N. Saltykow

Notes sur la méthode de Legendre pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 166--168

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123571

aux dérivées partielles du type parabolique. J'étudie l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y, z) \tag{1}$$

le point $P(x, y)$ étant situé dans un domaine Dy limité par deux courbes C_1, C_2, d'équations

$$x = \chi_1(y), \qquad x = \chi_2(y)$$

et par deux parallèles à l'axe des x : $y = y_1$, $y = Y$.

L'emploi de la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ du domaine Dy permet de ramener le problème à l'étude de l'équation intégro — différentielle

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{D_y} G(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

Dans le cas particulier où Dy est la bande $x_1 < x < +\infty$, $y_1 < y < Y$ on connaît la fonction de Green. Dans ce cas l'équation (2) possède une solution unique s'annulant pour $x = x_1$, pour $x \to +\infty$, pour $y = y_1$, lorsque f satisfait à la condition généralisée de Lipschütz

$$| f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1) | \leqq k \, | z_2 - z_1 | \, \frac{[1 + (x - x_1)^m]^2}{(x - x_1)^{2m} \, (y - y_1)^{-\gamma}}, \tag{3}$$

où l'on a $1 > m \geqq 0$, $\gamma + 1 - m > 0$. f satisfait à l'inégalité

$$| f(x, y, z) | \leqq F \, . \, \frac{1 + (x - x_1)^m}{(x - x_1)^m \, (y - y_1)^{-\gamma}}. \tag{4}$$

k, F sont supposés suffisamment petits.

Dans le cas général on a des résultats analogues.

Note sur la méthode de Legendre pour intégrer les équations linéaires aux derivées partielles du second ordre.

N. Saltykow, Belgrade.

Il s'agit d'une équation linéaire

$$r + 2Bs + Ct + 2Dp + 2Eq + Fz + G = 0 \tag{1}$$

à désignations usuelles, les coefficients représentant les fonctions de variables indépendantes x et y.

En étendant sur l'équation (1), la méthode de Laplace concernant les équations hyperboliques, on groupe, pour obtenir deux conditions d'intégrabilité bien connues, les termes de l'équation étudiée (1) de deux manières différentes.

Or, en appliquant les deux transformations mentionnées à des exemples, on retrouve toujours les mêmes conditions d'intégrabilité.

Cela provient de ce que les deux conditions distinctes d'intégrabilité ne sont données rien que par une seule transformation.

Pour le démontrer, profitons des formules qui sont exposées dans les Leçons de M. E. Goursat,[1]) en observant que l'équation (1) n'en diffère que par les facteurs 2 auprès des coefficients D et E.

On a d'après les formules de N. Saltykow:

$$h_{1,2} \equiv \frac{1}{R^2}\begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E' \\ D & E' & F' \end{vmatrix}, \quad k_{1,2} \equiv \frac{1}{R^2}\begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E'' \\ D & E'' & F'' \end{vmatrix}, \quad R \equiv \sqrt{B^2 - C},$$

$$E' \equiv E - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{X}(\lambda_2), \;\; F' \equiv F - \mathrm{X}(a), \;\; a \equiv \frac{E' - D\lambda_2}{\pm R},$$

$$E'' \equiv E - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Y}(\lambda_1), \;\; F'' \equiv F - \mathrm{Y}(b + \mu), \;\; b + \mu \equiv \frac{D\lambda_1 - E''}{\pm R},$$

où les deux indices de h et de k indiquent leurs valeurs correspondantes respectivement aux signes supérieures et inférieures des racines:

$$\lambda_1 \equiv B \pm R, \qquad \lambda_2 \equiv B \mp R.$$

Or, l'on a évidemment les formules:

$$\mathrm{X}(\lambda_2) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(B \mp R) + (B \pm R)\frac{\partial}{\partial y}(B \mp R) \equiv X_{2,1},$$

$$\mathrm{Y}(\lambda_1) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(B \pm R) + (B \mp R)\frac{\partial}{\partial y}(B \pm R) \equiv Y_{1,2},$$

les premiers indices correspondant aux signes supérieures, dans les formules considérées, et les seconds indices aux signes inférieures. Introduisons d'une manière analogue les deux désignations $F'_{1,2}$ et $F''_{1,2}$.

Cela étant, on a immédiatement les égalités:

$$X_2 \equiv Y_2, \quad X_1 \equiv Y_1, \quad F'_1 \equiv F''_2, \quad F'_2 \equiv F''_1.$$

Les formules obtenues démontrent que l'on a: $h_1 \equiv k_2$, $h_2 \equiv k_1$. Il suffit, donc, d'une transformation seulement pour avoir les deux conditions d'intégrabilités de l'équation étudiée (1).

Il va de soi-même que les deux transformations deviennent nécessaires pour avoir les deux conditions d'intégrabilité dans le cas de Laplace, car les relations entre les coefficients y sont linéaires.

[1]) E. Goursat — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. II, Paris 1898, p. 32.

Le résultat obtenu peut être envisagé comme évident a priori, si l'on prend en considération que la méthode de Legendre offre les conclusions identiques à celle de Monge-Ampère pour les équations de la forme étudiée (1).

Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

N. Saltykow, Belgrade.

Considérons l'équation à désignations usuelles:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{si}p_{si} + 2\sum_{s=1}^{n} D_s p_s + Fz + G = 0,\ A_{is} \equiv A_{si}, \qquad (1)$$

que l'on va écrire de la manière suivante:

$$\sum_{s=1}^{n} K_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz\right) + N\left(\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz\right) + G = \mu z, \quad (2)$$

$$K_1 \equiv 1,\ L_1 \equiv A_{11} \gtrless 0.$$

Le groupement des termes de l'équation (1) est possible sous la forme (2), les coefficients de l'équation (1) étant constants, si l'on a

$$\Delta_{is} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{i1} & A_{s1} \\ A_{i1} & A_{ii} & A_{si} \\ A_{s1} & A_{is} & A_{ss} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad (i, s = 2, 3, \ldots, r), \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_2}{R_2^2} = \dfrac{\Delta_r}{R_r^2}, \\ (r = 3, 4, \ldots, n) \end{cases} \qquad \Delta_s \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{s1} & D_1 \\ A_{1s} & A_{ss} & D_s \\ D_1 & D_s & F \end{vmatrix}, \quad (s = 2, 3, \ldots, n). \qquad (4)$$

Les coefficients de l'équation (2) deviennent, alors:

$$\begin{cases} L_s = A_{s1} \pm R_s,\ A_{11}K_s = A_{s1} \mp R_s,\ R_s \equiv \sqrt{A_{s1}^2 - A_{11}A_{ss}} \gtreqless 0, \\ (s = 2, 3, \ldots, n), \end{cases} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} M = \frac{A_{21}D_1 - A_{11}D_2}{\pm R_2} + D_1,\quad A_{11}N = \frac{A_{11}D_2 - A_{21}D_1}{\pm R_2} + D_1, \\ \mu = \frac{\Delta_2}{R_2^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Or, si les coefficients de l'équation donnée (1) représentaient les fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le groupement des termes (2) serait encore possible, à condition que les égalités (3) aient lieu identiquement, les formules (5) conservant leur validité; quant aux conditions (4) et aux formules (6), on y devrait remplacer