Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Kadeřávek

O kuželosečkových plochách translačních. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 32--38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123721`

Přímky vrcholové s našich paraboloidů sekou základní přímky δ, δ_1, a tvoří tedy lineární kongruenci.

Z (11) plyne dále geometrický význam parametru λ

$$\lambda = \operatorname{tg}(s, z),$$

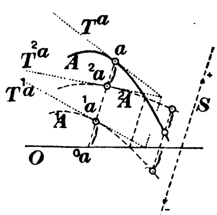
jako tangenty úhlu, jejž přímka s svírá s osou Oz; *„veličina λ rovná se kotangentě úhlu vrcholových přímek s, s_1“.*

(Pokračování.)

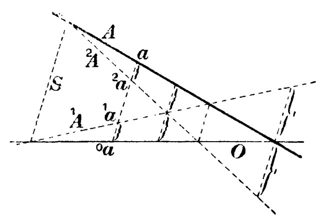
O kuželosečkových plochách translačních.

Napsal Dr. **Frant. Kadeřávek.**

Účelem tohoto článku jest podání jednoduchých důkazů geometrických a vysvětlení známých povětšině vět o translačních plochách kuželosečkových. K cíli tomu odvozeny úvodem některé jednoduché věty pomocné.



Obr. 1.



Obr. 2.

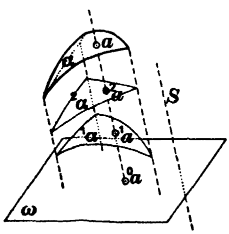
Buďtež dány dvě křivky (obr. 1.) ${}^1A$, ${}^2A$, přímka O a směr S. Sestrojme z křivek ${}^1A$, ${}^2A$ novou křivku A způsobem následním: Veďme libovolnou přímku rovnoběžnou s S, vyhledejme její průsečíky ${}^0a$, ${}^1a$, ${}^2a$, s přímkou O a s křivkami ${}^1A$, ${}^2A$ a učiňme $\overline{{}^0a\,a} = \overline{{}^0a\,{}^1a} + \overline{{}^0a\,{}^2a}$. Bod a náleží křivce A, již nazývejme krátce *součet* křivek ${}^1A$, ${}^2A$ směrem S při základně O; $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{S,O}$. Z obr. 2. patrno, že

1. *součet dvou přímek ${}^1A\,{}^2A$ směrem S a při základně O jest opět přímka A*; $({}^1A + {}^2A)_{S,O} \equiv A$.

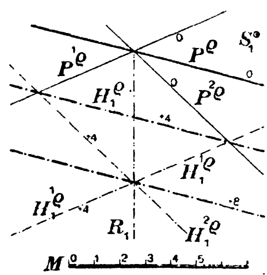
Vytkneme-li v obr. 1. k paprsku $\overline{{}^0a\,a}$ nekonečně blízký a rovnoběžný s S a označíme-li jeho průsečíky s O, ${}^1A$, ${}^2A$, A

písmenami ${}^0a'$, ${}^1a'$, ${}^2a'$, a', tu bude předně $\overline{{}^0a'a'} = \overline{{}^0a'{}^1a'} + \overline{{}^0a'{}^2a'}$, dále $\overline{{}^1a{}^1a'} \equiv T^{1a}$ tečna křivky ${}^1A$ v bodě ${}^1a$, $\overline{{}^2a{}^2a'} \equiv T^{2a}$ 2. tečna křivky ${}^2A$ v bodě ${}^2a$ a *součet* $T^a \equiv (T^{1a} + T^{2a})_{S,\,o} \equiv \overline{aa'}$ *tečna součtu* $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{S,\,o}$.

Rozšíříme-li pojem uvedený sečítání na prostor, nazveme plochu α (obr. 3.) *součtem* ploch ${}^1\alpha$ ${}^2\alpha$ směrem S a při základní rovině ω, — $\alpha \equiv ({}^1\alpha + {}^2\alpha)_{S,\,\omega}$ —, je-li plocha α geom místem bodů a, jež stanovíme, když provedeme libovolný paprsek rovnoběžný k S, vyhledáme jeho průsečíky ${}^0a$, ${}^1a$, ${}^2a$ s ω, ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ a učiníme $\overline{{}^0aa} = \overline{{}^0a{}^1a} + \overline{{}^0a{}^2a}$. Ježto součet dvou přímek jest vždy přímka,



Obr. 3.



