Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 5, 301--324

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123706

Otvor nálevky o průměru 12—15 *cm* ováže se dobře navlhčeným měchýřem. Nálevka postaví se na hladký stůl a naplní se sehnaným roztokem skalice modré. Na nálevku upevní se dosti široká roura, do jejíhož hořejšího víka zastrčí se jednak malá nálevka, jednak vodorovně ohnutá trubice. Do široké skleněné nádoby dáme menší sklenici a naplníme obě čistou vodou, aby voda o několik *cm* stála nad menší sklenicí. Na sklenici dáme silné síto kulaté a na to nálevku naplněnou, kterou možno ještě přitlačiti kroužkem na konci tyče, kterou lze na postranním sloupku posouvati a připevniti. Menší nálevkou se větší nálevka tak doplní, aby roztok modré skalice vystoupil až k určitému místu, které si označíme přilepením úzkého proužku papírového. Již asi po 5 minutách postoupí kapalina od místa označeného o 8—10 *cm* a čistá voda ve sklenici znatelně zmodrá. Po 15 minutách počne roztok modré skalice z trubice kapati. Drátěná síť zamezuje prohnutí měchýře dolů, proto pokus se provede rychleji tímto přístrojem nežli jinými.

Řešení úloh.

Úloha 33.

V jaké vzdálenosti působí na sebe dva hmotné body o hmotě 1 *kg*, působí-li na sebe silou, která se rovná váze 1 *kg*? (Hmota země $M = 6{\cdot}03 \times 10^{27}\, g$, poloměr země $r = 6{\cdot}37 \times 10^{8}\, cm$, urychlení $g = 981\, cm$ za 1 sekundu).

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Hýbl*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Dané konstanty slouží k určení gravitační konstanty k v soustavě (*cm*, *gr*, *sek*)

$$k = \frac{gr^2}{M} = \frac{6{\cdot}03}{10^8} = \frac{1}{1{\cdot}658 \times 10^7}.$$

Obdržíme tudíž k určení vzdálenosti x rovnici

$$\frac{k \,.\, 10^3 \,.\, 10^3}{x^2} = 10^3 g,$$

z čehož

$$x = 0{\cdot}0002 \ cm.$$

Úloha 34.

Jak velkou jednotku času musili bychom voliti, aby konstanta gravitační rovnala se 1, volíme-li za jednotku hmoty 1 *g* a za jednotku délky 1 *cm*?

Řešení.

(Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Volíme-li za jednotku hmoty 1 *gr*, za jednotku délky 1 *cm* a za jednotku doby 1 *sek*, jest konstanta gravitační

$$k = \frac{1}{1{\cdot}658 \times 10^7}.$$

Budiž t sekund jednotkou doby, g urychlení (v centimetrech za 1 *sek.*), M hmota země (v gramech), r poloměr země (v *cm*), potom jest

$$gt = \frac{M}{r^2}.$$

Jelikož však

$$\frac{M}{r^2} = \frac{g}{k},$$

jest

$$t = \frac{1}{k} = 1{\cdot}658 \times 10^7 \ sek.$$

Úloha 35.

V nádobě nacházejí se dvě kapaliny; těžší o specifické váze s_1 a lehčí o specifické váze s_2. Jak velká musí býti specifická váha s koule, aby do polovice poloměru byla ponořena v těžší kapalině a ostatní část v kapalině druhé? *Týž.*

Řešení.

(Zaslal p. *Vladimír List*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.)

Objem koule ponořené v těžší kapalině jest

$$V_1 = \frac{5}{24}\pi r^3,$$

objem v lehčí kapalině

$$V_2 = \frac{9}{8}\pi r^3.$$

Ona část, která jest v lehčí kapalině, netlačí celou svou váhou na druhou část v těžší kapalině, nýbrž silou menší o váhu vytlačené kapaliny. Máme tudíž relaci

$$\frac{5}{24}\pi r^3 s_1 = \frac{9}{8}\pi r^3 (s - s_2) + \frac{5}{24}\pi r^3 s,$$

z čehož

$$s = \frac{5s_1 + 27s_2}{32}.$$

Úloha 36.

V rovnici $x^2 - mx + (m - a)^2 = 0$ určiti m tak, aby součet zdvojmocněných kořenů $x_1^2 + x_2^2$ byl maximum.

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Hýbl*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Dle známých vlastností kořenů rovnice kvadratické jest

$$x_1 + x_2 = m, \qquad x_1 x_2 = (m - a)^2;$$

z toho

$$x_1^2 + x_2^2 = 2a^2 - (m - 2a)^2.$$

Aby $x_1^2 + x_2^2$ bylo maximum, musí menšitel posledního rozdílu rovnati se nulle, tedy

$$m = 2a;$$

potom jest

$$x_1^2 + x_2^2 = 2a^2.$$

Úloha 37.

