Bohumil Bydžovský

Křivky rovinné stupně 2n-ho s třemi body n-násobnými

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 1--16

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123718`

Křivky rovinné stupně 2n-ho s třemi body n-násobnými.

Píše B. Bydžovský.

O křivce čtvrtého stupně s třemi body dvojnásobnými platí věta, často dokázaná,[1]) že tečné v bodech dvojnásobných (počtem šest) dotýkají se téže kuželosečky, takže pěti z nich šestá je určena. Nalezl jsem obecnou větu, jež platí pro křivky stupně $2n$-ho s třemi body n-násobnými a jejímž zvláštním případem je věta právě vyslovená. Odvození této věty a důsledkům z ní plynoucím věnovány jsou tyto řádky.

I.

1. Vlastnímu důkazu budiž předeslána přípravná úvaha: protněme rovinnou křivku K_n stupně n-ho přímkami a, b, c trojstranu, jehož žádný vrchol neleží na křivce. Tak vzniknou tři skupiny po n průsečících na každé přímce. Takové tři skupiny bodů nejsou zcela libovolné: zvolíme-li totiž na třech přímkách po n bodech, netvoří tyto tři skupiny obecně úplnou soustavu průsečíků křivky stupně n-ho s těmito třemi přímkami. To plyne — vzhledem k tomu, že tyto tři přímky tvoří čáru třetího stupně — ze známých vět o průsečících křivek, lze však tuto věc ihned nahlédnouti takto: vezměme dané tři přímky za osy souřadné. Rovnici

[1]) V. na př. K. Petr: „O racionálních křivkách čtvrtého stupně“ str. 19. Tento časopis roč. XXXII. (1903).

křivky stupně n-ho lze psáti ve tvaru

$$a_n x_1^n + b_n x_2^n + c_n x_3^n + \sum_h \sum_k a_{hk} x_h x_k + x_1 x_2 x_3 f.(x_i) = 0$$

kde f_i je výraz stupně (n-3)ho v souřadnicích. Skupiny bodové, v nichž křivka protíná jednotlivé osy, jsou dány rovnicemi:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{na ose } x_1 = 0 & b_n x_2^n + c_n x_3^n + \ldots = 0 \\ \text{„ „ } x_2 = 0 & a_n x_1^n + c_n x_3^n + \ldots = 0 \\ \text{„ „ } x_3 = 0 & a_n x_1^n + b_n x_2^n + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

kde členy naznačené vytečkováním jsou v každé rovnici jiné. Pozorujeme však, že členy nejvyšších stupňů mají ve všech rovnicích tytéž koefficienty.

Jsou-li tedy dány tři skupiny po n bodech na jednotlivých osách rovnicemi:

$$\begin{array}{ll} \text{na ose } x_1 = 0 & b^n_{2,3} \equiv b_0 x_2^n + b_1 x_2^{n-1} x_3 + \ldots + b_n x_3^n = 0 \\ \text{„ „ } x_2 = 0 & c^n_{3,1} \equiv c_0 x_3^n + c_1 x_3^{n-1} x_1 + \ldots + c_n x_1^n = 0 \\ \text{„ „ } x_3 = 0 & a^n_{1,2} \equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n = 0 \end{array}$$

a mají-li tyto tři skupiny tvořiti úplnou soustavu průsečíků s *křivkou stupně n-ho*, musí býti možno uvésti je na tvar hořejších tří rovnic, totiž učiniti koefficienty při n-tých mocninách téže proměnné stejné. Aby v $b^n_{2,3}$, $c^n_{3,1}$ byly stejné koefficienty při x_3^n, k tomu stačí násobiti první c_0, druhou b_n, takže společný koefficient je pak $b_n c_0$; ježto x_2^n v prvé rovnici má pak koefficient $b_0 c_0$, x_1^n ve druhé koefficient $b_n c_n$, musí ve třetí rovnici

$$a_0 : a_n = b_n c_n : b_0 c_0.$$

Tato podmínka pak stačí, ježto rovnice

$$b_n c_n x_1^n + b_n c_0 x_3^n + \ldots = 0$$

udává potom křivku n-ho stupně protínající trojstran v daných třech skupinách bodů. Nalezená podmínka ukazuje, že ve třetí rovnici poměr dvou koefficientů je ostatními určen; to znamená, že z n bodů skupiny touto rovnicí vyjádřené jen (n-1) je libovolných; bod n-tý je určen požadavkem výše vysloveným. Z důkazu zároveň vysvítá, že — je-li žádaná podmínka splněna — každá křivka st. n-ho obsahující $3n - 1$ z daných $3n$ obsahuje také zbývající.

2. Vyslovíme větu duální: Tři skupiny po n paprscích procházející vrcholy trojstranu netvoří obecně úplnou soustavu

tečen vedených z těchto vrcholů ke křivce n-té třídy. Aby tomn tak bylo, musí býti vyplněna jedna podmínka; pak $(3n - 1)$ paprsků je libovolných, ale $3n$-tý je jimi určen. Každá křivka n-té třídy, která se dotýká $3n - 1$ z nich, dotýká se také zbývajícího.

