Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 3, 135--139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123478

$$A = \int_0^z x dz, \quad B = \int_0^z y dz$$

a jest tedy patrno, že hodnota integrálu A znázorněna jest ploským obsahem, omezeným osami X, Z a křivkou K_1 v mezích od 0 do z; obdobně znázorníme integrál B pomocí křivky K_2.

Na základě tohoto znázornění možno vyvinouti příhodná pravidla k přibližnému vyčíslení obou integrálů.

(Записки Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Одесса. Том VI. стр. 57).

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal p. *Jan Petříček*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Vyvinuvše determinant a vyjádřivše sinusem a cosinusem úkony ostatní, upravíme rovnici danou na tvar

$$(\cos x - \sin x)\left(1 - \frac{2}{\sin 2x}\right) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x},$$

kteráž rovnice ve dvě se rozpadá.

Je-li

$$\cos x - \sin x = 0, \tag{1}$$

jest, dbáme-li pouze úhlů menších než 4 R,

$$x_1 = 45^0, \quad x_2 = 225^0.$$

Rovnici druhé

$$1 - \frac{2}{\sin 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} \tag{2}$$

lze dáti podobu

$$\sin 2x - 2 = \sqrt{1 + \sin 2x}$$

čili

$$\sin^2 2x - 5 \sin 2x + 3 = 0;$$

odtud vypočítáme

$$\sin 2x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ve výrazu posledním sluší vzíti znaménko spodní, má-li x býti realné; při tom ještě sluší toho dbáti, že výraz $\cos x + \sin x$

dle rovnice (2) jest znaménka protivného se $\sin 2x$. Za těchto podmínek najdeme

$$x_3 = 202^\circ 6' 7'', \quad x_4 = 247^\circ 53' 53''.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Nušl* z VIII. tř. v Jindř Hradci, *Karel Petr* a *L. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi, *Václav. Kraus* a *Josef Vančura* z VIII. tř. v Č. Budějovicích, *Josef Kutík* ze VII. tř. r. a *Frant. Tomášek* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Frant. Šoreys* ze VI. tř. a *J. Lauschmann* z VIII. tř. v Příbrami, *Jaroslav Ších* ze VII. tř. r. v Brně, *Frant. Štiller* a *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Boh. V. Dědek, K. A. Klír* ze VII. tř. vyšší real. šk. v Praze a *Innocenc Smýkal* ze VI. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 2.

(Zaslal p. *Frant. Štiller*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Znázornivše si úlohu obrazcem, snadno poznáme, že jest $\overline{a_1 a_2} = d \cos \alpha$, $\overline{a_2 a_3} = d \cos 2\alpha$, $\ldots$, $\overline{a_{n-1} a_n} = d \cos (n-1)\alpha$; proto jest délka lomené čáry

$$L = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n = d\,[1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos (n-1)\alpha].$$

Známo však, že

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos (n-1)\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

v našem případě jest pak

$$\alpha = \frac{R}{n}, \quad (n-1)\alpha = R - \alpha$$

a tedy hledaná délka

$$L = d\,\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = r\left(1 + \cot \frac{\alpha}{2}\right).$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Jaroslav Ších* ze VII. tř. a *Karel Maroušek* z VI. tř. r. v Brně, *Frant. Nušl* z VIII. tř. v Jindřichově Hradci, *J. Lauschmann* z VIII. tř. v Příbrami, *Jos. Vančura* z VIII. tř. v Českých Budějovicích, *Karel Janoušek*, *Karel Petr* a *L. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi, *Frant. Tomášek* z VIII. tř. g., *Josef Kutík* a *Jan Petříček* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně a *Innocenc Smýkal* ze VI. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal pan *Bohumil Novák,* stud. VII. tř. v Táboře.)

Poloměry základen při kuželi komolém označme x, y, poloměr vepsané koule buď z. Strana kužele jest $x+y$, protož dle podmínek daných

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4z^2,$$
$$(x+y) : 2z = z : 24;$$

z poměru obsahů jde pak

$$\frac{4}{3}\pi z^3 : \frac{2}{3}\pi z (x^2 + xy + y^2) = 8 : 21.$$

Zjednodušivše tyto tři rovnice, upravíme je v podobu

$$xy = z^2, \quad xy = 12(x+y),$$
$$4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0,$$

a vypočítáme odtud

$$x = 60, \quad y = 15, \quad z = 30.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Hlaváč* a *Josef Stryhal* ze VII. tř. g. v Nov. Bydžově, *K. Klír* a *B. V. Dědek* ze VII. tř. české vyšší real. šk. v Praze, *Karel Herzán, Frant. Štiller* a *Viktor Nejdl* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Frant. Nušl* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Josef Kutík* a *Jan Petříček* ze VII. tř. r. a *Frant. Tomášek* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Frant. Šoreys* ze VI. tř. g. v Příbrami, *Karel Petr, L. Novotný* a *Karel Janoušek* z VIII. tř. v Chrudimi, *Jaroslav Šich* ze VII. tř. r. v Brně, *Václav Čáslavský, Jan Kučera* ze VII. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Innocenc Smýkal* ze VI. tř. g. v Litomyšli, *Jan Minks* z VIII. tř. v Kroměříži a *Frant. Žaloudek,* stud. v Praze.

