Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

O teorii Markovových řetězů a o integraci lineárních transformací

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 6, 167--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123462

O teorii Markovových řetězů a o integraci lineárních transformací.

Bohuslav Hostinský.

(Obsah dvou přednášek konaných ve dnech 25. a 26. října ve schůzích matematické sekce JČMF v Praze.)

(Došlo 10. ledna 1934.)

Úvod. Pojem řetězu. — O Markovových řetězech pojednal jsem obšírně ve svých dřívějších pracích.*) Připomenu nyní jen stručně základní pojmy a princip Markovova důkazu z r. 1907, jenž právě nedávno byl s úspěchem aplikován k dalšímu prohloubení teorie, a pak pojednám o některých doplňcích, kterými několik autorů v posledních letech přispělo k jejímu zdokonalení.

Přidržme se geometrické interpretace problému, jenž v jádře není nic jiného než problém Brownova pohybu.

Budiž M pohyblivý bod, který má v daném okamžiku jednu z poloh $A_1, A_2, \ldots, A_r$; body A_i jsou pevné a předem dány. Přechod bodu M z jedné z těchto poloh do druhé závisí na náhodě. Sledujme bod M, jenž koná řadu takových „skoků“. Nechť je před skokem v poloze A_i a po něm v poloze A_k; pravděpodobnost tohoto skoku budiž p_{ik}. Předpokládáme, že $p_{ik} > 0$ a že závisí jen na indexech i a k. Podle věty o úhrnné pravděpodobnosti jest

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1; \; i = 1, 2, \ldots, r. \tag{1}$$

Představme si nyní, že pohyblivý bod vykoná n takových skoků postupně a budiž $P_{ik}^{(n)}$ pravděpodobnost, že se dostane po n skocích do polohy A_k, když na začátku byl v poloze A_i. Patrně jest $P_{ik}^{(1)} = p_{ik}$ a jednoduchá úvaha vede k rovnicím

$$P_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} \cdots \sum_{\tau=1}^{r} p_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \cdots p_{\sigma\tau} p_{\tau k},$$

*) Viz zejména „O pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy“ (Sborník přírodovědecký, 1929) a „Čtyři přednášky o různých problémech teoretické fysiky“ (Časopis pro pěst. mat. a fys. *61*, 1931). Bibliografie prací vyšlých do r. 1931 jest uvedena v mém spise „Méthodes générales du Calcul des probabilités“ (Mémorial des sciences mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, fasc. 52).

kde se sčítá podle $n - 1$ sumačních indexů $\alpha, \beta, \ldots, \sigma, \tau$; vhodným seskupením sumací dostaneme další rovnice

$$P_{ik}^{(l+m)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(l)} P_{sk}^{(m)}. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, co jsme předpokládali, nemá smyslu ptáti se na pravděpodobnost, že M je v dané poloze; jen pravděpodobnosti přechodů přicházejí v úvahu: je-li známo, že bod je v poloze A_i, jest určitá pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že po n skocích ($n = 1, 2, \ldots$) dostane se do jiné dané polohy A_k. Systémem pravděpodobností p_{ik} je definován *Markovův řetěz.* Zvláště zajímavá jest otázka, jak se mění $P_{ik}^{(n)}$, když n roste do nekonečna.

Nástin důkazu první Markovovy věty. — Budiž x proměnná veličina, která nabude hodnoty α_j, když bod M je v poloze A_j ($j = 1, 2, \ldots, r$). Předpokládáme, že hodnoty α_j jsou vesměs různy jedna od druhé. Označme písmenem $x^{(0)} = \alpha_i$ hodnotu veličiny x před prvním skokem bodu M; a buďte $x^{(1)}, x^{(2)} \ldots$ její hodnoty po prvním, po druhém, ... skoku; každé z čísel $x^{(k)}$ jest ovšem rovno jednomu z čísel α_m. Střední hodnota veličiny x po n skocích (vždy za předpokladu, že $x^{(0)} = \alpha_i$) jest

$$\text{s. h. } (x) = a_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} \alpha_k. \tag{3}$$

Vzorec (2) dává pro $l = 1$, $m = n - 1$

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(n-1)}$$

a tedy

$$a_i^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(n-1)} \alpha_k = \sum_{s=1}^{r} p_{is} a_s^{(n-1)}. \tag{4}$$

Tento vzorec je zvláště důležitý pro Markovův důkaz*); vzhledem k podmínce (1) je jeho smysl ten, že každá z veličin