3. Promítneme každou ze tří skupin z protějšího vrcholu trojstranu n paprsky. Tyto tři svazky paprsků jsou dány ovšem také rovnicemi I. Budiž na př.

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

rovnice jednoho tohoto paprsku jdoucího vrcholem (1, 0, 0); zavedeme-li přímkové souřadnice ξ_i obvyklým způsobem, totiž tak, aby rovnice incidence zněla

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

pak pro souřadnice onoho paprsku platí

$$\xi_2 : \xi_3 = \alpha_2 : \alpha_3 \text{ t. j.}$$
$$\xi_2 : \xi_3 = - x_3 : x_2$$

A tak ovšem pro každý paprsek vrcholem (1, 0, 0). Podobně platí pro každý paprsek svazku o vrcholu (0, 1, 0):

$$\xi_1 : \xi_3 = - x_3 : x_1$$

a vrcholu (0, 0, 1):

$$\xi_1 : \xi_2 = - x_2 : x_1.$$

Obdržíme tedy z rovnic (I) ihned rovnice, jimž vyhovují souřadnice paprsků, jež promítají tři skupiny bodů, když do nich dosadíme dle napsaných úměr; obdržíme rovnice

$$\left.\begin{array}{l} b_n \xi_3^n + (-1)^n c_n \xi_2^n + \ldots = 0 \\ a_n \xi_3^n + (-1)^n c_n \xi_1^n + \ldots = 0 \\ a_n \xi_2^n + (-1)^n b_n \xi_1^n + \ldots = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Rozeznávejme dva případy:

a) n je sudé. Pak rovnice (II) nabudou tvaru:

$$\begin{array}{l} b_n \xi_3^n + c_n \xi_2^n + \ldots = 0 \\ a_n \xi_3^n + c_n \xi_1^n + \ldots = 0 \\ a_n \xi_2^n + b_n \xi_1^n + \ldots = 0 \end{array}$$

Násobíme-li první rovnici a_n, druhou b_n, třetí c_n, obdržíme:

$$
\begin{aligned}
a_n b_n \xi_3^n + a_n c_n \xi_2^n + \ldots &= 0 \\
a_n b_n \xi_3^n + b_n c_n \xi_1^n + \ldots &= 0 \\
a_n c_n \xi_2^n + b_n c_n \xi_1^n + \ldots &= 0
\end{aligned}
$$

t. j., u n-tých mocnin téže proměnné tytéž koefficienty. Uvažujme křivku, jejíž rovnice v souřadnicích přímkových je

$$b_n c_n \xi_1^n + a_n c_n \xi_2^n + c_n b_n \xi_3^n + \ldots + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f(\xi_i) = 0,$$

kde $f(\xi_i)$ je výraz stupně $(n-3)$-ho a tečkami je vyznačen součet členů, jež rovněž tečkami jsou naznačeny v rovnicích (II). Souřadnice tečen vedených k této křivce z vrcholů trojstranu se obdrží, když do její rovnice se dosadí postupně $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; ale pak se obdrží právě rovnice (II). Máme větu:

Průsečíky křivky stupně n-ho s trojstranem mají pro n sudé tuto vlastnost: promítneme-li vždy ty, jež leží na téže straně, z protějšího rohu, obdržíme 3n paprsků, jež se dotýkají téže křivky třídy n-té.

b) n liché. Rovnice (II) pak mají tvar

$$
\begin{aligned}
b_n \xi_3^n - c_n \xi_2^n + \ldots &= 0 \\
a_n \xi_3^n - c_n \xi_1^n + \ldots &= 0 \\
a_n \xi_2^n - b_n \xi_1^n + \ldots &= 0.
\end{aligned}
$$

Násobíme-li tyto tři rovnice opět po řadě a_n, b_n, c_n, obdržíme při n-tých mocninách sice opět koefficienty téže absolutní hodnoty, ale jen při ξ_1^n, ξ_3^n jsou téhož znaménka, kdežto při ξ_2^n znamének opačných. Nedocházíme zde tedy k témuž výsledku jako pro n sudé. Nahraďme však kteroukoliv skupinu paprsků z daných tří skupinou paprsků s nimi harmonických dle těch dvou stran trojstranu, jichž průsečíkem procházejí paprsky zvolené skupiny. Této transformaci odpovídá změna znaménka jedné souřadnice, na př. v poslední rovnici souřadnice ξ_2. Obdržíme pak

$$-a_n \xi_2^n - b_n \xi_1^n + \ldots = 0.$$

Je-li třetí rovnice takto změněna, lze učiniti týž důsledek jako pro n sudé. Platí tedy věta:

Průsečíky křivky stupně n-ho s trojstranem mají pro n liché tuto vlastnost: nahradíme-li všechny průsečíky s jednou stranou body, jež s nimi jsou harmonicky sdruženy dle obou *rohů trojstranu, a pak tyto body jakož i ostatní průsečíky promítneme z protějších vrcholů trojstranu, obdržíme 3n paprsků, jež se dotýkají téže křivky třídy n-té.*

Bylo by snadno vysloviti věty duální; speciálně věta *a*) se dualisuje pouhým obrácením.

