-li však dvě dané roviny na př. ϱ, σ *imaginárné*, určené samodružnými rovinami elliptické involuce rovinové dané na ose M, bude průsečík rovin $(\varrho\sigma\tau) \equiv (M\tau) \equiv v$ a kužel $\varkappa$ o vrcholu v stanoven tečnými rovinami α, β, ϱ, σ, τ, kdež zase $(vA) \equiv \alpha$, $(vB) \equiv \beta$, avšak roviny ϱ, σ jsou imaginárně sdružené. V tomto případě protneme libovolnou rovinou μ, která vrcholu v neobsahuje, involuci rovinovou M v involuci paprskové $m \equiv (M\mu)$, jejíž samodružné paprsky $R \equiv \overline{\varrho\mu}$, $S \equiv \overline{\sigma\mu}$ jsou imaginárné, stanovíme průsečnice $\overline{\alpha\mu} \equiv A'$, $\overline{\beta\mu} \equiv B'$, $\overline{\tau\mu} \equiv T$, a sestrojíme v rovině μ kuželosečku K určenou tečnami A', B', T, R, S (z nichž R, S jsou sdruž. imag.) způsobem známým [1]). Kužel $\varkappa$ je nyní stanoven vrcholem v a křivkou K, a určuje s přímkami A, B plochu φ^2 jako nahoře.

Reciprokým způsobem řešíme úlohu duální: sestrojiti sborcenou plochu 2. stupně ze dvou přímek a tří bodů, z nichž dva mohou býti také pomyslné.

2. *Sborcená plocha 2. stupně daná jednou přímkou P, dvěma reálnými body (a, b) a čtyřmi imaginárnými body,* z nichž dva, c, d, spolu sdružené, dány jsou elliptickou involucí bodovou na přímce N, a dva sdružené e, f elliptickou involucí na přímce S. Přímky P, $\overline{ab}$, N, S buďtež mimoběžny.

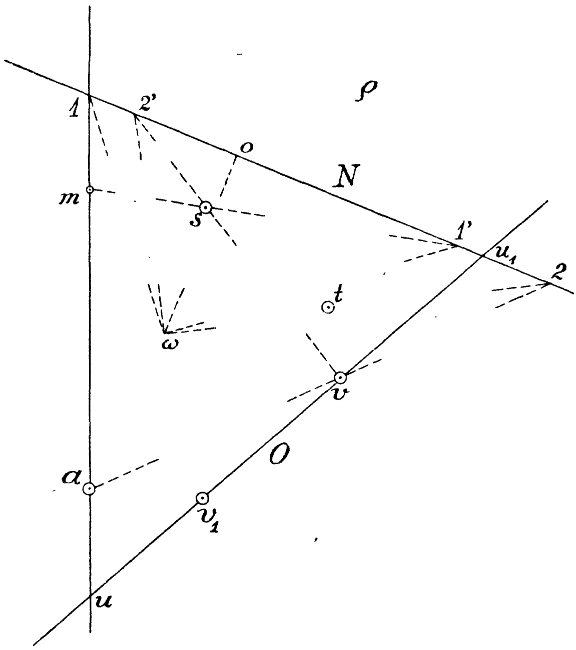
Položme rovinu ϱ přímkou N a bodem a. Rovina ϱ protne žádanou plochu φ^2 v reálné kuželosečce K, která prochází bodem a, průsečíkem $(\varrho P) \equiv m$, a imaginárnými body c, d. Body a, m, c, d určují svazek kuželoseček Σ, v němž křivka K jest obsažena. Obdobně rovina $\sigma \equiv (bS)$ protne plochu φ^2 v reálné kuželosečce L, která prochází bodem b, průsečíkem $(\sigma P) \equiv n$, a imaginárnými body e, f. Body b, n, e, f určují svazek kuželoseček Σ'. Roviny ϱ, σ protínají se v přímce O, z níž svazky Σ, Σ' vytínají involuce bodové I, I' jichž společná družina x, y dá společné průsečíky křivek K, L. Jsou-li tyto sestrojeny, lze kuželosečku K konstruovati v rovině ϱ z bodů a, m, c, d, x, a

---

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy II, str. 11., odst. 112. na pravo.

kuželosečku L v rovině σ z bodů b, n, e, f, x (K, L procházejí pak nutně i bodem y), načež řídícími útvary K, L, P je sborcená plocha φ^2 stanovena, ježto křivky K, L protínají se v bodech x, y, přímka pak P seče K, L v bodech m, resp. n.

