Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. Najman

Lom světla v čočkách a centrických systémech. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 1, 101--110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123486

Lom světla v čočkách a centrických systémech.

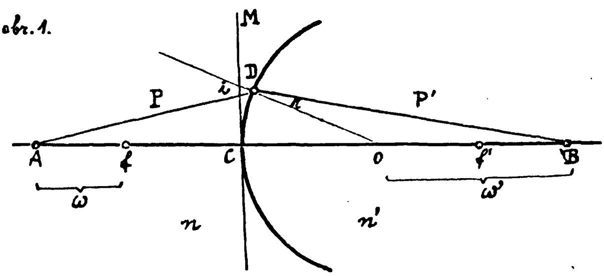
Napsal prof. J. **Najman** z Rakovníka.

Geometrická optika podává nám, jak známo, na základě zcela jednoduchých předpokladů, vztahujících se k přímočarému šíření, odrazu a lomu světla, často zúplna postačující vysvětlení elementárních úkazů světelných bez bližší znalosti přesné theorie a proto hodí se zvláště pro výklady středoškolské. Poněvadž pak zajímavější partie jednající o lomu světla probrány jsou v učebnici Reiss-Theurerově jen potud, pokud jde o lom světla na jediné ploše sférické a v tenkých čočkách, bude snad vhodno provésti ve formě geometrické optiky obšírnější rozbor lomu světla v čočkách silných a centrovaných systémech.

1. Lom světla jednou plochou sférickou.

Přirozeným podkladem pro zmíněný rozbor jsou důsledky lomu světla na jediné ploše sférické. Máme-li 2 prostředí o absolutních indexech lomu n a n', jež jsou oddělena od sebe sférickou plochou (obr. 1.), najdeme k dopadajícímu paprsku P paprsek lomený P' dle zákona Snelliova, dle něhož

obr. 1.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n'}{n},$$

odkudž lze najíti k úhlu dopadu i úhel lomu r zcela přesně. Aby však výpočty vypadly jednodušeji, omezujeme se na tak zv. paprsky centrální, t. j. takové, kde paprskový svazek vychází ze svítícího bodu na ose nebo poblíže osy, jest poměrně úzký a svírá s optickou osou jen malý úhel. Pro tyto platí zjednodušený zákon

$$\frac{i}{r} = \frac{n'}{n}.$$

Omezení to děje se z důvodů těchto: Při úzkém svazku odpadá tak zv. vada sférická, jež záleží v tom, že paprsky vyšlé ze svítícího bodu v širokém svazku neprotínají se po lomu v bodě jediném, nýbrž v celé ploše tak zv. diakaustické, takže jedinému svítícímu bodu přísluší jako obraz celá plocha, při svazcích úzkých stáhne se však diakaustická plocha v jediný bod (lépe řečeno v malou světlou plošku a to vlivem ohybových zjevů). Druhá podmínka je položena proto, že při svazcích značně od osy odkloněných vzniká tak zv. chyba astigmatismu, t. j. světlo vyšlé z jediného bodu svítícího po lomu setká se ve *dvou* krátkých úsečkách k sobě kolmých, takže ku jedinému svítícímu bodu patří pak obrazy dva. Rovněž nehledíme ku vadě chromatické. Jen tehda, je-li zmíněným podmínkám vyhověno, bude ku *jednomu* svítícímu bodu A co předmětu náležeti v prostoru obrazovém zase *jediný* světlý bod B co obraz. Jinak řečeno: Paprsky homocentrické po lomu zůstanou opět homocentrickými. Ježto při lomu (podobně jako při odrazu) světla platí, že, stane-li se paprsek lomený dopadajícím, stane se bývalý paprsek dopadající lomeným, jest příslušnost předmětu A a obrazu B vzájemná, a proto zoveme ty body sdruženými*).