Určiti rovnice tečen společných kružnici $x^2 + y^2 = 16$ a ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Stanoviti obsah rovnoběžníka jimi omezeného.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Vinař*, stud. VIII. tř. g. v Truhlářské ulici v Praze.)

Budiž rovnice společné tečny obou křivek

$$y = Ax + B.$$

Aby přímka ta byla tečnou kružnice, musí býti

$$16A^2 + 16 = B^2;$$

aby též byla tečnou ellipsy, třeba vyhověti podmínce

$$q + 25A^2 = B^2.$$

Z rovnic těchto najdeme

$$A = \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}, \quad B = \pm \frac{16}{3};$$

plocha rovnoběžníka tečnami omezeného jest

$$P = \frac{2B^2}{A} = \frac{512}{3\sqrt{7}}.$$

Úloha 38.

Body $m(7, 6)$, $n(11, -2)$ stanoviti jest kružnici, která v pravém úhlu seče kružnici $x^2 + y^2 = 25$.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Matoušek*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Budiž rovnice hledaného kruhu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2;$$

směrnice tečné pro průsečík $(x_1 y_1)$ jest u kružnice dané

$$A = -\frac{x_1}{y_1},$$

u kružnice hledané

$$A' = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}.$$

K výpočtu veličin a, b, c, x_1, y_1 máme tedy rovnice

$$\begin{gathered}
\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1 - b}{x_1 - a} = 0 \\
x_1^2 + y_1^2 = 25 \\
(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = c^2 \\
(7 - a)^2 + (6 - b)^2 = c^2 \\
(11 - a)^2 + (2 + b)^2 = c^2;
\end{gathered}$$

z nich vyhledáme

$$a = 7,\ b = 1,\ c = 5.$$

Jest pak rovnice hledaného kruhu

$$x^2 + y^2 - 14x - 2y + 25 = 0.$$

Poznámka. K řešení byly by též stačily poslední dvě rovnice spolu s podmínkou

$$a^2 + b^2 - c^2 = 25,$$

kteráž značí, že mocnost středu kružnice dané (počátku) ke kružnici hledané rovná se dvojmoci poloměru oné kružnice.

Úloha 39.

Je-li v trojúhelníku ABC půdice a pevna, jest geom. místem protilehlého vrcholu A ellipsa, platí-li podmínka

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Hajíček*, učitel v Grygově u Olomouce.)

Dosadíme-li do známé rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

za $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$ hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$, a zkrátíme-li rovnici obdrženou, bude,

$$\operatorname{tg}\beta \, . \operatorname{tg}\gamma = 2. \qquad (1)$$

Zvolme střed strany $BC = a$ za počátek a BC za osu pravoúhlé soustavy souřadnic. Jsou-li x, y souřadnice vrcholu A, jest

$$\frac{y}{\frac{a}{2} + x} = \operatorname{tg}\beta,$$

$$\frac{y}{\frac{a}{2} - x} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Násobíme-li rovnice tyto, majíce zření k podmínce (1), obdržíme

$$y^2 = 2\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right),$$

čili

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

jest tedy geom .místem vrcholu A ellipsa, jejíž poloosy mají délky

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Úloha 40.

V pravoúhlé soustavě souřadnic ($X \perp Y$) jsou vedeny bodem m dvě přímky $P \perp P_1$. Přímka P protíná osy X a Y v bodech a, b a přímka P_1 v bodech a_1, b_1. Spojnice ab_1, a_1b protínají se v bodu n. Hledejte geometrická místa bodů m, n, je-li $ab = a_1b_1 = c$, kdež c značí veličinu stálou.

Řešení.

(Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Geometrické místo bodu m. Je-li o počátkem souřadnic, plyne ze shodných trojúhelníků aob, b_1oa_1

$$oa = ob_1, \qquad ob = oa_1.$$

Snadno lze poznati, že jsou-li $\overline{ob}, \overline{ob_1}$ směrů $\begin{matrix}\text{souhlasných,}\\ \text{protivných,}\end{matrix}$ jsou $\overline{oa}, \overline{oa_1}$ směrů $\begin{matrix}\text{protivných}\\ \text{souhlasných.}\end{matrix}$ Je-li $oa = a$, $ob = b$, mají přímky $\overline{ab}, \overline{a_1b_1}$ rovnice