Obr. 4

3. musí *součet dvou rovin* obsahovati ve všech se směrem sčítání S rovnoběžných rovinách přímky, tedy *musí býti rovinou.* V obr. 4. zvolena základní rovina ω za průmětnu při promítání rovnoběžném se směrem S sčítání a určeny dvě roviny ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ stopami $P^{1\varrho}$, $P^{2\varrho}$ a hlavními přímkami $H^{1\varrho}$, $H^{2\varrho}$ výměry rovné 4. jednotkám měřítka M. Spojnice průsečíků $(P^{1\varrho}, H^{2\varrho})$ a $(P^{2\varrho}, H^{1\varrho})$ je průmět hlavní přímky H^ϱ součtu $\varrho \equiv ({}^1\varrho + {}^2\varrho)_{S,\,\omega}$ výměry 4; stopa P^ϱ roviny ϱ jde průsečíkem stop rovnoběžně k H^ϱ a tvoří s těmito a průmětem R_1 průsečnice rovin ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ čtveřinu harmonickou.

Určeme v sečítání, daném základní rovinou ω a směrem S součet ϱ rovin ${}^1\varrho$ a ${}^2\varrho$ a vytkněme válec $\varkappa$ druhého stupně, rovnoběžný se směrem S. Označme průsečnice válce $\varkappa$ s ω, ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ a ϱ písmenami ${}^0A$, ${}^1A$, ${}^2A$, A. Jest patrno, že $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{S\omega}$. Promítneme-li celek do roviny kolmé k ω a ${}^1\varrho$

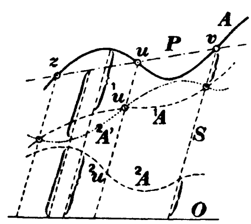
orthogonálně, promítnou se křivky ${}^0A$, ${}^1A$ do přímek O_1, ${}^1A_1$ křivky ${}^2A$, A do kuželoseček ${}^2A_1$, A_1; $A_1 \equiv ({}^1A_1 + {}^2A_1)_{S_1, O_1}$.

4. *Součet přímky s kuželosečkou směrem S a při základně O dá kuželosečku.*

Zvolíme-li místo válce stupně druhého válec n-tého stupně, přesvědčíme se, že

5. *součet přímky s křivkou n-tého stupně jest opět křivka n-tého stupně.*

Zavedeme-li v uvedené úvaze průmětnu kolmou pouze k rovině ω, tu jedině křivka ${}^0A$ promítne se orthogonálně do přímky O_1, křivky ${}^1A$, ${}^2A$, A dají průměty ${}^1A_1$, ${}^2A_1$, A_1, mající společné tečny, rovnoběžné s S_1. Z toho patrno, že



Obr. 5.

6. *součet dvou kuželoseček téhož druhu, majících společné tečny rovnoběžné k směru sčítání, jest opět kuželosečka téhož druhu a týchž tečen se dotýkající.*