Značí-li x vzdálenost předmětu, x' vzdálenost obrazu, R poloměr sférické plochy, a počítáme-li všecky tyto úsečky na pravo od vrcholu sférické plochy C kladně, platí mezi vzdáleností předmětu a obrazu známý vztah:

$$-\frac{1}{x} + \frac{\frac{n'}{n}}{x'} = \frac{\frac{n'}{n} - 1}{R} \quad \text{či} \quad -\frac{n}{x} + \frac{n'}{x'} = \frac{n' - n}{R} \qquad (1)$$

Pro $x = \infty$ jest v rovnici (1)

$$x' = \overline{Cf'} = \frac{n'R}{n' - n} = f',$$

*) V projektivní geometrii nazýváme takovouto lineární (jednoznačnou) příslušnost bodů prostoru předmětového a obrazového kollineací.

t. j. světlo vycházející z bodu na ose po levé straně nekonečně vzdáleného jde jistým bodem f', který nazýváme druhým ohniskem sférické plochy a vzdálenost jeho od vrcholu sférické plochy druhou ohniskovou vzdáleností f'. (Ohnisko i ohniskovou vzdálenost označujeme týmž písmenem k vůli jednoduchosti.) Pro $x' = \infty$ jest

$$x = \overline{Cf} = -\frac{nR}{n' - n} = f;$$

bod f, v němž se sbíhají paprsky jdoucí z nekonečně vzdáleného bodu na ose v pravo jest předním ohniskem, a vzdálenost jeho od vrcholu $\overline{Cf} = f$ přední ohniskovou vzdáleností sférické plochy.

Dělíme-li rovnici (1) členem stálým, dostaneme pro závislost distance předmětu a obrazu poměrně jednoduchý vztah.

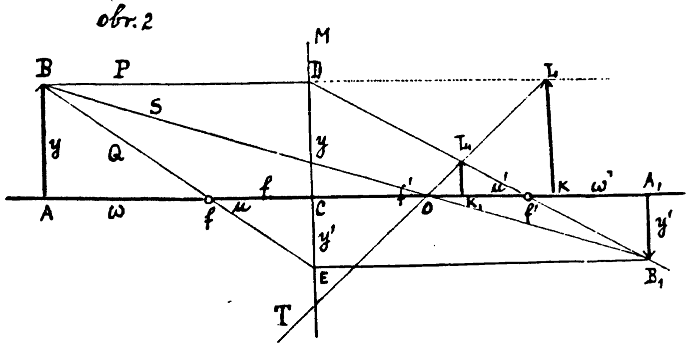
$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1; \text{ podíl } \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \tag{2}$$

je stálý, záporný a roven poměru příslušných indexů lomu. Leží tedy ohniska sférické plochy vždy na opačných stranách od osy, ať je R kladné nebo záporné, t. j. ať je sférická plocha konvexní nebo konkávní. Je patrno, že sférická plocha působí jako spojka, to jest sbírá rovnoběžné paprsky v ohnisku *skutečně* jen tehda, je-li střed křivosti 0 umístěn v hustším mediu, neboť jen potom jest f' kladné (v pravo od C), protože pak R a $n' - n$ mají stejná znaménka. Spadá-li střed křivosti do prostředí řidšího, jest f' záporné (v levo od C) a sférická plocha působí jako rozptylka, ježto rovnoběžné paprsky s levé strany dopadající protínají se po lomu (ovšem jen v prodloužení) na straně levé a musí se tudíž v pravo rozbíhati. V tomto druhém případě má sférická plocha obě ohniska nikoliv reálná jako v případě předchozím, nýbrž virtuálná.

Jestliže v obrazu (1) osciluje optická osa kol bodu 0 odchylujíc se od polohy původní jen o malé úhly, budou probíhati body A, B, f a f' po malých sférických plochách kolmých k optické ose. Poněvadž pak optická osa v nové poloze zůstává osou optickou, jsouc kolmou ke sférické ploše, neporuší se v nové poloze vzájemná příslušnost bodů A a B jako předmětu a obrazu. Nahradíme-li ony malé sférické plochy elementy rovin k optické ose kolmých, lze tudíž říci, že svítícímu bodu v rovině kolmé položené bodem A je přidružen jako obraz nějaký bod v rovině kolmé položené bodem B; takové roviny zoveme rovněž sdruženými. Spokojíme-li se tedy s malou odchylkou paprsku, lze mluviti zde o sdružených k sobě rovinách předmětových a obrazových k ose kolmých. Lineárnímu elementu jakožto předmětu v rovině A bude příslušeti jako obraz krátká úsečka v rovině B.