Družinu xy sestrojíme takto: Budiž rovina ϱ nákresnou (obr. 1.), v ní body a, m, elliptická involuce bodová na přímce N daná středem svým o a potencí $= -\overline{o\omega}^2$ ($\overline{o\omega} \perp N$), a



Obr. 1.

přímka $O \equiv \overline{\varrho\sigma}$. Úlohou jest stanoviti involuci I, kterou z přímky O vytíná svazek kuželoseček Σ, určený reálnými body a, m a imaginárnými body samodružnými c, d involuce dané na přímce N. Přímky $\overline{am}$, $\overline{cd} \equiv N$, skládajíce jednu zvrhlou kuželosečku svazku Σ, vytínají z přímky O jednu družinu uu_1 involuce I. Abychom stanovili ještě druhou vv_1, zvolme kdekoli bod, na př. v na O, proložme body a, m, c, d, v kuželosečku R a stanovme její druhý průsečík v_1 s přímkou O. Kuželosečky R netřeba rýsovati.

Spojnice $\overline{am}$, $\overline{av}$ sekou přímku N v bodech 1, 2; ustanovme body s nimi (v involuci N) sdružené

$$1', 2' \; (\overline{\omega 1'} \perp \overline{1\omega}, \; \overline{\omega 2'} \perp \overline{\omega 2})$$

a spojme $\overline{1'm}$, $\overline{2'v}$; průsečík těchto spojnic s dá další bod kuželosečky R [1]); bod s je průmětem bodu a na křivku R z pólu poláry N. Opatřme si obdobně ještě jeden bod t křivky R, která je nyní určena pěti body reálnými a, m, s, t, v, tak že větou Paskalovou můžeme snadno určiti bod šestý v_1 na paprsku O procházejícím bodem v. Involuce I je stanovena družinami uu_1 vv_1. Týmž způsobem sestrojíme dvě družiny involuce I', kterou na téže přímce O vytvořuje kuželosečka L, dále pak společnou družinu x, y obou involucí I, I' konstrukcí známou [2]). Posléze sestrojíme v rovině ϱ kuželosečku K z reálných bodů a, m, x a sdružených imaginárných c, d [3]), dále kuželosečku L z reálných bodů b, n, x a sdružených imaginárných e, f. Jsou-li však body x, y imaginárné, sestrojíme K z reálného bodu a, a z imaginárných bodů c, d, x, y podvojně sdružených [4]) a obdobně L.

Křivkami K, L, jež protínají se v bodech x, y (reáln. č. imag.) a přímkou P, která křivky seče v bodech m, resp. n, je žádaná sborcená plocha φ^2 určena. Z každého bodu g. na přímce P zvoleného, jde (mimo P, $\overline{gx}$, $\overline{gy}$) jedna přímka, která protínajíc kuželosečky K, L, ploše φ^2 jako površka náleží.

3. *Sborcená plocha 2. stupně daná jednou přímkou P, dvěma reálnými α, β a čtyřmi imaginárnými tečnými rovinami, z nichž dvě γ, δ, spolu sdružené, dány jsou elliptickou involucí*

---

1) Známá to konstrukce kuželosečky ze tří bodů reálných a, m, v a dvou imaginárně sdružených c, d (Jarolímek, Geom. polohy II, str. 11).

2) Jar., Geom. polohy II, 14. Promítneme involuce I, I' na libovolnou kružnici U z kterékoli bodu jejího τ, stanovíme středy ε, φ involucí vzniklých na U a průsečíky ξ, η spojnice $\overline{\varepsilon\varphi}$ na U, a promítneme body ξ, η z bodu τ na přímku O do bodů x, y. Jsou-li však body ξ, η, tudíž také x, y imaginárné, určíme pól δ kružnice U k poláře $\overline{\varepsilon\varphi}$, vedeme jím dvě sečny ke kružnici U a průsečíky promítneme z bodu τ na přímku O; tím zjednány jsou dvě družiny elliptické involuce na přímce O, která určuje s dostatek body x, y jakožto imaginárné své body samodružné. Je to táž involuce harmonických pólů, kterou obě křivky K, L na O vytvořují.

3) G. P. II, 11. na levo.