Na základě této věty možno tvrditi, že

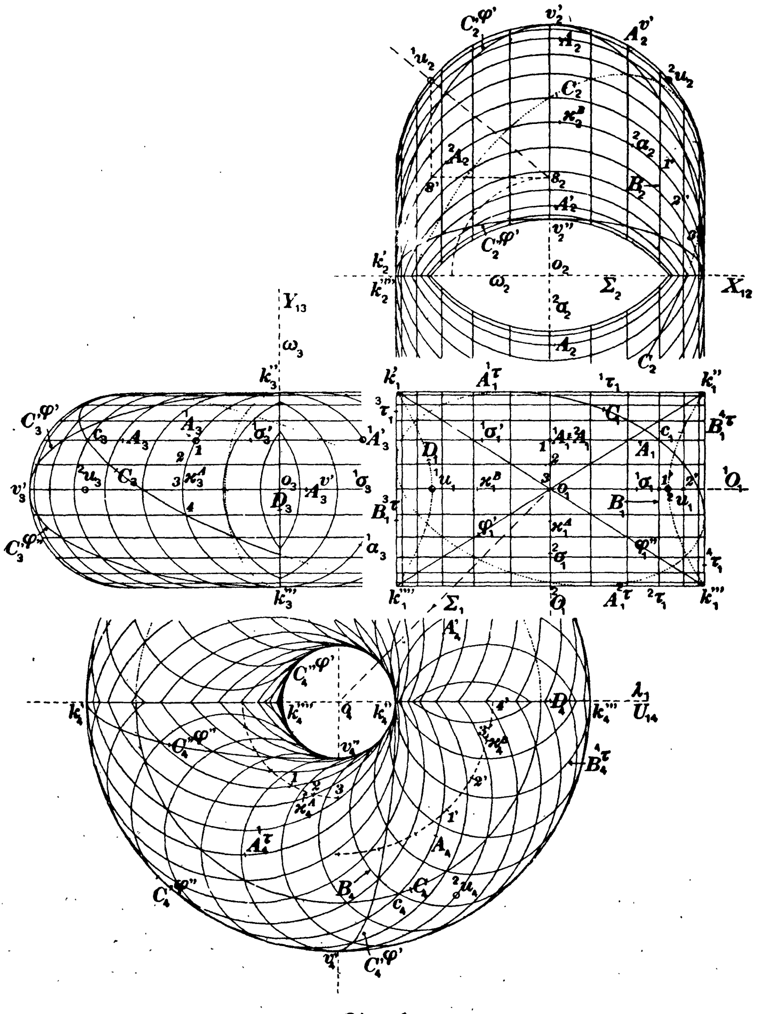
7. *součet směrem S a při základní rovině ω roviny a plochy stupně druhého jest plocha druhého stupně*;

8. *součet dvou ploch 2^0, majících společný tečný válec rovnoběžný se směrem sčítání, jest opět plocha stupně druhého* téhož válce se dotýkající.

Vraťme se k obr. 3. Plochy ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, α v soumezí bodů ${}^1a$, ${}^2a$, a lze nahraditi tečnými rovinami τ^{1a}, τ^{2a}, τ^a.

9. Snadno bychom dovodili, že $\tau^a \equiv (\tau^{1a} + \tau^{2a})_{S, \omega}$.

Jsou-li dány dvě křivky ${}^1A$, ${}^2A$ stupně n a m-tého, tu stupeň součtu $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{O, S}$ (obr. 5) určíme takto: Vytkněme libovolnou přímku P, stanovme ${}^2A' \equiv (P - {}^2A)_{S, O}$. ${}^2A$ jest křivka stupně m-tého a protíná křivku ${}^1A$ n-tého stupně v $n\,m$ bodech; každý tento průsečík vede však k bodu součtu A položenému v přímce P. Protíná tedy přímka P křivku A v $n\,m$ bodech.



Obr. 6.

10. *Součet dvou křivek stupňů n a m jest obecně křivka stupně $n\,m$-tého.*

11. *Součet dvou ploch stupně n a m-tého jest obecně plocha n m-tého stupně.*

Jest proto součet dvou libovolně k směru sčítání umístěných ploch 2° *plocha stupně čtvrtého*; z těchto ploch součtových povšimněme si v prvé řadě oné, která vznikne sečtením dvou rotačních válců $^1\alpha$, $^2\alpha$, jejichž osy $^1O \perp {^2O}$ se protínají v bodě o. Směr sčítání S buď kolmý k základní rovině $\omega \equiv (^1O\,^2O)$, již zároveň zvolme za prvou průmětnu (obr. 6.).

1*a*. Plocha $\alpha \equiv (^1\alpha + {^2\alpha})_{S,\omega}$ jest *souměrna k rovinám* ω, $^1\sigma$, $^2\sigma$ *a středově souměrna dle bodu* o, poněvadž plochy $^1\alpha$, $^2\alpha$ jsou vzhledem k týmž rovinám orthogonálně souměrny (obr. 6.).