II.

4. Křivka stupně $2n$-ho může míti nejvýše tři body n-násobné, nemá-li se rozpadnouti. Bod n-násobný platí za $\frac{1}{2} n (n-1)$ bodů dvojnásobných; má-li tedy křivka k bodů n-násobných, je její rod

$$p = \tfrac{1}{2}(2n-1)(2n-2) - \tfrac{1}{2} k\, n (n-1) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-1)\left[(4-k)\, n - 2\right].$$

Toto číslo je kladné jen pro $k < 4$; je tedy skutečně $k = 3$ největší přípustná hodnota. Budiž K_{2n} křivka stupně $2n$-ho s třemi body n-násobnými. Její rod je dle posledního vzorce

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

t. j. takový, jako rod obecné křivky st. n-ho. To je následek toho, že křivka K_{2n} vhodnou kvadratickou transformací přejde v obecnou křivku st. n-ho. Neboť zvolíme-li tři body n-násobné — jež ovšem neleží v téže přímce — za hlavní body takové transformace, přejde křivka skutečně v křivku stupně

$$2 \times 2n - 3n = n;$$

tato křivka pak již nemá vícenásobných bodů.

Zvolíme body n-násobné za vrcholy souřadného trojstranu; ježto tedy na př. bod (0, 0, 1) je n-násobný, musí členy nejnižšího stupně v x_1, x_2 býti stupně n-ho, čili člen v x_3 stupně nejvyššího rovněž n-ho. Koefficient při x_3^n je pak ovšem výraz stupně n-ho v x_1, x_2. Totéž platí s příslušnými změnami o bodech (0, 1, 0,), (1, 0, 0). Píšeme-li stručně

$$a_{1,2}^n = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$
$$b_{2,3}^n = b_0 x_2^n + b_1 x_2^{n-1} x_3 + \ldots + b_n x_3^n$$
$$c_{3,1}^n = c_0 x_3^n + c_1 x_3^{n-1} x_1 + \ldots + c_n x_1^n$$

má rovnice křivky tvar

$$a^n_{1,2}\, x^n_3 + b^n_{2,3}\, x^n_1 + c^n_{3,1}\, x^n_2 + \ldots = 0,$$

kde členy naznačené tečkováním mají tvar

$$x_1^{h_1}\, x_2^{h_2}\, x_3^{h_3}$$

kde každé h_i je rovno nejméně dvěma. Neboť všechny členy stupně jen n-ho v některých dvou proměnných jsou už vyčerpány třemi výrazy výše napsanými a ve členech ostatních mohou se vyskytovati jen součiny stupně vyššího. Je tedy

$$h_1 + h_2 \geqq n + 1, \quad h_1 + h_3 \geqq n + 1, \quad h_2 + h_3 \geqq n + 1.$$

Sečtením prvých dvou nerovností obdrží se

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_1 \geqq 2n + 2$$

Ježto však

$$h_1 + h_2 + h_3 = 2n,$$

plyne odtud

$$h_1 \geqq 2$$

a právě tak

$$h_2 \geqq 2, \quad h_3 \geqq 2.$$

Lze tedy ze všech členů tvaru výše uvedeného vytknouti alespoň $x_1^2\, x_2^2\, x_3^2$ a rovnice má tvar

$$a^n_{1,2}\, x^n_3 + b^n_{2,3}\, x^n_1 + c^n_{3,1}\, x^n_2 + x_1^2\, x_2^2\, x_3^2\, f_{2n-6}\,(x_i) = 0,$$

kde $f_{2n-6}\,(x_i)$ je mnohočlen v x_i stupně označeného indexem. Tento mnohočlen není ovšem obecný svého stupně, neboť výraz $x_1^2\, x_2^2\, x_3^2\, f_{2n-6}\,(x_i)$ může obsahovati jednotlivé proměnné nejvýše ve stupni $(n - 1)$, $f_{2n-6}\,(x_i)$ tedy nejvýše ve stupni $(n - 3)$. Z toho plyne ostatně snadným výpočtem, že všech členů v f_{2n-6} (x_i) je právě tolik jako v rovnici křivky st. $(n - 3)$, t. j. $\frac{1}{2}\, n\,(n - 3) + 1$. Také je viděti, že křivka

$$f_{2n-6}\,(x_i) = 0$$

má vrcholy souřadné za body $(n - 3)$ násobné.

