Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Bydžovský

O jisté grupě rovinných kollineací. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 1, 25--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123490

Tak jsme viděli, že, vezmeme-li pól O jako v předcházejícím článku, je rovnice Steinerovy hypocykloidy

$$p = 2a \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Volíme-li však průsek os symmetrie $\left(\frac{a}{2} \,\middle|\, 0\right)$ za pól, bude její rovnice *)

$$p = \frac{a}{2} \sin 3\alpha$$

a učiníme-li bod vratu $(2a \mid 0)$ Steinerovy hypocykloidy pólem, bude její tangenciální rovnice

$$p = -2a \sin^3 \alpha.$$

V prvním případě je (M) *kruh* a (M_1) *přímý dvojlist* (čl. 42.). V případě druhém je (M_1) *trojlistá rhodonea* a (M) je *cissoidala.* V třetím případě je (M_1) *„folium simple“* (čl. 37.) a křivka (M) je *cissoida.* Tím je dána souvislost křivek folium simple, přímého dvojlistu a Steinerovy hypocykloidy, jakož i kruhu, cissoidaly a cissoidy.

O jisté grupě rovinných kollineací.

Dr. B. Bydžovský.

I. Transformace kubické křivky.

1. Obecná křivka kubická reprodukuje se osmnácti kollineacemi [1]). Této okolnosti lze velmi výhodně užíti pro studium některých vlastností křivky [2]). S theorií grupy G_{18} těchto kollineací totiž souvisí především theorie jistých skupin bodových na křivce a v rovině vůbec; vedle toho lze studiem grupy dospěti ku velmi všeobecným větám, platícím pro všechny projektivně význačné body křivky [3]).

---

*) Srovnej čl. 41.

[1]) F. Klein, Math. Ann. IV. pg. 354.

[2]) Některé z řady vět zde odvozených jsou již známy odjinud; vytknu je na příslušných místech. Je však zajímavo, že v žádném případě autoři těchto vět neudávají pravý jejich kořen, tkvící právě ve vlastnostech grupy. Souvisí to s tím, že pro geometrické studium kubické formy ternárné nebylo těchto vlastností soustavně užito.

[3]) V. kap. IV. odd. 3.

2. Vyjádříme-li souřadnice bodů křivky parametrem u užitím elliptických funkcí, jsou transformace svrchu zmíněné vyjádřeny vztahem pro parametry [4])

$$u' \equiv \pm u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3} \quad (m, n = 0, 1, 2).$$

Budeme stručně označovati: (m, n) transformace příslušné k prvému, $[m, n]$ transformace příslušné k druhému znaménku.

Složení grupy těchto transformací prozkoumáme co nejstručněji. Jak známo [5]), jsou transformace (m, n) všechny stupně třetího, transformace $[m, n]$ stupně druhého.

Pro skládání transformací platí pravidla, jichž netřeba odvozovati:

a) Dvě transformace třetího stupně dají transformaci téhož stupně; každé dvě tyto transformace jsou záměnné. Vzorcem:

$$(m, n)\,(m', n') = (m', n')\,(m, n) = (m + m', n + n').$$

b) Dvě transformace stupně druhého dávají transformaci stupně třetího dle vzorce

$$[m', n']\,[m, n] = (m' - m, n' - n).$$

c) Dvě transformace různých stupňů dávají za součin transformaci stupně druhého dle vzorců

$$(m, n)\,[m', n'] = [m + m', n + n']$$
$$[m', n']\,(m, n) = [m' - m, n' - n].$$

3. Grupa G_{18} obsahuje podgrupy stupně druhého, třetího, šestého, devátého.

Podgrup stupně druhého je devět, totiž

$$(0, 0), [m, n] \quad m, n = 0, 1, 2;$$

čtyři podgrupy stupně třetího: $(0, 0)$ (m, n) $(2m, 2n)$, kde $2m$, $2n$ nahradíme zbytky těchto čísel vzhledem k modulu 3.