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_r^{(n)} \tag{a}$$

jest rovna (zobecněnému) aritmetickému středu veličin

$$a_1^{(n-1)}, a_2^{(n-1)}, \ldots, a_r^{(n-1)}. \tag{b}$$

Maximum čísel (a) není větší než maximum čísel (b) a minimum čísel (a) není menší než minimum čísel (b). Rozdíl $\Delta^{(n)}$ obou extrémů blíží se nule tak rychle jako člen konvergentní geometrické řady a z toho plyne, že

$$\lim a_i^{(n)} = a, \tag{5}$$

*) Stran podrobností důkazu viz na př. Mémorial des sc. math. fasc. 52, Nro. 6.

kterýžto vzorec vyjadřuje první Markovovu větu: *Střední hodnota veličiny x konverguje, když n roste do nekonečna, k limitě, která nezávisí na její počáteční hodnotě a_i.*

Je-li ve zvláštním případě pro určitý index k

$$a_k = 1, \quad a_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, r,$$

jest

$$a_i^{(n)} = P_{ik}^{(n)}$$

a máme

$$\lim_{n=\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k. \tag{6}$$

Pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že bod M po n skocích přejde z polohy A_i do polohy A_k, konverguje k limitě P_k nezávislé na i, když n roste do nekonečna.

Veličiny P_k se dají snadno vypočítati. Položme ve vzorci (2) $l = n - 1$, $m = 1$; vychází

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(n-1)} p_{sk} \tag{7}$$

a když n roste do nekonečna

$$P_k = \sum_{s=1}^{r} p_{sk} P_s \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{7a}$$

což je soustava r homogenních rovnic pro r veličin; determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 - p_{11}, & - p_{12}, \ldots, & - p_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ - p_{r1}, & - p_{r2}, \ldots, & 1 - p_{rr} \end{vmatrix}$$

rovná se nule vzhledem k podmínkám (1) a poněvadž, jak snadno lze dokázati, $\sum_{k=1}^{r} P_k = 1$, jsou veličiny P_k onou soustavou jednoznačně určeny.

F r é c h e t o v y v z o r c e. — Roku 1931 dokázali současně*) J. Potoček a M. Fréchet (v přednáškách konaných na Institut Poincaré v zimě 1931—32) nezávisle jeden na druhém a zcela různými metodami, že řady

$$s_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} (P_{jk}^{(n)} - P_k) \quad j, k = 1, 2, \ldots, r \tag{8}$$

jsou konvergentní. Fréchet ukázal mimo to, že veličiny s_{jk} se dají jednoduše vypočísti. Důkaz konvergence převádí se podle Frécheta na Markovův důkaz, o němž jsem se právě zmínil. Neboť rozdíl mezi maximem a minimem veličin

*) Viz práce Potoček[1]) a Fréchet[7]) uvedené v seznamu na konci těchto přednášek. Podobně budu citovati i další práce.

$$P_{ik}^{(n)},\ P_{2k}^{(n)}, \ldots, P_{rk}^{(n)}$$

není menší než absolutní hodnota rozdílu

$$P_{jk}^{(n)} - P_k$$

a proto n-tý člen řady (8) je — podle Markovova důkazu — menší než stejnolehlý člen konvergentní geometrické řady. Co se týče výpočtu veličin s_{jk}, poznamenejme, že řada o r členech

$$\sum_{i=1}^{r} s_{ji} p_{ik}$$

shoduje se s pravou stranou rovnice (8) až na to, že schází první člen $P_{jk}^{(1)} - P_k = p_{jk} - P_k$; proto je

$$s_{jk} - (p_{jk} - P_k) = \sum_{i=1}^{r} s_{ji} p_{ik}. \tag{9}$$

Klademe-li sem postupně při konstantním j za k hodnoty 1, 2, ..., r, dostaneme r Fréchetových rovnic, ze kterých se dají vypočísti veličiny $s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jr}$.

Je zajímavo, že, ačkoli do definice veličin P_k a s_{jk} vstupuje nekonečná řada iterací, lze jak P_k tak s_{jk} vypočísti řešením lineárních rovnic (7a) resp. (9), aniž bychom byli nuceni počítati $P_{ik}^{(2)}$, $P_{ik}^{(3)}, \ldots, P_{ik}^{(n)}, \ldots$