4) G. P. II, 13.

rovinovou na ose N, a dvě sdružené ε, φ, elliptickou involucí rovinovou na ose S. Tato úloha duální řeší se celkem konstrukcí reciprokou, ale s jistou odchylkou, protože konstrukce, která v úloze 2. byla provedena *v rovině* ϱ, nelze vykonati v reciprokém *bodě* r.

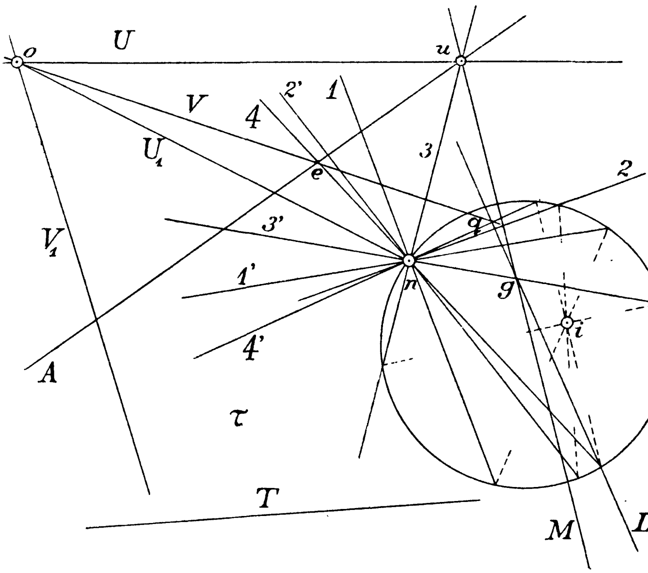
Stanovme průsečík r roviny α s přímkou N. Z bodu r promítá se žádaná plocha φ^2 reálným kuželem $\varkappa$, který se dotýká roviny α, roviny $(rP) \equiv \mu$, a imaginárných rovin γ, δ. Roviny α, μ, γ, δ, jdoucí bodem r (jakožto tečné), určují osnovu kuželů Ω [1]). Obdobně z bodu $s \equiv (\beta S)$ promítá se plocha φ^2 reálným kuželem λ, který se dotýká roviny β, roviny $(sP) \equiv \nu$, a imaginárných rovin ε, φ. Roviny β, ν, ε, φ určují osnovu kuželů Ω'.

Spojnice bodů $\overline{rs} \equiv O$ promítá osnovy kuželů Ω, Ω' dvěma involucemi rovinovými I, I', jichž společná družina ξ, η dá společné tečné roviny kuželů $\varkappa$, λ. Jsou-li tyto roviny sestrojeny, lze kužel $\varkappa$ konstruovati z vrcholu r tak, aby se dotýkal rovin α, μ, γ, δ, ξ, a kužel λ z vrcholu s tak, aby se dotýkal rovin β, ν, ε, φ, ξ, načež řídícími útvary $\varkappa$, λ, P je sborcená plocha φ^2 stanovena, ježto $\varkappa$, λ dotýkají se rovin ξ, η (tedy i ve dvou bodech navzájem), přímka pak P dotýká se kuželů $\varkappa$, λ, ležíc v rovinách μ, ν.

Družinu ξ, η sestrojíme takto: Protněme roviny α, μ, γ, δ, určující osnovu kuželů Ω, libovolnou rovinou τ, která neobsahuje vrcholu r, v přímkách A, M a imag. C, D. Involuce $(\gamma\delta)$ buď dána dvěma družinami rovinovými na ose N, jichž průsečnice s rovinou τ (obr. 2., kdež rovina λ zvolena nákresnou) buďtež $11'$, $22'$; tyto procházejí průsečíkem $(N\tau) \equiv n$. Imaginárné samodružné paprsky involuce $11'$. $22'$ jsou přímky C, D. Protněme tuto involuci kružnicí jdoucí bodem n a stanovme střed i involuce vzniklé na kružnici. Rovina τ seče dále přímku O v bodě o a osnovu kuželů Ω v osnově kuželoseček Γ, určené základnicemi (tečnami) A, M, C, D. Involuci rovinovou I, kterou se osnova Γ promítá z přímky O, stanovíme involucí paprskovou J, ve které τ seče I; J promítá osnovu kuželoseček Γ z bodu o.

[1]) Osnovou kuželů jmenujeme soustavu kuželů 2. stupně dotýkajících se čtyř rovin, jež procházejí jedním bodem.