Složíme-li transformace grupy G_3 s libovolnou transformací stupně druhého, na př. $[m', n']$, obdržíme

$$[m', n'], [m + m', n + n'], [2m + m', 2n + n'];$$

místo poslední lze také psáti $[m' - m, n' - n]$.

---

[4]) V. na př. Harnack, Math. Ann. IX. pg. 44.
Halphen, Traité des fonctions elliptiques II. 442.

[5]) Halphen, Math. Ann. XV. pg. 360 sq.

Tyto tři transformace tvoří s transformacemi grupy G_3 grupu stupně šestého G_6. Ježto k téže grupě stupně šestého dospějeme užitím tří transformací stupně druhého, je patrno, že ke každé grupě G_3 přísluší tři grupy G_6; i je jich celkem dvanácte.

O libovolných dvou grupách stupně šestého platí, že

$$G_6 \,.\, G'_6 = G_{18}.$$

Neboť každé dvě grupy G_6 se liší alespoň třemi transformacemi, tak že souhrn obou grup obsahuje alespoň devět transformací, které netvoří grupu (v. dále): jich skládáním tedy vzniknou nové transformace. Nutně pak musíme dojíti ke všem transformacím grupy G_{18}, ježto opak toho by vyžadoval existenci podgrupy, jejíž stupeň by byl > 9.

Podgrupa stupně devátého je jediná, totiž ta, k níž náleží všechny transformace (m, n). Podgrupa G_9 je v grupě invariantní. Je totiž dle předchozích pravidel

$$[m', n']\,(m, n)\,[m', n'] = [m' - m,\ n' - n]\,[m', n']$$
$$= (-m, -n) = (2m, 2n).$$

Zároveň pozorujeme, že transformováním (m, n) obdržíme element náležející téže cyklické grupě stupně 3. Ježto mimo to elementy 3. stupně jsou navzájem záměnné, je patrno, že také všechny podgrupy stnpně 3. jsou v grupě invariantní.

Složení grupy lze tedy vyjádřiti schematem: G_{18}, G_9, G_3, 1; řada indexů je 2, 3, 3.

Ježto tato řada je složena z prvočísel, je grupa metacyklická; to ostatně plyne dle věty Frobeniovy také z toho, že stupeň grupy má tvar $p^n \,.\, q$, kde p, q jsou prvočísla [6]). Z této vlastnosti pak plyne, že musí grupa obsahovati invariantní podgrupu kommutativní [7]); takovou je právě na př. G_9.

II. Geometrický význam transformací G_{18}.

1. Užitím všech transformací grupy na bod, jehož parametr je u — a jejž budeme stručně nazývati bodem u — nabudeme dalších sedmnácti bodů, jež s daným tvoří osmnáctibodovou skupinu vzhledem ke grupě invariantní. Jednotlivé její body

[6]) V. Weber, Lehrb. d. Algebra II. 2hé vyd. str. 33. a 145.

[7]) V. tamtéž, str. 33.

budeme označovati stejně jako transformace, jimiž jsme jich nabyli, tedy na př. $[m, n]$ značí bod, jehož parametr je

$$-u+\frac{2m\omega+2n\omega'}{3}.$$

I vznikne takovým způsobem na křivce nekonečně mnoho skupin osmnáctibodových; nalezneme mezi nimi ty, jichž body nejsou vesměs různé. Totožnost dvou bodů (m, n) a (m', n) nebo $[m, n]$ a $[m', n']$ je vyloučena, vyjímaje pro $m \equiv 0$, $n \equiv 0$. Dva body (m, n) a $[m', n']$ jsou totožny, když

$$u+\frac{2m\omega+2n\omega'}{8} \equiv -u+\frac{2m'\omega+2n'\omega'}{3},$$

t. j. $$u=\frac{2m_1\omega+2n_1\omega'}{6} \quad (m_1, n_1=0, 1, 2, 3, 4. 5).$$

Tím způsobem obdržíme 36 bodů, z nichž každý je invariantní vzhledem k jedné transformaci druhého stupně. Z rovnice