Disperse. Druhá Markovova věta. — Je třeba vysvětliti, proč zavádíme veličiny s_{jk}. Důvod je ten, že se vyskytují při výpočtu disperse. Markov ukázal, že výraz

$$\text{s. h.}\ \frac{[(x^{(1)} - a) + (x^{(2)} - a) + \ldots + (x^{(n)} - a)]^2}{n},$$

kde veličina a je definována formulí (5), má určitou limitu $\frac{1}{2}C$, když n roste do nekonečna. Poněvadž tato limita udává jakousi střední hodnotu pro míru odchylky, která je mezi

$$\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n}$$

a mezi hodnotou a, nazveme ji zkrátka dispersí. Vzorce, které Markov původně udal pro dispersi, byly nepřehledné a jejich důkazy složité. Proto snažil jsem se jednak upraviti vzorce na jednodušší tvar a takový, aby se hodil pro případ spojitých proměnných (Brownův pohyb, při němž všechny možné polohy bodu M tvoří kontinuum), jednak odvoditi je jednodušším způsobem. Při první úpravě v r. 1929 pomáhal mně dr. Kaucký. Později jsem dal vzorci zase jinou úpravu, ale musil jsem při tom zavésti další předpoklady o veličinách p_{ik}; viz moje přednášky na Institutu Poincaréově,[8]) kap. IV. Až teprve v roce 1932 podařilo se dru

J. Potočkovi, jenž se zabýval úlohou na moje vyzvání, podati zcela nový důkaz zjednodušeného vzorce pro dispersi; při novém odvození vyskytly se právě veličiny s_{jk}; Potoček[1]) dokázal konvergenci řad s_{jk} způsobem jiným, než jsem nahoře uvedl. Zároveň s ním pracoval Fréchet a došel k důkazu shora uvedenému. Výpočet disperse se podstatně zjednoduší zavedením veličin s_{jk} a výsledek zní takto:

$$\tfrac{1}{2}C = \sum_{k=1}^{r} P_k (a_k - a)^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} P_k s_{ki} (a_i - a)(a_k - a). \qquad (10)$$

To je formule, kterou asi současně a nezávisle jeden na druhém odvodili Fréchet[7]) a Potoček[1]).

Srovnejme případ „řetězu" s případem nezávislých pravděpodobností. V tomto případě p_{ik} nezávisejí na prvém indexu i; pravděpodobnost skoku do polohy A_k nezávisí na tom, kde byl bod M před skokem, a máme

$$p_{ik} = P_{ik}^{(n)} = P_k, \quad s_{ik} = 0,$$

takže pravá strana formule (10) se redukuje na první člen.

Fréchet[9]) dokázal zajímavou větu o případu, kdy všechny veličiny p_{ik} jsou kladné. Podle Frobenia má v tomto případě rovnice

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda, & p_{12}, & \ldots, & p_{1r} \\ p_{21}, & p_{r2} - \lambda, & \ldots, & p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \ldots, & p_{rr} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

jednoduchý kořen $\lambda = 1$*) a všechny ostatní kořeny jsou co do absolutní hodnoty menší než 1; Fréchet provedl podrobnější rozbor [také pro případy, kdy některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule; vlastnosti kořenů rovnice (11) souvisejí s existencí limit čísel $P_{ik}^{(n)}$ pro n rostoucí do nekonečna] a našel, že pro $p_{ik} > 0$ a za předpokladů (1) všechny kořeny rovnice (11) jsou obsaženy v rovině komplexních čísel v kruhu, jenž má střed v bodě p_{aa}, je-li p_{aa} nejmenší z čísel $p_{11}, p_{22}, \ldots, p_{rr}$, a jenž prochází bodem 1.

O případech, kdy některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule. — Připustíme-li, že některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule, dojdeme k výsledkům, které se podstatně liší od vět shora uvedených. Úloha, která nás především zajímá, zní takto: konvergují $P_{ik}^{(n)}$ k určitým limitám, když n roste do nekonečna? Předpokládejme zatím, že rovnice (1) platí, ale připusťme, že některé veličiny p_{ik} jsou rovny nule (a ostatní kladné). Klademe-li v rovnici (2)

$$l = 1, \; P_{is}^{(1)} = p_{is}, \; P_{ik}^{(n)} = x_i(n),$$

*) Předpokládáme stále, že platí podmínky (1).

obdržíme

$$x_i(m+1) = \sum_{s=1}^{r} p_{is}\, x_i(m), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{12}$$

což je soustava r diferenčních rovnic pro r neznámých $x_1(m)$, $x_2(m), \ldots, x_r(m)$. Běží tedy o asymptotické vlastnosti funkcí $x_i(m)$, které vyhovují soustavě diferenčních rovnic (12), pro veliké hodnoty proměnné m. S tohoto hlediska řešil úlohu Romanovsky r. 1929 a pak dr. Kaucký r. 1930. Při diskusi asymptotických hodnot je pak nutno vzíti v úvahu kořeny t. zv. „charakteristické" rovnice (11). Kaucký dokázal r. 1930 tuto větu: Je-li mezi kořeny rovnice (11) jediný $\lambda = 1$, jehož absolutní hodnota se rovná jedné, existuje $\lim\limits_{n=\infty} P_{ik}^{(n)}$, a závisí obecně na indexu i. Je-li mimo to kořen $\lambda = 1$ jednoduchý (tento případ nastává, když všechna p_{ik} jsou kladná), jsou ony limity nezávislé na i. Poznamenejme, že absolutní hodnota kteréhokoli kořene rovnice (12) je nejvýše rovna jedné. Téhož roku dokázal dr. Miroslav Konečný větu obrácenou: Existují-li $\lim\limits_{n=\infty} P_{ik}^{(n)}$ pro všechny hodnoty indexů i a k, leží všechny kořeny rovnice (12) uvnitř jednotkové kružnice vyjímaje kořen $\lambda = 1$; a jsou-li mimo to ony limity nezávislé na i, je kořen $\lambda = 1$ jednoduchý. Konečný užil ve své práci teorie matic podle Frobenia a Ed. Weyra.