5. Mimochodem budiž upozorněno na jeden důsledek, který plyne z vyjádření (1). Budiž dána jiná křivka st. $2n$-ho mající tytéž body n-násobné s týmiž tečnami. Její rovnice pak zní

$$a^n_{1,2}\, x^n_3 + b^n_{2,3}\, x^n_1 + c^n_{3,1}\, x^n_2 + x_1^2\, x_2^2\, x_3^2\, g_{2n-6}\,(x_i) = 0,$$

kde $g_{2n-6}\,(x_i)$ je funkce téhož druhu jako $f_{2n-6}\,(x_i)$. Obě křivky protnou se mimo v bodech n-násobných, jež platí, jak se snadno zjistí, za $3n^2 + 3n$ průsečíky, ještě v dalších bodech v počtu $n^2 - 3n$, jež leží na křivce o rovnici

$$f_{2n-6}(x_i) - g_{2n-6}(x_i) = 0,$$

což je ovšem opět křivka týchž vlastností jako $f_{2n-6}(x_i)$. Odtud věta: Dvě křivky stupně $2n$-ho s týmiž třemi body n-násobnými a se společnými tečnami v nich protínají se mimo ně ještě v $n(n-3)$ bodech, jež leží na křivce stupně st. $(2n - 6)$ mající tytéž tři body za $(n - 3)$ násobné. Na př. dvě křivky st. osmého s týmiž třemi body čtyřnásobnými, v nichž mají společné tečny, protínají se mimo ně ještě ve čtyrech bodech; tyto čtyři body leží na kuželosečce, jež obsahuje také tři body čtyřnásobné.

6. Tečny v n-násobném bodě (0, 0, 1) křivky (1) se obdrží, když se položí roven 0 souhrn členů n-ho st. v x_1, x_2, t. j. rovnicí

$$a^n_{1,2} + b_n x_1^n + c_0 x_2^n = 0.$$

Podobně jsou dány tečny v bodě (1, 0, 0) rovnicí

$$b^n_{2,3} + a_0 x_2^n + c_n x_3^n = 0$$

a tečny v bodě (0, 1, 0) rovnicí

$$c^n_{3,1} + a_n x_3^n + b_0 x_1^n = 0.$$

Vyznačíme v těchto rovnicích jen n-té mocniny proměnných a ostatní naznačíme tečkami:

$$(a_0 + b_n)\, x_1^n + (a_n + c_0)\, x_2^n + \ldots = 0$$
$$(b_0 + c_n)\, x_2^n + (a_0 + b_n)\, x_3^n + \ldots = 0$$
$$(b_0 + c_n)\, x_1^n + (a_n + c_0)\, x_3^n + \ldots = 0$$

Násobíme-li tyto rovnice po řadě výrazy $(b_0 + c_n)$, $(a_n + c_0)$, $(a_0 + b_n)$, stanou se koefficienty při n-tých mocninách stejnými; skupiny bodové vyznačené těmito třemi rovnicemi na osách vyhovují tedy podmínce vyslovené v odst. 1.

Tím je dokázána věta:

Tečné ve třech n-násobných bodech křivky stupně 2n-ho protínají spojnice těchto bodů ve 3n bodech, jež leží na křivce stupně n-ho: je tedy jedna z těchto tečen ostatními určena.

Zvláštní případy: pro $n = 1$ dostáváme větu, že průsečíky tečen ve třech bodech kuželosečky se spojnicemi těchto tří bodů leží na přímce, což je známý případ Pascalovy věty.

Pro $n = 2$: tečny ve třech dvojnásobných bodech křivky stupně čtvrtého protínají protější spojnice těchto bodů v šesti bodech, které leží na téže kuželosečce. Tato kuželosečka je ovšem jediná.

Pro $n = 3$ dostáváme obdobnou větu pro křivku stupně šestého s třemi body trojnásobnými; na jejich třech spojnicích obdrží se devět bodů, jimiž prochází křivka stupně třetího. Takových křivek je pak ovšem celý svazek, ježto tři spojnice samy tvoří rovněž jednu křivku stupně třetího obsahující těchto devět bodů.

7. Mezi větami platícími pro $n = 1$ a $n = 2$ a větami týkajícími se vyšších hodnot n je důležitý rozdíl, ne sice ve znění, ale za to ve významu příslušných vět. V případě kuželosečky resp. křivky stupně čtvrtého očekáváme předem, že tečny ve třech daných bodech jednoduchých resp. dvojnásobných jsou navzájem závislé; neboť třemi body a tečnami v nich křivka byla by přeurčena. Tak je kuželosečka určena již třemi body a tečnami ve dvou z nich; tečna ve třetím musí nutně býti nějak určena těmito elementy, což naše věta právě vyslovuje. Rovněž je křivka stupně čtvrtého s třemi dvojnásobnými body určena: těmito body dvojnásobnými (což je devět podmínek) a pěti tečnami v nich (dalších pět podmínek, celkem čtrnáct, což je počet podmínek nutný k určení křivky stupně čtvrtého); poloha šesté tečny musí plynouti z polohy ostatních pěti. Ale tato okolnost se již neprojevuje pro $n > 2$. Na př. pro $n = 3$, t. j. křivku stupně šestého s třemi body trojnásobnými, příslušná úvaha zní takto: tři body trojnásobné značí osmnáct podmínek pro stanovení křivky. Ježto křivka stupně šestého je určena dvacetisedmi podmínkami a každá tečna platí za jednu, zdálo by se, že je možno voliti všech devět tečen v těchto trojnásobných bodech. Tomu tak ovšem není, jak nás poučuje naše věta: osmi tečnami v trojnásobných bodech je devátá tečna určena, přes to, že třemi body trojnásobnými a osmi tečnami v nich křivka šestého stupně určena není.[2])