$$\frac{2m_1\omega+2n_1\omega'}{6}=-\frac{2m_1\omega+2n_1\omega'}{6}+\frac{2m\omega+2n\omega'}{3} \tag{1}$$

totiž plyne $m_1 \equiv m$, $n_1 \equiv n$ (mod. 3); každý bod se tedy reprodukuje transformací $[m_1, n_1]$, kde m_1, n_1 jsou čísla příslušná parametru bodu, o nějž běží. Je z toho patrno, že *v tomto případě skupiny 18tibodové přejdou ve skupiny devítibodové*; každý bod této skupiny nutno pokládati za dvojnásobný. Jak ostatně známo, jsou to body inflexní a 27 bodů sextaktických [8]. Plyne odtud: *body sextaktické se rozpadají ve tři skupiny devítibodové, z nichž každá je vzhledem ke grupě invariantní.*

Všechny ostatní skupiny skládají se z bodů navzájem různých.

2. Transformace $[m, n]$ jsou stupně druhého a značí tedy geometricky *kollineace involutorné.* Každá z nich nechává z uvedených 36 bodů čtyři pevné. Neboť obě kongruence

$$m \equiv m_1,\ n \equiv n_1 \ (\text{mod. } 3)$$

mají pro dané m, n řešení

$$m_1=m+3t, \quad n_1=n+3t.$$

Je patrno, že ve vzorci (1) obdržíme parametry stejné jen pro taková m_1, jež jsou shodna dle modulu 6; i obdržíme pa-

[8]) Název Cayley-ův. V. Halphen, Traité II. 420.

rametry různé pro hodnoty

$$m,\ m+3;\ n,\ n+3,$$

což dá celkem čtyři body, totiž

$$u_1=\frac{2m\omega+2n\omega'}{6},\qquad u_2=\frac{2m\omega+2n\omega'}{6}+\omega,$$

$$u_3=\frac{2m\omega+2n\omega'}{6}+\omega',\quad u_4=\frac{2m\omega+2n\omega'}{6}+\omega+\omega'.$$

Mezi čísly m, $m+3$; n, $n+3$ jsou dvě sudá; těm odpovídá bod inflexní. Jsou-li to na př. m, n, je u_1 bod inflexní; ostatní jsou sextaktické a leží na přímce, ježto

$$u_2+u_3+u_4=(m+2)\,\omega+(n+2)\,\omega'\equiv 0.$$

Ježto pak mimo to $u_1+2u_2\equiv 0$, je patrno, že tato přímka je harmonická polára inflexního bodu u_1; i nabýváme výsledku:

Středem každé involuce grupy je bod inflexní, osou pak jeho harmonická polára.

Každá involuce nechává nezměněny také všechny čtyři inflexní přímky bodem tím jdoucí. Z hořejšího pak je patrno, že involuce $[m, n]$ nechává nezměněný inflexní bod m_1, n_1 [9]), kde

$m_1=\frac{m}{2}$ nebo $\frac{n+3}{2}$ a $n_1=\frac{n}{2}$ nebo $\frac{n+3}{2}$ — prvé v případě, že m, resp. n je sudé, druhé v případě, že m, resp. n je liché.

K libovolnému bodu obdržíme s ním sdružený v příslušné involuci promítnutím daného bodu z toho inflexního, jenž je v involuci pevný.

3. Transformace (m, n) jsou stupně třetího a značí tedy geometricky *ternárně cyklické kollineace*. Z dřívějších výkladů plyne, že dvojné body této kollineace neleží na křivce. Avšak nalezneme je snadno. Transformujme inflexní bod m_1, n_1 kollineací (m, n) a jejím čtvercem $(2m, 2n)$. Obdržíme body

$$m_1+m,\ n_1+n;\quad m_1+2m,\ n_1+2n.$$

---

[9]) Označujeme inflexní body stručně m, n; na př. 0, 0; 2, 1 atd.