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1,$$

a dle podmínky v úloze obsažené jest

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Abychom obdrželi rovnici geom. místa bodu m, vylučme a, b z rovnic předešlých. Za tím účelem řešme první dvě rovnice

dle $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$, i bude

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : 1 = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & -x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix},$$

odkudž

$$\frac{1}{a} = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \qquad \text{tedy } a = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{y-x}{x^2+y^2}, \qquad \text{,,} \quad b = \frac{x^2+y^2}{y-x}.$$

Dosadivše za a, b obdržené hodnoty do rovnice podmínečné, najdeme po krátké redukci

$$2\,(x^2+y^2)^3 = c^2\,(x^2-y^2)^2.$$

Přejdeme-li od souřadnic pravoúhlých k souřadnicím polarným, t. j. položíme-li do rovnice předešlé za $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, obdržíme

$$\varrho = r \cos 2\varphi,$$

kdež

$$r = \pm \frac{c}{2}\sqrt{2}.$$

Z rovnice polární jest patrno, že geom. místem bodu m jest prodloužená hypocykloida šestého stupně (rosace à quatre branches), mající v počátku svůj bod šestinásobný.

2. *Geom. místo bodu n.*

Přímkám $\overline{ab_1}$, a_1b přináležejí rovnice

$$x+y=a$$
$$-x+y=b,$$

dosadíme-li za a, b hodnoty z předešlých rovnic plynoucí, do rovnice podmínečné, obdržíme

$$2(x^2+y^2)=c^2,$$

t. j. geom. místem bodu r jest kružnice o poloměru

$$r=\frac{c}{2}\sqrt{2},$$

Poznámka. Je-li m' velmi blízká poloha bodu m v křivce (m), $\overline{a'b'}$, $\overline{a'_1b'_1}$ velmi blízké polohy přímek $\overline{ab}$, $\overline{a_1b_1}$, pak body

$$u'\equiv(\overline{ab}, \overline{a'b'}), \qquad v\equiv(a_1b_1, a'_1b'_1),$$

m, n a o leží v téže kružnici K′, jejímž průměrem jest $u'v'$.

Přiblíží-li se bod m' po křivce (m) nekonečně blízko k bodu m, a jsou-li u, v mezní polohy bodův u', v' v přímkách ab, a_1b_1, bude kružnice nad průměrem $\overline{uv}$ ze středu s sestrojená a počátkem jdoucí, mezní polohou kružnice K′, a proto kružnice K a křivka (m) mají v bodu m společnou tečnu i normálu. Je-li o_1 vrcholem obdélníka $aobo_1$, jest bod u průmětem bodu o_1 v přímce ab. Podobně jest určena poloha bodu v v přímce a_1b_1. Nyní jest patrno, že spojnice středu s úsečky $\overline{uv}$ s bodem m jest normalou a tedy kolmice v bodu m na $\overline{ms}$ vztýčená tečnou křivky (m).

Úloha 41.

Kterákoliv tečna seče vrcholové tečny s malou osou ellipsy rovnoběžné v bodech a, b. Dokázati jest analyticky, že kruh, mající ab za průměr, prochází ohnisky.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Půček*, stud. VI. tř. g. v Olomouci.)

Tečna $\overline{ab}$ má rovnici

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 + b^2},$$

kterou lze upraviti takto:

$$y - \sqrt{a^2A^2 + b^2} = -Ax, \tag{1}$$

$$\frac{y - \sqrt{a^2A^2 + b^2}}{A} = \frac{x}{-1} = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + A^2}},$$

kdež ϱ značí vzdálenost kteréhokoliv bodu tečny od středu c úsečky ab.

Rovnice kruhu, jehož středem jest c a poloměr ϱ, jest

$$(y - \sqrt{a^2A^2 + b^2})^2 + x^2 = \varrho^2. \tag{2}$$

Hleďme ϱ vyčísliti dle podmínky, že kruh má procházeti bodem a nebo b, jimž přináležejí úsečky $x = \pm a$. Vložíme-li do rov. (1) hodnotu za x, obdržíme

$$\frac{a}{-1} = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + A^2}},$$

odkudž

$$\varrho^2 = a^2(1 + A^1).$$

Vloživše za ϱ^2 hodnotu obdrženou do rov. (2), obdržíme rovnici kruhu

$$x^2 + (y - \sqrt{a^2A^2 + b^2})^2 = a^2(1 + A^2).$$

Položíme-li v rovnici této $y = 0$, t. j. hledáme-li body, v nichž kruh osu X protíná, najdeme, zkrátivše rovnice obdrženou,

$$x^2 = a^2 - b^2,$$

což znamená, že kruh uvažovaný protíná hlavní osu ellipsy v ohniskách.

Úloha 42., 43. a 44.

Jelikož dosud žádné řešení těchto úloh nedošlo, odkládáme je do ročníku příštího.

Úloha 45.