Rovinou $^1\sigma' \parallel {^1\sigma}$ proťat jest válec $^1\alpha$ ve dvou přímkách $^1A \parallel {^1A'} \parallel \omega$; válec $^2\alpha$ v kružnici ^2A, součet těchto útvarů jsou dvě kružnice A, $A' \overline{\overline{\frown}}\, {^2A}$ plochy α. Podél přímky ^1A dotýká se válce $^1\alpha$ rovina; její součet s válcem $^2\alpha$ dává válec, který se plochy α podél kružnice A dotýká. Podobně v rovinách rovnoběžných s $^2\sigma$ najdeme kružnice B plochy α. Z toho patrno:

2*a*. Na ploše α jsou dvě soustavy kružnic shodných; položených v rovinách rovnoběžných s $^1\sigma$ a $^2\sigma$; v každé z těchto rovin leží dvě kružnice téže soustavy, podél nich dotýkají se plochy α válce, jejichž povrchové přímky jsou tečnami kružnic druhé soustavy.

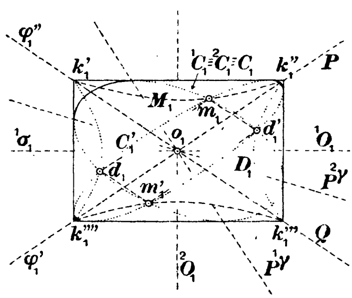
3*a*. V rovinách $^1\tau$, $^2\tau$, $^3\tau$, $^4\tau$ ležící dvojiny kružnic spadají v kružnici jedinou; $A^{1\tau}$, $A^{2\tau}$, $B^{3\tau}$, $B^{4\tau}$. Podél celých těchto kružnic dotýkají se roviny $^1\tau$, $^2\tau$, $^3\tau$, $^4\tau$ plochy α.

4*a*. Plochu α možno vytvořiti též *translací*, poněvadž obsahuje dva systemy křivek shodných v rovinách rovnoběžných.

Ellipsu, vepsanou do obdélníkového obrysu $k_1' k_1'' k_1''' k_1''''$ plochy α (obr. 7.) lze pokládati za průmět $^1C_1$ křivky ^1C válce $^1\alpha$ (o ose ^1O), položené v rovině $^1\gamma$ o stopě $P^1\gamma$; touž křivku lze však pokládati za průmět $^2C_1$ povrchové křivky ^2C válce $^2\alpha$ (o ose ^2O), položené v rovině $^2\gamma$, jejíž stopa je $P^2\gamma$. Křivky ^1C, ^2C leží na témž válci ve směru sčítaní $S \perp \omega \equiv (^1O, {^2O})$, jest proto součet jejich ellipsa C plochy α, položená v rovině, jejíž stopa jde průsečíkem stop $P^1\gamma$, $P^2\gamma$, to jest bodem o.

5*a*. Na ploše α jsou položeny ellipsy C, a to v určitých rovinách, jdoucích středem o.

6*a*. Vytkneme-li libovolnou kružnici A plochy α (obr. 6.) a udělíme-li jí rovnoměrný pohyb po ploše, bude se její střed $s^A \equiv 1$ kol osy ${}^1O$ rovnoměrně otáčeti; půdorys A_1 pak bude kývati okolo přímky ${}^1O_1$. Pohybuje-li se též křivka B rovnoměrně po ploše α, a to tak, aby současně s křivkou A celou plochu α prošla, tu její střed $s^B \equiv 1'$ otáčí se rovnoměrně kol osy ${}^2O$ — stejnou úhlovou rychlostí jako bod s^A okolo osy ${}^1O$ — a půdorys B_1 kýve kol přímky ${}^2O_1$. Označíme-li průsečík přímek $A_1 B_1$ písmenou c_1, tu vytvoří bod c_1 ellipsu, vepsanou do obdélníka, určeného krajními polohami $A_1^{1\tau}$ $A_1^{2\tau}$, $B_1^{3\tau}$, $B_1^{4\tau}$ kmitajících přímek A_1, B_1*); *lze proto křivku C na ploše α vytvořiti průsečíkem v ploše α se rovnoměrně pohybujících kružnic A, B různých soustav.*



Obr. 7.