---

[2]) Tento zjev není ovšem u křivek vyšších stupňů vzácný; připomínám na př. větu, že z devíti dvojnásobných bodů nerozpadající se křivky šestého stupně lze jen osm voliti zcela libovolně, přes to, že devět dvojnásobných bodů platí za dvacetsedm podmínek. Existuje ovšem vždy křivka

A tak obecně: tři n-násobné body platí za

$$\tfrac{3}{2}\, n\,(n+1)$$

podmínek pro určení křivky; ježto křivka stupně $2n$-ho je určena

$$\tfrac{2}{2}\, n\,(2n+3)$$

podmínkami, zbývá

$$\tfrac{2}{2}\, n\,(2n+3) - \tfrac{3}{2}\, n\,(n+1) = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+3)$$

podmínek.

Je pak pro $n \gtreqless 3$ vždy

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+3) \geqq 3n$$

t. j. než počet tečen v n-násobných bodech. Neboť řešením této nerovnosti se obdrží

$$n^2 - 3n \geqq 0 \quad \text{t. j.} \quad n\,(n-3) \geqq 0.$$

Přes to tedy, že křivka st. $2n$-ho pro $n \geqq 3$ není přeurčena, po případě není ani určena počtem podmínek, nelze tyto tečny voliti libovolně.

Zvolíme-li tedy libovolně tři body n-násobné s tečnami v nich a další body v počtu

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+3) - 3n = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-3)$$

obdržíme zajímavý případ, že je dán dostatečný a nikoliv přespočetný počet podmínek, jimž přesně nevyhovuje žádná křivka žádaného stupně.

V širším smyslu vyhovuje těmto podmínkám křivka, jež se skládá z dvojnásob počítaného trojstranu, jehož vrcholy jsou body n-násobné, a z libovolné křivky stupně $(2n - 6)$-ho s body $(n - 3)$-násobnými v těchto vrcholech; ta ovšem má v těchto vrcholech body $(n + 1)$-násobné a následkem toho každá přímka tímto bodem vedená může býti pokládána — v širším smyslu — za tečnu v bodě n-násobném.

8. Bylo již upozorněno (v. odst. 4.) na to, jak křivka K_{2n} s třemi body n-násobnými souvisí s obecnou křivkou K_n. Sestrojme kvadratickou transformaci mající n-násobné body A, B, C

šestého stupně s devíti libovolně danými body dvojnásobnými: je to dvojnásob počítaná křivka stupně třetího určená těmito body. Něco takového nelze říci o případu, o němž je jednáno v textu; v. dále.

křivky K_{2n} za hlavní; buďtež A', B', C' hlavní body druhé soustavy. Touto transformací přejde K_{2n} v křivku stupně n-ho, jak již víme. Tato křivka K_n neprochází body A', B', C', ježto křivka K_{2n} neprotíná spojnic AB, BC, CA mimo body hlavní. Tečné v n-násobných bodech přejdou při tom v přímky, jež promítají z bodů A', B', C' průsečíky křivky K_n s paprsky $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Body některé přímky hlavní, na př. BC, přecházejí ovšem v paprsky svazku A', ale odpovídají jim zároveň body přímky $B'C'$, totiž ty, v nichž tuto přímku protínají paprsky svazku A' právě zmíněné. I je pak zřejmo, vzhledem k vlastnosti bodů, v nichž tečné v n-násobných bodech protínají spojnice AB, DC, CA, že je dokázána věta:

Úplná soustava průsečíků tří přímek s křivkou stupně n-ho přejde kvadratickou transformací, jíž tyto přímky přejdou opět v přímky, opět v takovou.[3]

9. Vzájemná závislost tečen v n-násobných bodech křivky K_{2n} vynikne ještě názorněji, když spojíme větu odst. 6. s větami a), b) odst. 3. Průměty bodů, o nichž tyto dvě věty mluví, jsou totiž právě tečny v n-násobných bodech. I obdržíme tyto věty:

a) Tečny ve třech n-násobných bodech křivky stupně 2n-ho pro n sudé dotýkají se téže křivky třídy n-té.

b) Tečny ve třech n-násobných bodech křivky stupně 2n-ho mají pro n liché tuto vlastnost: tečny ve dvou těchto bodech a přímky, jež jsou harmonicky sdruženy s tečnami ve třetím vzhledem k jeho spojnicím s ostatními dvěma, dotýkají se téže křivky třídy n-té.