V pravoúhlé soustavě znázorniti komplexní kořeny rovnice

$$\frac{x^8+1}{2ax^2} = x^4 - ax^2 + 1,$$

je-li

$$a = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Hýbl*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Upravme rovnici danou na podobu

$$x^4 + \frac{1}{x^4} - 2a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2a^2 = 0,$$

která substitucí

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y$$

přechází v rovnici kvadratickou

$$y^2 - 2ay + 2a^2 - 2 = 0;$$

její kořeny jsou

$$y_{1,2} = a \pm \sqrt{2 - a^2}.$$

Při hodnotě pro a předpokládané jest

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \cos\alpha + \sin\alpha \pm \sqrt{1 - 2\cos\alpha\sin\alpha} \\ &= \cos\alpha + \sin\alpha \pm (\cos\alpha - \sin\alpha), \end{aligned}$$

tedy

$$y_1 = 2\cos\alpha, \quad y_2 = 2\sin\alpha.$$

a) Je-li

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\cos\alpha$$

čili

$$x^4 - 2x^2\cos\alpha + 1 = 0,$$

obdržíme kořeny

$$x_{1,2,3,4} = \pm\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

b) Je-li $$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \sin \alpha$$

čili $$x^4 - 2x^2 \sin \alpha + 1 = 0,$$

najdeme hodnoty další

$$x_{5,6,7,8} = \pm \left(\sin \frac{\alpha}{2} \pm i \cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

Body, jimiž se znázorňuje těchto osm soujemných hodnot v soustavě pravoúhlé, jsou vrcholy osmiúhelníka souměrného k osám souřadným i k přímkám, jimiž se úhly těchto os rozpolují.

Poznámka. Obsah tohoto osmiúhelníka jest $2a$.

Úloha 46.

Ustanoviti celistvé hodnoty y a z tak, aby výrazy

$$A = 2x^2 + x + y, \quad B = 2x^2 - 7x + z$$

měly společného činitele lineárného dle x.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce.)

Aby dané výrazy měly společného činitele lineárného dle x, musí rovnice

$$2x^2 + x + y = 0,$$
$$2x^2 - 7x + z = 0,$$

míti společný kořen x. Podmínku k tomu nutnou i dostatečnou (resultant obou rovnic) obdržíme vyloučením x. K tomu cíli zjednejme si odečtením rovnici

$$8x + y - z = 0$$

a hodnotu z ní plynoucí

$$x = \frac{z - y}{8}$$

dosaďme do kterékoli z obou rovnic hořejších. Tak nabudeme rovnice

$$z^2 - 2(y-2)z + y^2 + 28y = 0,$$

z níž
$$z = y - 2 \pm 2\sqrt{1-8y}.$$

Aby y i z byly hodnoty celistvé, položme

$$\sqrt{1-8y} = 1 - \frac{2y}{u},$$

načež bude
$$y = u(1-2u),$$

$$z = -(2u^2 - u + 2) \pm 2(4u-1).$$

Klademe-li ku př. $u = 3$, nalezneme

$$y = -15, \quad z = -17 \pm 22,$$

$$x = \frac{-2 \pm 22}{8};$$

společný činitel výrazů

$$A = 2x^2 + x - 15, \quad B = 2x^2 - 7x + 5,$$

jest v tomto případě $2x - 5$.

Úloha 47.

Řešiti soustavu rovnic

$$x \sin\alpha + y \sin 2\alpha = \sin 3\alpha$$
$$x \sin\beta + y \sin 2\beta = \sin 3\beta$$

a kořeny uvésti na podobu co nejjednodušší.

Řešení.

(Zaslal p. *Ant. Sedláček*, stud. VII. tř. g. v Klatovech.)

Řešíce danou soustavu rovnic nalezneme

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C},$$

kdež

$$A = \sin 3\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \sin 3\beta,$$
$$B = \sin\alpha \sin 3\beta - \sin 3\alpha \sin\beta,$$
$$C = 2\sin\alpha \sin\beta (\cos\beta \cos\alpha).$$

Obraty z goniometrie známými můžeme výrazy A, B upraviti na tvar

$$A = 2 \sin\alpha \sin\beta\,(1 + 4\cos\alpha\cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta),$$
$$B = 4 \sin\alpha \sin\beta\,(\cos^2\beta - \cos^2\alpha);$$

tím nalezneme

$$x = -(1 + 4\cos\alpha\cos\beta),$$
$$y = 2(\cos\alpha + \cos\beta).$$

Úloha 48.

Do dané kružnice vepsati trojúhelník, aby průsečík v jeho výšek byl vzdálen od jedné strany o v_1 a od protějšího vrcholu o v_2

Řešení.