7*a*. Rozdělíme-li kružnice $\varkappa^A$, $\varkappa^B$, vyplněné středy kružnic A, B body 1, 2, 3 ... 1', 2', 3' ... na stejný počet stejných dílů (v obr. 6. na 24 díly), vytkneme tím na ploše systém čtyřúhelníků; *jimiž procházejí křivky C diagonálně.*

8*a*. Směrem Σ, položeným v rovině os ${}^1O$, ${}^2O$ a s těmito stejné úhly (45°) svírajícím, promítají se veškery kružnice plochy α do čtvrté průmětny $\lambda \| \nu$ do křivek kruhových s původními shodných. Soustředné kružnice $\varkappa^A$, $\varkappa^B$ dávají opět soustředné

*) Označíme-li poloměry kružnic A, B písmenami a, b, a je-li ${}^2O_1 \equiv X$, ${}^1O_1 \equiv Y$, pak jednotlivé polohy přímek A_1, B_1 jsou dány výrazy $x = b \cos\varphi$, $y = a \cos(\varphi + \varepsilon)$, z nichž vyloučením φ dostaneme rovnici křivky bodu c_1:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{xy}{ba} \cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon.$$

průměty a i rozdělení jejich body $1, 2, 3 \ldots 1', 2', 3' \ldots$ na díly stejné zůstává nedotčeno promítnutím. Z toho patrno, že *obrys 4 průmětu plochy α jsou dvě soustředné kružnice $C'_4{}^{\varphi''}$, $C''_4{}^{\varphi'}$*, průměty to dvou křivek systému (C) položených v rovinách $\varphi' \perp \pi$, $\varphi'' \perp \pi$ (obr. 6.).

9*a*. Z obr. 6. též patrno, že i *část křivek soustavy* (C) *promítne se* do 4 průmětny *do kružnic soustředných* o společném středu O_4, *druhá část* pak *do ellips soustředných a shodných* $(C''_4{}^{\varphi''} \cong C'_4{}^{\varphi'})$.

10*a*. Z toho patrno, že i *křivky systému* (C) *je vhodno rozděliti na dvě podsoustavy*; jedny procházejí jedním, druhé druhým směrem diagonálně v čtyřúhelnících v ploše α vytknutých; *křivky téže podsoustavy se neprotínají a dávají ve 4 průmětu shodné průměty.*

11*a*. Válce ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ (obr. 6. i 7.) protínají se v prostorové křivce stupně 4 : ${}^{12}D$; její průmět do roviny $\omega \equiv ({}^1O, {}^2O)$ jest rovnoosá hyperbola D_1. Sčítáme-li válce ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, tu body křivky ${}^{12}D$ ležící na větvi nad rovinou ω a čítané jednou k ${}^1\alpha$, podruhé ku ${}^2\alpha$, dávají body křivky $D' \equiv ({}^{12}D + {}^{12}D)$ stupně 4, affinní k ${}^{12}D$ dle ω v poměru $2:1$. Body křivky ${}^{12}D$ souměrné k ω dávají alg. součet souřadnic rovný 0, jest proto alg. součet $D \equiv ({}^{12}D - {}^{12}D)$ *hyperbola rovnoosá* $D \equiv D_1$ jedinou v rovině ω položenou kuželosečkou plochy α a proto její *křivkou dvojnou.*

Jsou-li válce ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ shodné, rozpadne se hyperbola D ve dvě přímky; plocha α má pak dvě přímky dvojné.

Pronik plochy α s libovolnou rovinou φ stanovíme následně: Plocha α je součtem dvou válců ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$; vyhledejme válec ${}^2\alpha' \equiv (\varphi - {}^2\alpha)$ a jeho průsečnou křivku ${}^{12}K'$ s válcem ${}^1\alpha$ jakož i průsečnou křivku ${}^2K$ promítajícího válce křivky ${}^{12}K'$ s plochou ${}^2\alpha$; součet $K \equiv ({}^{12}K' + {}^2K)_{S,\omega}$ křivek ${}^{12}K'$ a ${}^2K$ dá křivku čtvrtého stupně v rovině φ náležející ploše α. Z toho patrno:

12*a*. Plocha α je 4 stupně; průmět průsečné křivky plochy α s libovolnou rovinou φ do roviny ω stotožňuje se s průmětem průsečné křivky plochy ${}^1\alpha$ s plochou $(\varphi - {}^2\alpha)$ [nebo válce ${}^2\alpha$ s válcem $(\varphi - {}^1\alpha)$]. (Dokončení.)