Též tečná rovina M ve vrcholu C může nahrazovati sférickou plochu, omezíme-li se na paprsky centrální. Konstrukce obrazu lineárního předmětu $\overline{AB}$ dá se pak převésti tak, jak znázorňuje obraz 2. Vedeme z bodu B paprsek S zvaný hlavním

obr. 2



který prochází středem křivosti nelomen dopadaje kolmo na sférickou plochu a paprsek vedlejší P, jdoucí rovnoběžně s osou, který po lomu probíhá druhým ohniskem f'. V průseku paprsků obou vzniká bod B_1, obraz to bodu B. Tímto bodem B_1 musí procházeti též paprsek Q, který prošed prvním ohniskem postupuje v druhém prostředí s osou paralelně. Obraz bodu A jest pak na kolmici z bodu B_1 na osu spuštěné (bod A_1). Dostane-li se předmět (ku př. $\overline{KL}$) za sfér. plochu, je nutně virtuálný a je tvořen konvergentními paprsky P a T, jež na sférickou plochu dopadají a dávají vznik jeho reálnému obrazu $\overline{K_1L_1}$, který si najdeme zcela obdobně. Ku předmětu v rovině M patří kryjící se s ním obraz vzpřímený, jak snadno lze nalézti. Proto se zove rovina M rovinou hlavní.

Poměr velikosti obrazu ku velikosti předmětu, t. j. $\frac{y'}{y}$ zoveme příčným zvětšením; počítáme-li pořadnice y a y' nahoru od osy kladně a dolů záporně, pak jest při předmětu $\overline{AB}$ zvětšení záporné a při předmětu $\overline{KL}$ kladné. Toto zvětšení je v týchž dvou sdružených rovinách, ku př. A a A_1 stálé, neboť mění-li se velikost předmětu y v rovině A, mění se touž měrou velikost obrazu v rovině A_1 (bod 0 je středem podobnosti); pro každý jiný pár sdružených rovin je tento poměr sice také stálý, ale od předchozího rozdílný.

Jak patrno z obrazu (2), dá se výraz pro ohniskové dálky napsati též v této formě:

$$f = \frac{y'}{tg\, u}, \qquad f' = \frac{y}{tg\, u'}. \tag{3}$$

Dle toho jest přední ohnisková dálka rovna poměru velikosti obrazu ku tangentě úhlu, který svírá vytvářející jej paprsek při průchodu prvým ohniskem s optickou osou; druhá ohnisková dálka jest pak poměr velikosti předmětu ku tangentě úhlu, který svírá paprsek vytvářející příslušný k němu obraz při průchodu druhým ohniskem.

Srovnáme-li prvou z rovnic (2) s rovnicí přímky v úsekovém tvaru

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

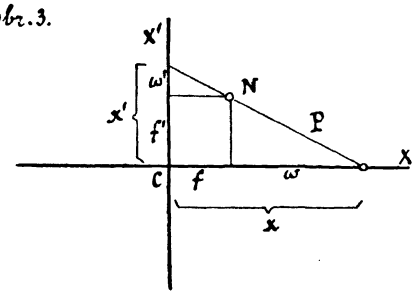
vidíme, že rovnice (2) představuje nám přímku, jež procházejíc bodem N o souřadnicích f a f' odetíná na osách X a X' úseky x a x'. Můžeme tudíž rovnici (2) graficky diskutovati, t. j. k dané vzdálenosti předmětu x najíti vzdálenost obrazu x', otáčíme-li v obr. 3. přímkou P kol bodu N. V témž obrazci obdržíme z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{\omega}{f'} = \frac{f}{\omega'} \text{ anebo } \omega \,.\, \omega' = f \,.\, f' \,^{*}), \tag{4}$$