(Zaslal p. *Jan Pouč,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Sestrojme v dané kružnici tetivu $BB_1 = 2v_1 + v_2$ a rozpůlme její část $2v_1$ tetivou AC kolmou na BB_1 v bodu D, i bude ABC žádaným trojúhelníkem.

Že V jest průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka, následuje, vedeme-li na př. CE bodem V až ku straně AB, z trojúhelníků $B_1CD \sim ACE$, kde $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle A$, jakožto úhly obvodové, a $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB_1$, jakožto úhly v trojúhelnících $B_1CD \cong CDV$. Ježto trojúhelník B_1CD jest pravoúhlým, jest $CE \perp AB$, tedy výškou.

Úloha 49.

Kolem čtyřúhelníka, jehož úhlopříčny m a n společným svým průsečíkem jsou rozděleny na m_1 a m_2, vztažně na n_1 a n_2, lze opsati kružnici, je-li

$$\sqrt{\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2}} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Jan Pouč,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Z dané podmínky následuje:

$$m_1 n_1 (m_2 + n_2)^2 = m_2 n_2 (m_1 + n_1)^2,$$

neb, provedeme-li tuto naznačené úkony,

$$m_1 m_2^2 n_1 + 2m_1 m_2 n_1 n_2 + m_1 n_1 n_2^2 = m_1^2 m_2 n_2 + 2m_1 m_2 n_1 n_2 + m_2 n_1^2 n_2$$

a redukujeme-li

$$m_1 m_2 (m_2 n_1 - m_1 n_2) = n_1 n_2 (m_2 n_1 - m_1 n_2),$$

obdržíme rovnici

$$m_1 m_2 = n_1 n_2,$$

z kteréž vychází, že úhlopříčny $m = m_1 + m_2$ a $n = n_1 + n_2$ jsou tetivami téže kružnice.

Úloha 50.

Sestrojiti mezikruží o šířce a a o ploše daného mezikruží

Řešení.

(Zaslal p. *Karel Laštovka*, stud. VII. tř. g. v Táboře.)

Sestrojme v daném mezikruží tečnu $AB = t$ z obvodu zevní kružnice ku kružnici vnitřní, prodlužme poloměr OA vnitřní kružnice přes bod A doteku o danou šířku $a = AC$ žádaného mezikruží, pak z bodu O_1, ležícím na prodlouženém poloměru OA, kružnici, jejíž tetivou by byla přepona BC pravoúhlého trojúhelníka ABC, a z téhož středu O_1 druhou kružnici, dotýkající se tečny AB. Poslední dvě kružnice omezují žádané mezikruží, a poněvadž tečna jeho jest totožná s tečnou daného, mají obě mezikruží stejné plochy πt^2.

Úloha 51.

Poměrem dvou úseček vyjádřiti poměr povrchů a poměr krychelných obsahů dvou koulí, jejichž poloměry se mají k sobě jako úsečky $m : n$.

Řešení.

(Zaslal p. *Adolf Ottis*, stud. VI. tř. g. v Plzni.)

Sestrojme obdélník AMDN o stranách $MD = m$ a $ND = n$, vrcholem D veďme kolmici na úhlopříčnu AD a prodlužme obě z A vycházející strany obdélníka až ku průsekům B a C s onou kolmicí. Tím nastanou dva podobné pravoúhlé trojúhelníky BMD $\sim$ CDN. Je-li poměr jejich odvěsen $\mathrm{MD} : \mathrm{ND} = m : n$ daným poměrem poloměrů, jest 1) poměr jejich přepon $\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = p_1 : p_2$ poměrem povrchu, a 2) poměr druhých odvěsen $\mathrm{BM} : \mathrm{CN} = k_1 : k_2$ poměrem krychelných obsahů příslušných koulí.

Jesti v trojúhelnících BDM $\sim$ CDN

$$p_1 : p_2 = k_1 : n$$

čili, dosadíme-li $k_1 = \frac{m^2}{n}$,

$$p_1 : p_2 = m^2 : n^2. \qquad (1)$$

Z těchže trojúhelníků plyne také úměr

$$k_1 : m = n : k_2.$$

Dosadíme-li zde jednou $n = \sqrt{mk_2}$, po druhé $m = \sqrt{nk_1}$, obdržíme napřed

$$k_1^2 k_2 = m^3 \text{ a pak } k_1 k_2^2 = n^3,$$

tedy

$$k_1 : k_2 = m^3 : n^3. \qquad (2)$$

Úloha 52.

Stanoviti kosý úhel pravoúhlého trojúhelníka, jehož strany tvoří geometrickou řadu, a sestrojiti takový trojúhelník, je-li dána jeho přepona.