Průsečíky $(AM) \equiv u$, $(CD) \equiv n$ tvoří spolu jednu zvrhlou kuželosečku v osnově Γ; spojnice $\overline{ou} \equiv U$, $\overline{on} \equiv U_1$ dají tedy jednu družinu involuce J. Abychom stanovili ještě jednu VV_1, zvolme kdekoli přímku, na př. V vedenou bodem o, sestrojme ku přímkám A, M, C, D, V tečnou kuželosečku R a stanovme její druhou tečnu V_1 z bodu o. Avšak křivky R netřeba rýsovati. Průsečíky $(AM) \equiv u$, $(AV) \equiv e$ promítají se z bodu n paprsky 3, 4; ustanovme k nim paprsky sdružené (v involuci n)



Obr. 2.

3'. 4' (pomocí středu i a kružnice), a průsečíky $(3'M) \equiv g$, $(4'V) \equiv q$; spojnice bodů $\overline{gq} \equiv L$ dá další tečnu kuželosečky R [1]). Opatřme si obdobně ještě jednu tečnu T křivky R, která je nyní určena pěti tečnami reálnými A, M, L, T, V, tak že větou Brianchonovou lze snadno sestrojiti šestou tečnu V_1 jdoucí bodem o, jenž leží na tečně V. Paprsková involuce J je stano-

---

[1]) Známá to konstrukce kuželosečky ze tří tečen reálných A, M, V a dvou imaginárně sdružených C, D (Jar. Geom. pol. II, 11, na pravo).

vena družinami UU_1, VV_1 a involuce rovinová I družinami (OU), (OU_1); (OV), (OV_1). Týmž způsobem sestrojíme dvě družiny involuce I', kterou na téže přímce O vytvořuje kužel λ, dále pak společnou družinu ξ, η obou involucí I, I' pomocí proniku s libovolnou přímkou Z, která s O je mimoběžna.

Posléze sestrojíme kužel $\varkappa$ z vrcholu r, reálných tečných rovin α, μ, ξ a sdruž. imag. γ, δ, dále kužel λ z vrcholu r, reálných tečných rovin β, ν, ξ a sdruž. imag. ε, φ. Jsou-li však roviny ξ, η imaginárné, sestrojíme $\varkappa$ z reálné tečné roviny α a imag. tečných rovin γ, δ, ξ, η podvojně sdružených (pomocí průseku s libovolnou rovinou), a obdobně kužel λ.

Kuželi $\varkappa$, λ, jež mají dvě společné roviny tečné ξ, η (reálné č. imag.) a přímkou P, která se dotýká obou kuželů, ležíc v rovinách μ a ν, je žádaná plocha φ^2 stanovena. Každým bodem přímky P lze proložiti ještě další dvě tečné roviny ke kuželům $\varkappa$, λ, jichž společná průsečnice, dotýkajíc se obou kuželů, ploše φ^2 jako površka náleží.

4. *Sborcená plocha 2. stupně buď dána třemi mimoběžkami, z nichž dvě jsou imaginárně sdružené.* Reálná buď A, imaginárné B, C buďtež stanoveny takto: na dané sborcené ploše 2. stupně ψ^2 jsou dány dvě dvojiny površek téže soustavy MM_1, NN_1, které se rozdělují; jimi je určena elliptická involuce I površek, jejíž imaginárné přímky samodružné buďtež B, C.

Libovolná rovina σ položená přímkou A protne plochu ψ^2 v kuželosečce K, která prochází průsečíky $(M\sigma) \equiv m$, $(M_1\sigma) \equiv m_1$, $(N\sigma) \equiv n$, $(N_1\sigma) \equiv n_1$. Družiny mm_1, nn_1 určují na K elliptickou involuci bodovou J, ve které rovina σ seče paprskovou involuci sborcenou I. Imaginárné samodružné body b, c involuce J leží na involuční ose O; tuto obdržíme, stanovíme-li průsečíky spojnic $(\overline{mn}, \overline{m_1n_1}) \equiv u$, $(\overline{mn_1}, \overline{m_1n}) \equiv v$ a spojíme $\overline{uv} \equiv O$. Tato reálná přímka O spojuje imaginárné body b, c, a seče přímku A v určitém bodě a. Přímka O tudíž protínajíc přímky A, B, C v bodech a, b, c, je površkou žádané plochy φ^2. Další dvě roviny proložené přímkou A dají obdobným způsobem površky Q, R, načež plocha φ^2 z reálných řídících přímek O, Q, R se sestrojí.