kdež ω a ω' značí vzdálenosti předmětu a obrazu od příslušných ohnisek. Jest tedy u sférické plochy lámavé dle rovnice (4) součin vzdáleností předmětu a obrazu veličinou stálou, rovnou součinu obou ohniskových distancí. Tato konstanta je zde zápornou, ježto ohniskové vzdálenosti u sférické plochy lámavé mají znaménka opačná. Budeme počítati nadále ω a ω' a důsledně též ohniskové vzdálenosti f a f' od příslušných ohnisek na pravo kladně a v levo záporně; potom bude v obrazci (2) prvá ohnisková dálka $\overline{fC}$ kladnou a druhá ohnisková dálka $\overline{f'C}$ zápornou. Z téhož obrazce lze snadno na základě podobnosti trojúhelníků odvoditi výraz pro příčné zvětšení:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\omega'}{f'} = \frac{f}{\omega}. \tag{5}$$

obr. 3.



Zvětšení příčné lze též vyjádřiti souřadnicemi x a x', neboť v obrazci (2):

$$\frac{-y'}{\overline{DE}} = \frac{f}{x}, \quad \frac{y}{\overline{DE}} = \frac{f'}{x'}$$

a ježto

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n},$$

bude:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}\,\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}\,\frac{x'}{x}. \tag{6}$$

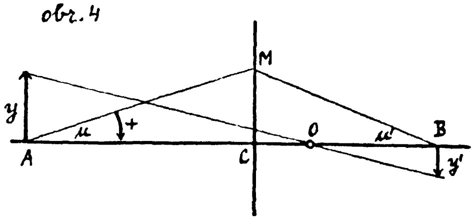
Výhodno bude pro další úvahy zavésti též pojem *zvětšení úhlového*. To je dáno výrazem $\frac{tg\, u'}{tg\, u}$ (obr. 4.); jest to poměr

---

*) Páry jednoznačně sdružených bodů na ose optické, z nichž si každý přísluší jako předmět a obraz, lze pokládati za 2 soumístné, projektivní řady bodové. Rovnice (4) pak značí, že součin vzdáleností dvou sdružených bodů od bodů centrálních je stálý. Body centrální jsou body přidružené bodům ∞ vzdáleným. Zde to jsou ohniska.

tangent úhlů, pod kterými vybíhá paprsek v bodech sdružených (ku př. A a B) nad optickou osu. Úhly μ a μ' počítáme od paprsku k ose ve směru rafie za kladné, v obráceném směru za záporné. Bude tedy v obrazci (4) μ kladné, μ' záporné.

obr. 4



Ježto

$$\overline{MC} = - x\, tg\, u = x'\, tg(-\mu'),$$

jest

$$\frac{x'}{x} = \frac{tg\, u}{tg\, u'};$$

dle rovnice (6) jest pak příčné zvětšení:

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{tg\, u}{tg\, u'};$$

odtud, dosadíme-li za $\frac{n}{n'}$ z rovnice (2) a za $\frac{y}{y'}$ z rovnice (5)

$$\frac{tg\, u'}{tg\, u} = \frac{n}{n'} \frac{y}{y'} = -\frac{f}{f'} \cdot \frac{f'}{\omega'} = -\frac{f}{\omega'} = -\frac{\omega}{f'} \qquad (7)$$

dle rovnice (4).

Hořejší výraz vede nás k důležité rovnici odvozené poprvé Lagrangem:

$$y n\, tg\, u = y' n'\, tg\, u'; \qquad (8)$$

nazveme-li v ní $n\, tg\, u$ optickým sklonem paprsku, vidíme, že součin optického sklonu a velikosti příslušného předmětu resp. obrazu je pro obě prostředí veličinou stálou obr. 4. Je to veličina, která zůstane stálou také tehda, prochází-li světlo celou řadou prostředí, omezených sférickými plochami o společné optické ose.