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Kroutil*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Leží-li proti odvěsně c úhel γ, a znamená-li b druhou odvěsnu, a přeponu hledaného trojúhelníka a pak e podíl řady jsou odvěsny dány rovnicemi

$$b = a \cos \gamma = a \,.\, e,$$
$$c = a \sin \gamma = a \,.\, e^2,$$

z nichž následuje pro úhel γ,

$$\cos^2 \gamma = \sin \gamma.$$

Nahradíme-li tu cosinus sinusem, najdeme z rovnice

$$\sin^2 \gamma + \sin \gamma = 1$$

že

$$\sin \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

což znamená poměr strany pravidelného desítiúhelníka k poloměru kolem něho opsané kružnice.

Považujeme-li tedy danou přeponu jakožto poloměr kružnice, bude strana pravidelného desítiúhelníka vepsaného do této kružnice jednou odvěsnou žádaného trojúhelníka.

Úloha 53.

Je-li a délka ramene, b půdice, α úhel při půdici rovnoramenného trojúhelníka, jest dokázati vztah

$$2a = b\left(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Řešení.

(Zaslal p. *Pantaleon Synek*, stud. VI. tř. r. v Prostějově.)

Vepíšeme-li do trojúhelníka daného kružnici, jest poloměr její

$$\varrho = b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Střed této kružnice dělí výšku ve dvě části, totiž ϱ, $b \operatorname{tg} \alpha - \varrho$; dotyčný bod dělí rameno v části $\frac{b}{2}$, $a - \frac{b}{2}$.

Jest tedy

$$b \operatorname{tg} \alpha - b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \left(a - \frac{b}{2}\right) \operatorname{cotg} \alpha,$$

odkudž po snadné úpravě plyne relace, kterou bylo dokázati.

Úloha 54.

Příčky dělící úhel při temeni rovnoramenného trojúhelníka na 3 stejné díly dělí půdici jeho v části $m = n = 37$, $p = 33$. Vypočítati onen úhel i délku ramene.

Řešení.

(Zaslal p. *Jaroslav Tomaštík*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Budiž x délka ramene, v výška trojúhelníka, $\alpha = 6\beta$ úhel rameny sevřený.

Jest pak

$$v = \left(m + \frac{p}{2}\right) \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{6},$$

z čehož

$$(2m + p) \operatorname{tg} \beta = p \operatorname{tg} 3\beta.$$

Užijme vzorce

$$\operatorname{tg} 3\beta = \frac{3 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}^3 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta};$$

tím nabudeme rovnice

$$(2m + p)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 \beta) = p(3 - \operatorname{tg}^2 \beta),$$

z níž

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{m - p}{3m + p}}.$$

Délku ramene určíme z rovnice

$$x^2 = \left(m + \frac{p}{2}\right)^2 + v^2,$$

která dosazením hodnoty za v nabývá tvaru

$$x^2 = \left(m + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} \cdot \frac{3m + p}{m - p}$$

a vede k výsledku

$$x^2 = \frac{m^3}{m - p}.$$

Při hodnotách číselných v úloze daných obdržíme

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{6} = \frac{1}{6}, \qquad \alpha = 56^0 46' 28'';$$

$$x = \frac{37}{2}\sqrt{37} = 112{\cdot}53.$$

Úloha 55.

Kratší strana kosodélníka jest a, delší úhlopříčka $2a$, úhel úhlopříček 75^0. Vypočítati jeho obsah.

Řešení.

(Zaslal p. *Václav Bubeník*, stud. VII. tř. české realky v Praze.)

Obě úhlopříčky omezují se stranou a trojúhelník rovnoramenný, jehož úhly jsou 75°, 75°, 30°; obsah jeho

$$\varDelta = \frac{1}{2} a^2 \sin 30^0 = \frac{1}{4} a^2,$$

tedy obsah trojúhelníka

$$K = 4\varDelta = 2a^2.$$

Úloha 56.

Vypočítati úhly sférického trojúhelníka, který ku svým trojúhelníkům vedlejším jest v poměru

$$\triangle : \triangle_1 : \triangle_2 : \triangle_3 = 6 : 7 : 8 : 9.$$

Řešení.