Tak dostáváme pro $n = 2$ větu o křivce stupně čtvrtého hned s počátku uvedenou: šesti tečen ve třech dvojnásobných bodech této křivky dotýká se kuželosečka, ovšem jediná. Pro $n = 4$, t. j. křivku stupně osmého, dostáváme dvanáct tečen ve třech bodech čtyrnásobných, jež se dotýkají křivky třídy čtvrté. Těmito dvanácti tečnami není ovšem tato křivka určena (křivka

---

[3]) Tuto větu bylo lze očekávati, ježto tři přímky tvoří složenou křivku stupně třetího. Parametry $3n$ průsečíků této křivky s křivkou stupně n-ho vyhovují jedné relaci, jež se nemění kvadratickou transformací, jíž křivka stupně třetího přejde opět v křivku téhož stupně.

čtvrté třídy je určena čtrnácti tečnami), je tedy nekonečně mnoho křivek, jichž se oněch dvanáct tečen dotýká. To pak platí tím spíše pro n větší.

Nejjednodušší případ věty b), totiž $n = 1$, vede k této vlastnosti kuželosečky: tečny ve dvou bodech kuželosečky a přímka harmonicky sdružená s tečnou v bodě třetím dle spojnic tohoto bodu s prvými dvěma procházejí týmž bodem. Tato věta ovšem ihned plyne z polárních vlastností kuželosečky. Další případ $n = 3$: tečny ve dvou trojnásobných bodech křivky stupně šestého a přímky sdružené harmonicky s tečnami ve třetím udaným způsobem dotýkají se křivky třídy třetí. Takových křivek je nekonečně mnoho, ježto čára složená ze tří bodů trojnásobných také je třídy třetí a má také oněch devět tečen. Tím spíše je tomu tak pro větší hodnoty n.

III.

10. Věty dokázané v předchozích odstavcích zůstávají ovšem v platnosti, když jednotlivé tečny v témže n-násobném bodu splývají; ony věty jen nabudou tvaru speciálnějšího. V případě $n = 2$ je příslušná speciální věta známa: jestliže tečny ve třech dvojnásobných bodech křivky stupně čtvrtého splynou, takže křivka má pak body úvratu, tři tečny v těchto bodech protínají se v jediném bodu.

To souhlasí s větou a) odst. 9., neboť tento bod je křivka prvé třídy, kterou nutno počítati dvojnásob, ježto také tečné v bodech úvratu jsou dvojnásobné. Je otázka, jak dalece se specialisují nalezené věty v případě obecném.

11. Budiž tedy K'_{2n} křivka stupně $2n$-ho s třemi body n-násobnými s tečnami vesměs splývajícími.[4]) Tyto body vezmeme opět za vrcholy souřadného trojstranu; průsečík tečen v bodech (0, 0, 1), (1, 0, 0) vezmeme za bod jednotkový, takže rovnice těchto tečen jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0.$$

[4]) Mimochodem budiž upozorněno, že bod n-násobný se splývajícími tečnami pro n sudé má vzhled bodu úvratu, pro n liché se vzhledem neliší od obyčejného bodu křivky.

Rovnice n-násobné tečny v bodu (0, 1, 0) má tvar

$$x_3 - \lambda x_1 = 0.$$

Rovnice křivky musí obsahovati x_1, x_2 ve stupni nejméně n-tém a koefficient při x_3^n musí býti $(x_1 - x_2)^n$; podobně při x_1^n je koefficient $(x_2 - x_3)^n$, při x_2^n kofficient $(x_3 - \lambda x_1)^n$. I lze psáti rovnici této křivky

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n + a(x_2 - x_3)^n x_1^n + b(x_3 - \lambda x_1)^n x_2^n + \ldots = 0,$$

kde mezi členy naznačenými vytečkováním se vyskytnou členy, jimiž se koefficienty při x_1^n, x_2^n, x_3^n upraví dle požadavku právě vysloveného. Vzhledem k tomu nutno lišiti případ n sudého od případu n lichého.

a) n sudé. Členy n-ho stupně v x_1, x_2, pokud jsou v hořejší rovnici vypsány, jsou

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n + a\, x_1^n x_3^n + b\, x_2^n x_3^n;$$

i musí v rovnici se vyskytovati ještě členy

$$-a\, x_1^n x_3^n - b\, x_2^n x_3^n,$$

aby koefficient při x_3^n byl právě jen $(x_1 - x_2)^n$. Nyní jsou již vypsány tyto členy stupně n-ho v x_2, x_3:

$$a(x_2 - x_3)^n x_1^n + x_1^n x_3^n + b\lambda^n x_1^n x_2^n - a x_1^n x_3^n;$$

aby koefficient při x_1^n byl právě jen $(x_2 - x_3)^n$, musí jednak $a = 1$, jednak se v rovnici musí ještě vyskytovati člen $-b\lambda^n x_1^n x_2^n$. Jsou tedy členy n-ho stupně v x_3, x_1 tyto — dosazujeme hned $a = 1$ —:

$$b(x_3 - \lambda x_1)^n x_2^n + x_2^n x_3^n + x_1^n x_2^n - b x_2^n x_3^n - b\lambda^n x_1^n x_2^n;$$

