Augustin Pánek

O vzorci vyjadřujícím plochu čtyřúhelníka pomocí stran jeho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 4, 182--183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123538

Z toho pak, že body $ob''pc''$ hyperboly H'' tvoří rovnoběžník hyperbole vepsaný a že úhlopříčny jeho $\overline{op}$, $b''c''$ na vzájem se rozpolují, soudíme, že střed s hyperboly H'' rozpoluje délku $\overline{op}$. Rovnoběžky středem s k O, O_1 vedené jsou asymptoty hyperboly.

Z uvedeného plyne věta:

Středy všech kuželoseček, ve kterých svazek rovin P plochu kuželovou seče, nalézají se na hyperbole H'', která procházejíc vrcholem této plochy a neurčitým bodem p osy P, má za střed bod rozpolovací délku $\overline{op}$ a jejíž asymptoty jsou stejnosměrné s přímkami O, O_1).*

Úloha:

Kterak lze sestrojiti bod p hyperboly, která určena jest třemi body o, a'', b'' a směry asymptot O, O_1, a kterak lze pak pomocí bodu p sestrojiti další body kuželosečky, její střed s asymptoty.

O vzorci vyjadřujícím plochu čtyřúhelníka pomocí stran jeho.

Podává

Augustin Pánek.

Značí-li a, b, c, d strany — obr. 7. — $AC = m$, $BD = n$ úhlopříčky a $\triangle$ ploský obsah čtyrúhelníka $ABCD$ a vedeme-li vrcholy jeho rovnoběžky k úhlopříčkám, povstane rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, jehož ploský obsah, jak povědomo

$$= A_1D_1 \,.\, A_1B_1 \sin \alpha = mn \sin \alpha,$$

a poněvadž

$$ABCD = \frac{1}{2} A_1\, B_1\, C_1\, D_1\,,$$

$$2\triangle = m\, n \sin \alpha. \qquad (1)$$

---

*) Provedení důkazu analytického, který jest velmi jednoduchý odporučujeme žákům středních škol. Dále nechť se dokáže, že bod p jest středem, hyperboly H'.

Nazveme-li E, F orthogonalní průměty vrcholů B, D na úhlopříčku m, plyne z $\triangle$ ABC

$$a^2 = b^2 + m^2 - 2m\,.\,\overline{CE}$$

a podobně z $\triangle$ ACD

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2m\,.\,\overline{AF}.$$

Součet obou těchto rovnic lze psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 &= 2m\,[m - (\overline{CE} + \overline{AF})] \\ &= 2m\,.\,\overline{FE} = 2m\,(BJ + JD) \cos\alpha \\ &= 2mn \cos\alpha \qquad (2) \end{aligned}$$

Sečteme-li dvojmoc rovnice (2) a čtyrnásobnou dvojmoc rovnice (1), obdržíme

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4m^2 n^2 \cos^2\alpha$$

$$16\,\triangle^2 = 4m^2 n^2 \sin^2\alpha$$

a tedy součet obou konečně

$$16\,\triangle^2 = 4m^2 n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2.\text{*)} \qquad (3)$$

V čtyrúhelníku z tětiv jest dle známé věty *Ptolemeovy*

$$mn = ac + bd;$$

použijeme-li vzorce tohoto, nabude (3) tvaru

$$\begin{aligned} 16\,\triangle^2 &= 4\,(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\ &= (2ac + 2bd + a^2 - b^2 + c^2 - d^2) \\ &\qquad (2ac + 2bd - a^2 + b^2 - c^2 + d^2) \\ &= [(a+c)^2 - (b-d)^2]\,[(b-d)^2 - (a-c)^2] \\ &= (a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d) \\ &\qquad (-a+b+c+d). \qquad (4) \end{aligned}$$

Zde platí též poznámka, kterou *Möbius* o trojúhelníku vyslovil,**) a

$$-16\,\triangle^2 = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

*) Viz: *Baltzer*, Die Elemente der Mathematik. II. Leipzig, 1878., 5. vydání, str. 133. a dále str. 308. a historické poznámky o čtyřúhelníku z tětiv tamtéž. *Dostor*, Aire d'un quadrilatère quelconque. Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome 7. Pag. 69.

**) Viz Dr. *Studnička*. „O vzorci vyjádřujícím plochu trojúhelníka pomocí stran jeho". Čas. pro pěst. math. a fys. Roč. 1., pag. 253.