(Zaslal p. *František Slavík*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Jsou-li α, β, γ úhly sférického trojúhelníka abc, jest obsah jeho úměren nadbytku

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 2R.$$

K trojúhelníku tomu náleží vedlejší trojúhelníky bca', cab', abc', z nichž každý doplňují se s trojúhelníkem abc na sférický dvojúhelník. Trojúhelník bca' má úhly

$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = 2R - \beta,\ \gamma' = 2R - \gamma;$$

jest tedy nadbytek jeho

$$\varepsilon_1 = 2R + \alpha - \beta - \gamma = 2\alpha - \varepsilon.$$

Podobně mají trojúhelníky cab', abc' nadbytky

$$\varepsilon_2 = 2\beta - \varepsilon,\ \varepsilon_3 = 2\gamma - \varepsilon.$$

Dle podmínek úlohy jest

$$\varepsilon . \varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = 6 : 7 : 8 : 9;$$

odtud vyjádříme

$$\alpha = \frac{13}{12}\varepsilon, \quad \beta = \frac{14}{12}\varepsilon, \quad \gamma = \frac{15}{12}\varepsilon$$

a dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice první, obdržíme

$$\varepsilon = 72^0,$$
$$\alpha = 78^0, \quad \beta = 84^0, \quad \gamma = 90^0.$$

Úloha 57.

Obdélník, jehož odvěsny jsou v poměru 5 : 12, otáčí se kolem své úhlopříčky c. Vypočítati povrch a obsah tělesa tímto otáčením vzniklého.

Řešení.

(Zaslal p. *Ant. Sedláček*, stud. VII. tř. g. v Klatovech.)

Rotační těleso vzniklé otočením obdélníka kolem úhlopříčky c skládá se ze dvou plných kuželů o straně a, poloměru m a výšce p, a ze dvou komolých kuželů o straně s, poloměrech m, n a výšce q. Při tom jest a kratší, b delší odvěsna daného trojúhelníka, tedy

$$a = \frac{5}{13}c, \quad b = \frac{12}{13}c.$$

Mimo to ustanovíme snadně

$$m = \frac{ab}{c} = \frac{60}{169}c, \quad n = \frac{ac}{2b} = \frac{5}{24}c,$$
$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{169}c, \quad q = \frac{c}{2} - p = \frac{119}{338}c,$$
$$s = \sqrt{(m^2 - n)^2 + q^2} = \frac{119}{312}c.$$

Užijeme-li tohoto označení, můžeme povrch daného tělesa psáti

$$P = 2\pi\,[am + (m + n)\,s]$$

a obsah jeho

$$O = \frac{\pi}{3}\,[m^2p + (m^2 + mn + n^2)\,q]\,;$$

dosadíce hodnoty svrchu nalezené, obdržíme

$$P = \frac{444715}{632736}\pi c^2 = 0{\cdot}70267\ldots c^2,$$
$$O = \frac{1934035525}{5560283968}\pi c^3 = 0{\cdot}34544\ldots c^3.$$

Úloha 58.

Ustanoviti obsah pravidelného jehlanu šestibokého, jehož hrana při základně jest a, a jehož dvě sousední stěny pobočné tvoří úhel 135°.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce.)

Hledaný obsah jehlanu jest

$$J = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{4}\sqrt{3} \cdot v,$$

kdež

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \delta,$$

značí-li δ odchylku pobočných stěn od základny. Z trojhranu pravoúhlého, jehož hrany jsou: výška jehlanu, hrana pobočná a výška pobočné stěny, najdeme dle známého ze sférické trigonometrie pravidla Neperova

$$\sin \delta = \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

při čemž $\omega = 135°$, $\alpha = 60°$.

Jest pak

$$\cos \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \qquad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

tedy $\sin \delta = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} \delta = \sqrt[4]{2}$.

Proto

$$J = \frac{3a^3}{8}\sqrt[4]{2}$$

Úloha 59.

Do paraboly $y^2 = 4x$ vepsán souměrný různoběžník, jehož úhlopříčky protínají se v bodě (5, 2). Který jest jeho obsah?

Řešení.

(Zaslal p. *Jan Pouč*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Libovolná přímka M jdoucí bodem daným p má rovnici

$$y - 2 = A(x - 5)$$

a protíná parabolu v bodech a, b, jichž pořadnice y_1, y_2 jsou kořeny rovnice

$$Ay^2 - 4y + 8 - 5A = 0.$$

Má-li bod p půliti vzdálenost obou průsečíků, musí býti

$$y_1 + y_2 = \frac{4}{A} = 4,$$

tedy $A = 1$. Jest proto rovnice přímky M

$$M \equiv x - y - 3 = 0,$$

a souřadnice bodů a, b jsou

$$x_1 = 9, \qquad y_1 = 6,$$
$$x_2 = 1, \qquad y_2 = -2.$$

K přímce M stanovme v bodě p kolmici N; rovnice její bude

$$N \equiv x + y - 7 = 0$$

a průsečíky její c, d s parabolou mají souřadnice

$$x_3 = 9 - 4\sqrt{2}, \qquad y_3 = 4\sqrt{2} - 2,$$
$$x_4 = 9 + 4\sqrt{2}, \qquad y_4 = -4\sqrt{2} - 2.$$