aby koefficient při x_2^n opět byl $(x_3 - \lambda x_1)^n$, musí

$$b = 1, \quad b\lambda^n = 1; \text{ odtud } \lambda^n = 1$$

a rovnice křivky konečně zní

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^n x_3^n + (x_2 - x_3)^n x_1^n + (x_3 - \lambda x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n \\ - x_2^n x_3^n - x_1^n x_2^n + x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_{2n-6}(x_i) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

s podmínkou

$$\lambda^n = 1.$$

Poslední člen v této rovnici je téhož druhu jako v rovnici (1) a obdrží se touž úvahou, jako se stalo tam. Ježto n je sudé a λ nutně reálné, má λ dvě možné hodnoty:

$$\lambda = \pm 1.$$

α) V případě $\lambda = 1$ rovnice zní

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n + (x_2 - x_3)^n x_1^n + (x_3 - x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n - x_2^n x_3^n - x_1^n x_2^n + \ldots = 0$$

a n-násobné tečné v n-násobných bodech jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 - x_1 = 0.$$

Tyto tři tečné protínají se v jednom bodě.

β) V případě $\lambda = -1$ rovnice zní

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n + (x_2 - x_3)^n x_1^n + (x_3 + x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n - x_2^n x_3^n - x_1^n x_2^n + \ldots = 0$$

a n-násobné tečné v n-násobných bodech jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0;$$

tyto tři přímky protnou osy souřadné ve třech bodech přímky

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Nabyli jsme výsledku: *Křivka stupně 2n-ho s třemi n-násobnými body se splynulými tečnami má pro n sudé tu vlastnost, že tyto tři tečny buď*

α) procházejí týmž bodem, nebo

β) protínají spojnice tří n-násobných bodů ve třech bodech přímky.

Větu β) lze vysvětliti ještě jinak. Je totiž na základě zvláštního případu Pascalovy věty, připomenutého v odst. 6., zřejmo, že v tomto případě *tři tečny n-násobné dotýkají se kuželosečky obsahující tři n-násobné body.* V tomto znění pak větu α) lze pokládati jen za zvláštní případ věty β); kuželosečka pokládaná za křivku druhé třídy přejde v případě α) ve dvojnásobnou čáru prvé třídy, t. j. bod.

b) n liché. Touž úvahou jako pro n sudé shledá se, že musí

$$\lambda^n = -1$$

a tedy

$$\lambda = -1$$

a že rovnice křivky má tvar

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n - (x_2 - x_3)^n x_1^n - (x_3 + x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n + x_2^n x_3^n + x_1^n x_2^n + x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_{2n-6}(x_i) = 0. \qquad (3)$$

Tečny v bodech n-násobných jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0;$$

tyto přímky protnou osy ve třech bodech přímky

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Odtud věta: *Křivka stupně 2n-ho s třemi n-násobnými body se splynulými tečnami má pro n liché tu vlastnost, že tyto tři tečny protínají spojnice tří n-násobných bodů ve třech bodech přímky, čili že se dotýkají kuželosečky obsahující tyto tři body.*

Oba případy, n sudého i n lichého, lze shrnouti v jedinou větu:

Křivka stupně 2n-ho s třemi n-násobnými body se splynulými tečnami má tu vlastnost, že tyto tři tečny dotýkají se křivky druhé třídy obsahující tyto tři body; pro n sudé může tato křivka přejíti ve dvojnásob počítanou čáru třídy první, t. j. bod.

12. Všimněme si blíže případu n sudého. Pro toto n křivky K_{2n} se rozpadají ve dva typy projektivně různé, jež jsou charakterisovány větami α), β) a jež nelze kollineací převésti jeden ve druhý. Sledujme to na jednotlivých příkladech. Pro $n = 2$ dostáváme křivku stupně čtvrtého; dle obecného vzorce je její rovnice v případě α):

$$(x_1 - x_2)^2 x_3^2 + (x_2 - x_3)^2 x_1^2 + (x_3 - x_1)^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 - x_2^2 x_3^2 - x_1^2 x_2^2 = 0$$

čili

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 - 2x_1x_2x_3^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 = 0$$

a tečné v bodech úvratu se ovšem protínají v jednom bodě, což je vlastnost známá a již dříve připomenutá.

V případě β) je rovnice křivky:

$$(x_1 - x_2)^2 x_3^2 + (x_2 - x_3)^2 x_1^2 + (x_3 + x_1)^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3^2 - x_1^2 x_2^2 = 0$$

čili

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1x_2x_3^2 - 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 = 0.$$

Avšak to je

$$(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)^2 = 0.$$

V tomto případě tedy se křivka rozpadne ve dvě kuželosečky, jež ovšem vyhovují hořejší větě

Pro $n = 4$ dostáváme pro typ α) a β) rovnice

$$(x_1 - x_2)^4 x_3^4 + (x_2 - x_3)^4 x_1^4 + (x_1 \pm x_3)^4 x_2^4 - x_1^4 x_2^4 - x_1^4 x_3^4 - x_2^4 x_3^4 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 (ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3) = 0$$

a zde tedy existují oba typy nerozpadající se. Neboť typ α) by se mohl rozpadnouti jen ve dvojnásobnou křivku stupně čtvrtého tvaru výše udaného a typ β) jen ve čtyřnásobnou kuželosečku, ale tomu brání arbitrární konstanty a, b, c.