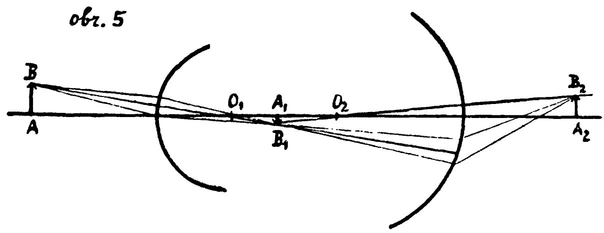
Základní rovnice (4) a (5) podávají nám umístění a velikost obrazu k danému předmětu při lomu na ploše sférické.

Rozbor rovnic těch však prováděti nebudeme, poněvadž podobné rovnice budeme diskutovati později, a protože se lom světla jedinou plochou sférickou naskýtá v praksi zřídka.

2. Lom světla v centrovaném systému optickém.

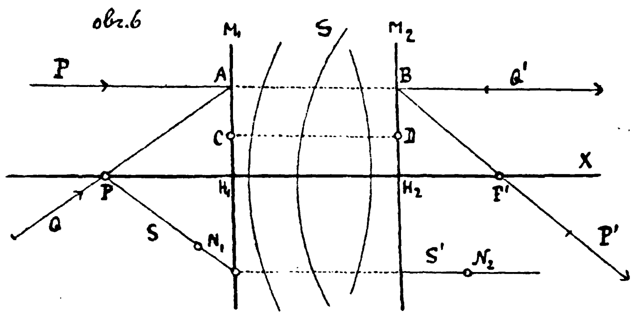
Centrovaným systémem optickým rozumíme řadu průhledných ústředí o různé lomivosti, omezených sférickými plochami, jichž středy křivosti leží na společné přímce zvané optickou osou. Tu se nám především naskýtá otázka, zda paprsky homocentrické také po průchodu tímto systémem se opět setkají v jediném bodě, jako tomu bylo u jedné sférické plochy, když připustíme ovšem zase jenom paprsky centrální.

obr. 5



Obraz (5) představuje nám takový systém o třech různých prostředích a v něm AB krátkou svítící linii kolmou k ose. Úzký svazek paprsků centrálních, vycházející z bodu B a obklopující paprsek hlavní (silněji vytažený), setká se po lomu na prvé sférické ploše s paprskem hlavním, jak víme, zase v jediném bodě B_1, obrazu to bodu B. Obraz $\overline{A_1B_1}$ předmětu $\overline{AB}$ bude též k ose kolmým. Svazek paprsků z B_1 v před postupující nemá sice ve svém středu paprsek hlavní, který by šel středem křivosti o_2 druhé plochy sférické, ale my ho můžeme považovati při daném omezení na paprsky centrální, jež se od osy mnoho neuchylují, za část úzkého svazku, jehož hlavní paprsek jde bodem o_2 a proto se paprsky po druhém lomu zase setkají v jednom bodě B_2. Bodu B bude přislušeti po lomu na obou sférických plochách jediný bod B_2 jako obraz; podobně úsečce $\overline{AB}$ obraz $\overline{A_2B_2}$ rovněž k ose kolmý. Omezíme-li se tedy na paprsky centrální, dá se předmětový prostor (na levo) zobraziti centrickým systémem tak, že bodu svítícímu v něm je přiřaděn v prostoru obrazovém (na pravo) zase jediný bod co obraz a kolmé k ose rovině zase kolmá rovina s předešlou sdružená. V takových dvou sdružených rovinách bude příčné zvětšení zase stálé.