Body a, b, c, d jsou vrcholy žádaného deltoidu; obsah jeho

$$\Delta = \frac{1}{2}\overline{ab}\,.\,\overline{cd}.$$

Ze souřadnic vrcholů vypočítáme

$$\overline{ab} = 8\sqrt{2}, \qquad \overline{cd} = 16,$$

tedy

$$\Delta = 64\sqrt{2}.$$

Poznámka: Strany čtyrúhelníka $acbd$ mají délky

$$\overline{ac} = \overline{bc} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$\overline{ad} = \overline{bd} = 8\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Čtyrúhelníku tomu lze vepsati kružnici poloměru

$$\varrho = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

a opsati kružnici středu s (9, — 2) a poloměru

$$r = 8.$$

Úloha 60.

Dána jest ellipsa a konfokálná k ní hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1,$$

tak že

$$a^2 - b^2 = c^2 + d^2 = e^2.$$

Sestrojíme-li v bodech oběma křivkám společných tečny, omezují tečny ellipsy rovnoběžník R_1 a tečny hyperboly rovnoběžník R_2. Dokázati, že

$$R_1 : R_2 = a^2b^2 : c^2d^2.$$

Řešení.

(Zaslal p. *František Miláček*, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě.)

Jsou-li x_1, y_1 souřadnice bodu oběma křivkám společného, jest tečna sestrojená v něm ku ellipse určena rovnicí

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

Tečna ta má na osách úseky

$$m_1 = \frac{a^2}{x_1}, \qquad n_1 = \frac{b^2}{y_1}$$

a omezuje s tečnami k ní dle os souměrnými rovnoběžník, jehož obsah

$$R_1 = 2m_1 n_1 = \frac{2a^2b^2}{x_1 y_1}.$$

Při hyperbole jest rovnice tečny

$$d^2 x_1 x - c^2 y_1 y = c^2 d^2,$$

úseky na osách

$$m_2 = \frac{c^2}{x_1}, \qquad n_2 = -\frac{d^2}{y_1},$$

a obsah příslušného rovnoběžníka

$$R_2 = -2m_2 n_2 = \frac{2c^2d^2}{x_1 y_1}.$$

Jest tedy

$$R_1 : R_2 = a^2b^2 : c^2d^2.$$

Poznámka: Tato úměra platí, jak z vyvození zřejmo, pro jakékoli dvě kuželosečky koaxialné nikoli jen pro konfokálné.

V případě posledním jest

$$x_1 = \frac{ac}{c}. \qquad y_1 = \frac{b}{e^2}\sqrt{e^4 - a^2c^2}.$$

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Frant. Bilovský, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 35., 37.
Václav Bubeník, stud. VII. tř. č. r. v Praze, úl. 50., 52., 55.
Alois Greipel, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 25. až 27., 31., 37., 41., 47., 50., 52. až 60.
Aug. Haas, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 33. až 41.
Josef Hájíček, učitel v Grygově u Olomouce úl. 33. až 41., 45. až 60.
František Hýbl, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 33. až 41., 45. až 59.
František Chyba, stud. VI. tř. g. v Brně úl. 47., 55.

František Kosyna, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 50., 55.
František Kroutil, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí, úl. 35., 38., 47., 50. až 55.
Karel Laštovka, stud. VII. tř. g. v Táboře, úl. 47., 50.
Vladimír List, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 35., 36., 38.
Josef Matoušek, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 35. až 39., 41.
Frant. Miláček, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 35. až 39., 41., 50. až 55., 60.
Jaroslav Novotný, stud. VII. tř. g. ve Vys Mýtě, úl. 47., 50., 53., 55.
Adolf Ottis, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 51. až 55.
Václav Posejpal, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 38.
Jan Pouč, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 47. až 50., 52 až 60.
Josef Půček, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 37. až 41., 47., 50., 52. až 60.
Antonín Sedláček, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 47.. 52., 53., 55., 57., 58.,
František Slavík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 36., 47., 53. až 56.
Pantaleon Synek, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 50., 53., 55.
Leopold Šauer, stud. VIII. tř. g. v Truhlářské ul. v Praze, úl. 37., 38., 53., 55.
František Ševčík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 47., 53.
Jaroslav Tomaštík, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 37., 38., 47., 53., 54., 55., 57.
Josef Vinař, stud. VIII. tř. g. v Truhlářské ulici v Praze, úl. 37.
Antonín Vyhlídal, stud. VI. tř. g. v Přerově, úl. 35., 36.
Nepodepsaný z Vysokého Mýta, úl. 35.
Nepodepsaný z Olomouce, úl. 33. až 41.