Tyto dva body leží s prvým bodem na přímce; je patrno, že tato přímka je v kollineaci pevná. Totéž platí o dalších dvou přímkách. Z toho plyne:

Trojúhelník dvojných elementů dané kollineace (m, n) *a* $(2m, 2n)$ *je totožný s jedním inflexním trojstranem* (jehož strany obsahují všech devět bodů inflexních). Tyto trojstrany jsou čtyři; kollineace pak vždy po dvou mají stejné elementy dvojné, tedy celkem právě čtyři trojstrany dvojné.

III. Skupiny tříbodové a šestibodové.

1. Body skupiny 18bodové jsou navzájem v zajímavých vztazích, ke kterým blíže přihlédneme. Všimněme si především skupin tříbodových, totiž těch, jež obdržíme, transformujeme-li bod u postupně kollineací (m, n). Obdržíme trojici bodovou $(0, 0)$, (m, n), $(2m, 2n)$. Tečnový bod bodu u je $-2u$; avšak

$$-2u + u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3} + u + \frac{4m\omega + 4n\omega'}{3} \equiv 0,$$

t. j. oba zbývající body leží na paprsku, jenž prochází tečnovým bodem bodu prvého. Ježto tato úvaha platí pro bod libovolný, plyne odtud věta základní pro skupinu trojbodovou:

Každé dva body takové skupiny protínají křivku v tečnovém bodu příslušném bodu třetímu [10]).

Bod u náleží do čtyř skupin trojbodových, jež odpovídají čtyřem podgrupám G_3; z toho plyne:

Devět bodů skupiny, jež odpovídá podgrupě G_9, *má takovou vzájemnou polohu, že vždy osm z nich leží na čtyřech paprscích svazku, jehož střed je tečnový bod bodu devátého.*

Je patrno, že všech devět bodů leží celkem na 36 paprscích, které vždy po čtyřech procházejí bodem na křivce. Středy příslušných svazků tvoří pak skupinu devítibodovou. Ježto body $[m, n]$ tvoří také skupinu devítibodovou, vyjdeme-li z bodu $-u$, můžeme konečně říci, že všech 18 bodů leží vždy po dvou na 72 paprscích, jež vždy po čtyřech procházejí tečnovými body bodů skupiny a vždy po osmi jednotlivými body skupiny samé.

---

[10]) K této větě vztahuje se pozn. 2. V. Schroeter, Theorie d. eb. Kurven 3. O. str. 281.

2. Uvažme, že grupa G_{18} je transitivní; lze tedy každý bod 18bodové skupiny převésti vhodně volenou kollineací grupy v každý jiný; tedy i každý tečnový v každý jiný a také každou čtveřinu paprsků, o nichž jedná předchozí věta, v každou jinou. Z toho plyne, že *dvojpoměr této čtveřiny je vzhledem ke grupě invariantní.*

Tento dvojpoměr je tedy jednoznačná funkce parametru u mající periody $\frac{2\omega}{3}$, $\frac{2\omega'}{3}$. Lze však snadno ukázati, že nikdy dva z paprsků čtveřiny nesplynou. To by mohlo nastati jen, když některé body skupiny splynou, tedy jen pro některou ze čtyř skupin nahoře nalezených (v. II. 1.). Ale pro inflexní body tyto čtveřiny jsou čtveřinami inflexních paprsků, jež procházejí jedním inflexním bodem; pro body sextaktické čtveřiny různých paprsků, které procházejí inflexním bodem a jsou nosiči osmi bodů téže devítibodové (v. tamtéž) skupiny sextaktické.