Odtud plyne existence ohnisek centrického systému sama sebou. Nekonečně vzdálenému bodu na ose (v levo), který vysílá paprsky s osou rovnoběžné, bude přiřaděn jako obraz bod F', kterému říkáme druhé ohnisko. Podobně jistému bodu F na ose (prvé ohnisko) bude přiřaděn bod nekonečně vzdálený, t. j. paprsky jím prošlé po lomu systémem budou probíhati s osou rovnoběžně. Tedy také roviny ohniskové jsou přidruženy k rovinám nekonečně vzdáleným. Dopadá-li tedy paprsek P na systém S rovnoběžně s osou, prochází jeho lomený paprsek P' bodem F'. Podobně lomenému paprsku Q', který vystupuje ze systému



v prodloužení paprsku P, musí býti přidružen dopadající paprsek Q jdoucí předním ohniskem F. Poněvadž paprsky P a Q vyšlé z bodu A v prostoru předmětovém po výstupu ze systému znova se protínají v bodě B v prostoru obrazovém, jest bod B obrazem bodu A, při čemž spojnice $\overline{AB} \parallel X$. Vedeme-li body A a B roviny M_1 a M_2 kolmo k ose, je na nich podobně D obrazem bodu C, při čemž $\overline{CD} \parallel X$; bodu H_1 přísluší bod H_2. Obrazem úsečky $\overline{H_1A}$ v prvé rovině bude úsečka $\overline{H_2B}$ v rovině druhé; předmět i obraz budou stejně veliky a stejně položeny. Roviny M_1, M_2 mající tuto vlastnost zoveme *rovinami hlavními* a jich průseky s osou H_1 a H_2 *body hlavními*. Rovina hlavní nemůže procházeti ku př. bodem N_1, neboť potom jest obraz jeho N_2 nutně položen někde na paprsku S' a pak nemá od osy stejnou vzdálenost jako N_1. Jsou tedy hlavní roviny M_1 a M_2 pro daný systém (ku př. čočku) pevnými a neměnitelnými.

(Pokračování.)

Mosaika.

Sešli jste se, mladí přátelé, po prázdninách osvěženi delší vítanou přestávkou ve svých třídách, druh druha uvítal, a když snad některý scházel, víte, že odešel na jiný ústav, ale že jest jinak živ a zdráv. Mluviti u vás mladých a jarých o nemoci anebo dokonce smrti bylo by tak, jako boháči vykládati o hladu, když sedí při plné tabuli. Něco jiného je u nás starších, když již ta šedesátka se přiblížila nebo překročila. Když my po prázdninách se sejdeme, ohlížíme se kolem, jako bychom se tázali: jsme zde ještě všichni? a obyčejně to bývá, že předseda té neb oné z našich vědeckých korporací zahájí sedění smuteční upomínkou na některého z druhů zemřelých. Letos o prázdninách zemřel Nestor lékařské fakulty naší university dvorní rada *Bohumil Eiselt.* Narodil se dne 28. srpna 1831, skonal dne 22. srpna, dosáhl tedy bezmála 77 let věku požehnaného. Jeho rodina jest lékařskou v eminentním slova smyslu; jeho otec byl lékař, jeho oba synové, *Artur* a *Rudolf* jsou lékaři, a i jeho zeť, náš *Maixner*, jest lékařem. Když se o letošních svátcích svatodušních konal v Praze IV. sjezd českých přírodozpytců a lékařů, jehož předsedou byl právě prof. Dr. *Maixner*, byl *Eiselt* předmětem všeobecné pozornosti a přinášeny mu nadšené ovace jakožto organisátoru vědeckých prací lékařských a odchovateli přečetných žáků, z nichž mnozí vynikají jako slavní doktoři, učenci nebo praktikové. Nikdo se nenadál, že ovace tyto budou jako pozdravem na rozloučenou! O jeho zásluhách, pokud se týkají zřízení samostatné české university jakožto pokračování staré Karlo-Ferdinandské Almae Matris promluvil též *Jar. Goll* ve své řeči, kterou jako rektor této university měl v Aule při své installaci 19. listopadu 1907. A co bych měl říci o jeho povaze? znal jsem ji lépe než jiní, tuto povahu ryzí, šlechetnou,