Je tedy zřejmo, že pro $n > 2$ existují oba typy nerozpadajících se křivek, α) i β).

13. Srovnáváme-li věty nalezené v této kapitole s větami platícími v případě obecném, shledáváme: věta a) α) je specialisovaná věta o existenci křivky n-té třídy, jež se dotýká všech tečen; tato křivka zde se rozpadla na n-násobnou čáru třídy první.

Věta a) β) je specialisovaná věta o existenci křivky n-ho stupně, jež obsahuje průsečíky tečen v n-násobných bodech s jejich spojnicemi; tato křivka zde se rozpadla v n-násobnou přímku. Totéž platí o větě b). Avšak to jsou specialisace nejkrajnější; zmíněné věty lze specialisovati jinak, bezprostředněji.

Především věta odst. 6.: když splynou všechny tečny, splynou navzájem průsečíky těchto tečen se spojnicemi bodů n-násobných; křivka n-ho stupně, o níž je v oné větě řeč, měla by pak s každou touto spojnicí n splývajících bodů společných, t. j. tyto spojnice měly by s křivkou styk (n-1)ho řádu. Body, v nichž nastává takový styk, nazývají se hyperoskulačními. Lze pak skutečně sestrojiti rovnici křivky n-ho stupně, jež má hyperoskulační body na osách, kde je protínají přímky

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 \pm x_1 = 0.$$

Tato rovnice zní pro

a) n sudé:

$$(x_1 - x_2)^n + (x_2 - x_3)^n + (x_3 \pm x_1)^n - x_1^n - x_2^n - x_3^n + x_1x_2x_3\, f_{n-3}(x_i) = 0,$$

b) n liché:

$$(x_1 - x_2)^n - (x_2 - x_3)^n + (x_3 + x_1)^n - x_1^n + x_2^n - x_3^n + x_1x_2x_3 f_{n-3}(x_i) = 0.$$

Je tedy těchto křivek pro $n \overline{\geqq} 3$ nekonečně mnoho; přímka, o níž mluví věty $a)$ $\beta)$, $b)$ odst. 11. počítaná n-kráte, tvoří sama také jednu z těchto křivek.

Právě tak se nahlédne, že existují křivky n-té třídy obecně se nerozpadající, jež vzniknou specialisací křivek n-té třídy, o nichž mluví věty $a)$, $b)$ odst. 9. Pro ty jsou tečny v n-násobných bodech hyperoskulační, t. j. tečna z tohoto bodu ke křivce vedená vznikla splynutím n tečen. Rovnice těchto křivek zní v souřadnicích tečnových pro n sudé

$$(\xi_1 + \xi_2)^n + (\xi_2 + \xi_3)^n + (\xi_3 \mp \xi_1)^n - \xi_1^n - \xi_2^n - \xi_3^n + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f_{n-3}(\xi_i) = 0$$

a pro n liché:

$$(\xi_1 + \xi_2)^n + (\xi_2 + \xi_3)^n + (\xi_3 + \xi_1)^n - \xi_1^n - \xi_2^n - \xi_3^n + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f_{n-3}(\xi_i) = 0.$$

Těchto křivek je pro $n \geqq 3$ nekonečně mnoho; kuželosečka, po případě bod, o nichž mluví věty $\alpha)$, $\beta)$, lze pokládati, počítáme-li je v příslušné násobnosti, pro n sudé za jednu z těchto křivek.

Některé konstrukce ploch stupně druhého.

(Další serie [1]).

Podává dvor. rada prof. Dr. **Vinc. Jarolímek.**

1. *Sborcená plocha 2. stupně buď dána dvěma mimoběžkami A, B a třemi rovinami tečnými ϱ, σ, τ.*

Budiž společný průsečík daných rovin $(\varrho\, \sigma\, \tau) \equiv v$. Každá rovina položená površkou je tečnou rovinou plochy sborcené, tedy i roviny $(vA) \equiv \alpha$, $(vB) \equiv \beta$. K rovinám α, β, ϱ, σ, τ sestrojme tečný kužel 2. stupně $\varkappa$. Obecně určují řídící přímky A, B a kužel $\varkappa$, jehož přímka tvořící stále se dotýká, sborcenou plochu stupně čtvrtého, která však v našem případě, ježto přímky A, B jsou tečnami kužele $\varkappa$, se rozpadá v plochu stupně dru-

[1]) Viz Čas. mathem. roč. XLI, str. 371; XLII, 145; XLIV, 24; Jarolímek, Základové geometrie polohy, svazek II, str. 66—75; III, 102—105; IV, 35—44; Rozpravy II. třídy České Akademie věd, 1916.