Ježto dva paprsky čtveřiny v žádném případě nesplynou, nemůže dvojpoměr jich nikdy se státi nekonečným; ježto je zároveň jednoznačnou funkcí, je *nutně konstantní.*

3. Totéž lze dokázati analyticky, při čemž obdržíme zároveň hodnotu dvojpoměru. Vyjdeme z bodu u; jeho tečnový je $-2u$; jím procházejí čtyři paprsky, na nichž leží ostatní body skupiny vždy po dvou takto:

$$u \pm \frac{2\omega}{3}, \quad u \pm \frac{2\omega'}{3}, \quad u \pm \frac{2\omega + 2\omega'}{3}, \quad u \pm \frac{2\omega + 4\omega'}{3}.$$

Označíme souřadnice bodu tečnového x', y' ostatních čtyř bodů se znaménky $+$

$$x_i, \; y_i \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Přímka vedená body x', y'; x_i, y_i stanoví na ose X úsek

$$x^{(i)} = \frac{y' x_i - x' y_i}{y' - y_i},$$

a hledaný dvojpoměr má hodnotu

$$\lambda = \frac{x^{(1)} - x^{(3)}}{x^{(2)} - x^{(3)}} \cdot \frac{x^{(2)} - x^{(4)}}{x^{(1)} - x^{(4)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}}. \tag{1}$$

Jestliže na pravé straně vyjádříme souřadnice elliptickými funkcemi [11]), můžeme užíti známého vztahu

$$\begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \\ 1 & pw & p'w \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u-v)\,\sigma(v-w)\,\sigma(w-u)\,\sigma(u+v+w)}{(\sigma u \sigma v \sigma w)^3}.$$

Učiníme-li tak pro všechny čtyři determinanty v (1) a nahradíme u, v, w příslušnými argumenty, vidíme ihned, že jmenovatelé se vesměs krátí; mimo to se krátí všechny σ-funkce, jichž argumentem je rozdíl, v němž přichází argument bodu x', y', ježto minory s řádkou x', y' jsou v čítateli i ve jmenovateli tytéž. Zbudou tedy jen σ-funkce typu $\sigma(v-w)$ a $\sigma(u+v+w)$, celkem čtyři v čítateli a čtyři ve jmenovateli, tak že

$$\lambda = \frac{\sigma\left(\frac{2\omega'}{3}\right)\sigma\left(\frac{4\omega+2\omega'}{3}\right)\sigma\left(\frac{2\omega+2\omega'}{3}\right)\sigma\left(\frac{2\omega}{3}+2\omega'\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega}{3}\right)\sigma\left(\frac{2\omega+4\omega'}{3}\right)\sigma\left(\frac{4\omega'}{3}\right)\sigma\left(\frac{4\omega+4\omega'}{3}\right)}. \quad (2)$$

Tento výraz neobsahuje u, *je tedy* λ *skutečně konstantní.* Ježto pak

$$\sigma\left(\frac{4\omega'}{3}\right) = e^{\frac{2\eta'\omega'}{3}}\,\sigma\left(\frac{2\omega'}{3}\right)$$

$$\sigma\left(\frac{2\omega}{3}+2\omega'\right) = e^{2\eta'\left(\frac{2\omega}{3}+\omega'\right)}\,\sigma\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

$$\sigma\left(\frac{4\omega+4\omega'}{3}\right) = e^{2(\eta+\eta')\frac{\omega+\omega'}{3}}\,\sigma\left(\frac{2\omega+2\omega'}{3}\right)$$

$$\sigma\left(\frac{4\omega+2\omega'}{3}\right) = e^{-2(\eta+\eta')\frac{\omega'-\omega}{3}}\,\sigma\left(\frac{2\omega+4\omega'}{3}\right),$$

zkrátí se po dosazení všechny σ-funkce a vyjde

$$\lambda = e^{\frac{4}{3}(\omega\eta'-\eta\omega')} = e^{\pm\frac{4}{3}\frac{\pi i}{2}} = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} = \sqrt[3]{1}.$$

Odtud plyne: *Čtveřiny paprsků nahoře zavedené jsou aequianharmonické.*

Tím jsme doplnili větu výše odvozenou, která vyjadřuje vlastnost devítibodových skupin na křivce. (Dokončení.)

---

[11]) Na př. dle Burkhardt, Elliptische Funktionen, pg. 330; a sice ve tvaru $x = pu$, $y = p'u$.