Řešení úlohy 4.

(Zaslal pan *Jaroslav Šich,* stud. VII. tř. r. v Brně.)

Zvolme půdici $\overline{ab} = 2m$ osou X, střed její o počátkem pravoúhlé soustavy souřadné; souřadnice bodu c buďtež x, y. Potom jest

$$\overline{ac} = \sqrt{(x+m)^2 + y^2}, \quad \overline{bc} = \sqrt{(x-m)^2 + y^2},$$
$$\overline{oc} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\overline{ac}\,.\,\overline{bc}}.$$

Rovnice hledaného místa měřického jest tedy
$$(x^2+y^2)^2=(x^2+y^2+2mx+m^2)(x^2+y^2-2mx+m^2),$$
kterou lze jednodušeji psáti
$$x^2-y^2=\frac{m^2}{2};$$
patrno odtud, že geom. místo vrcholu c jest pravoúhlá hyperbola, jejíž ohniska jsou body a, b.

Pan *J. Petříček*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, podal řešení toto:

Značíme-li strany daného trojúhelníka abc písmenami protějších vrcholů, příčku $\overline{cd}=p=\sqrt{ab}$ a $\sphericalangle cdb=\varphi$, jest
$$a^2=p^2+\frac{c^2}{4}-pc\cos\varphi$$
$$b^2=p^2+\frac{c^2}{4}+pc\cos\varphi.$$
Sečtením a dosazením hodnoty za p obdržíme
$$(a-b)^2=\frac{c^2}{2}\text{ čili } a-b=\frac{c}{\sqrt{2}}.$$
Z toho zřejmo, že žádané místo bude hyperbola pravoúhlá, jejíž ohniska jsou body a, b a délka hlavní osy $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$.

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Šoreys* ze VI. tř. g. v Příbrami, *Václav Kraus* a *Josef Vančura* z VIII. tř. v Č. Budějovicích, *Frant. Hlaváč* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově, *Karel Petr, Karel Janoušek* a *L. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi, *Frant. Nušl* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Karel Herzán* a *Frant. Štiller* ze VII. tř. r. v Karlíně, *K. A. Klír* ze VII. tř. č. vyšší r. šk. v Praze, *Innocenc Smýkal* ze VI. tř. g. v Litomyšli, *Jos. Novotný*, stud. ve Vídni a *Frant. Žaloudek*, stud. v Praze.

Úloha 13.

Zlomek $\frac{349}{105}$ rozložiti v součet tří zlomků s různými jmenovateli tak, aby součet čítatelů rovnal se součtu jmenovatelů.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 14.

Má se řešiti rovnice:
$$a^2(2x-a)^2-3(x^2-a^2)(x^2-4ax+5a^2)=0.$$

Prof. *Václ. Jeřábek.*

Úloha 15.

Má se upraviti k počítání logarithmickému:

$$1 + 2 \cos \alpha .$$

Prof. *Karel Pánek.*

Úloha 16.

Ve které závislosti jsou úhly α, β, γ, je-li

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & 1 \\ \cos\gamma, & 1, & \cos\beta \\ 1, & \cos\gamma, & \cos\alpha \end{vmatrix} = 0 ?$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 17.

Strana určitého pravidelného mnohoúhelníka rovná se přibližně čtvrtině poloměru opsané kružnice. Kolik stran má onen mnohoúhelník a jak přesné jest ono udání? *Týž.*

Úloha 18.

Vedeme-li v trojúhelníku ABC výšku AH, příčku AD, úhel A půlící a medianu AM, jest

$$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{HM}} = \frac{a^2}{(b+c)^2} .$$

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 19.

Jest-li v trojúhelníku ABC úhel A roven trojnásobnému úhlu B platí relace

$$a^3 + b^3 = b\,(a^2 + ab + c^2).$$

Týž.

Úloha 20.

Na vodorovné desce spočívá koule; v kterém úhlu musí na desku dopadati paprsky sluneční, aby plocha stínu koulí vrženého rovnala se ploše vlastního stínu na kouli?

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 21.

Dokázati věty:

a) Jsou-li body $b_1, b_2, \ldots, b_6$ středy stran libovolného šestiúhelníka, mají trojúhelníky $b_1 b_3 b_5$ a $b_2 b_4 b_6$ společné těžiště.

b) Jsou-li body $b_1, b_2, \ldots, b_8$ středy stran libovolného osmiúhelníka, protínají se mediany (příčky spojující středy protějších stran) čtyrúhelníků $b_1 b_3 b_5 b_7$ a $b_2 b_4 b_6 b_8$ v témž bodu.

Týž.