Rozbor různých případů, které se mohou vyskytnouti, když některé veličiny p_{ik} jsou rovny nule, je zejména podrobně proveden v pracích Fréchetových. Fréchet přednášel o teorii řetězů na Institutu Poincaréově v letech 1931—33 a došel ke všem větám, které jsem dosud uvedl, a dokázal mnohem více. Hlavní výsledky jeho úvah (mimo to, co jsem dříve uvedl o dispersi a o případě, kdy všechna p_{ik} jsou kladná) jsou tyto tři [viz Fréchet[7])].

1. Předpokládejme, že $P_{ik}^{(n)}$ jsou ohraničeny, to jest, že platí $|P_{ik}^{(n)}| < K$, pro $i, k = 1, 2, \ldots, r$ a pro libovolné celé a kladné n; K je konstanta [tato podmínka je splněna, když $p_{ik} \geq 0$ a když platí rovnice (1)]. Za této podmínky konvergují $P_{ik}^{(n)}$ ve smyslu Cesàrově, t. j. existují limity

$$\pi_{ik} = \lim_{n=\infty} \frac{P_{ik}^{(1)} + P_{ik}^{(2)} + \ldots + P_{ik}^{(n)}}{n}.$$

2. Aby v případě, že $P_{ik}^{(n)}$ jsou ohraničeny, limity π_{ik} nezávisely na i a aby nebyly všechny rovny nule, je nutno a stačí vyhověti podmínkám

$a)$ $\sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r;$

b) $s = 1$ je jednoduchý kořen rovnice (11).

3. Aby v případě, že $P_{ik}^{(n)}$ jsou ohraničeny, všechny limity π_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, r$) měly jednu a tutéž hodnotu různou od nuly, je nutno a stačí vyhověti podmínkám *a*) a *b*) právě uvedeným a zároveň dalším podmínkám

$$\sum_{i=1}^{r} p_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{1a}$$

Úvahy o aritmetických středech jsou už u Markova; Fréchet je provádí přesněji a podrobněji. Zavedení veličin π_{ik} zdá se mně býti vhodné pro aplikace ve statistické mechanice. Neboť určíme-li přibližně (statisticky) pravděpodobnosti $P_{ik}^{(1)}, P_{ik}^{(2)}, \ldots, P_{ik}^{(n)}$, kde n je velké číslo, můžeme přibližně určiti π_{ik} ($\lim\limits_{n=\infty} P_{ik}^{(n)}$ obecně neexistují). Vraťme se k bodu M, jenž se pohybuje skokem. Bude určitá střední pravděpodobnost, že bod M přejde z počáteční polohy A_i po velmi velikém počtu n skoků do jiné dané polohy A_k; je to střední hodnota pravděpodobností pro přechody jedním, dvěma, ..., n skoky.

K tomu připojím ještě jednu poznámku o aplikacích ve statistické mechanice. Ukázal jsem již dříve,*) že pro případ, kdy všechna $p_{ik} > 0$, splnění podmínek (1) a (1*a*) vede k výsledku $\lim\limits_{n=\infty} P_{ik}^{(n)} = 1/r$ (to znamená: po nekonečně velkém počtu skoků má každý z bodů A_k stejnou pravděpodobnost, že bude dosažen). Nastává zde tedy „rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti“, jež se právě má vysvětliti v některých otázkách kinetické teorie. Připustíme-li, že některá p_{ik} mohou býti rovna nule, máme, jak jsem shora podle Frécheta uvedl, i v tomto případě obdobný výsledek s tím rozdílem, že nyní jsou to limity π_{ik} ve smyslu Cesàrově, jež jsou všechny stejné za předpokladů (1) a (1*a*).

Někteří autoři požadují ve fysikálních statistických úvahách, kde běží o pravděpodobnosti přechodů z jedné konfigurace do druhé, aby

$$p_{ik} = p_{ki}. \tag{13}$$

Pak ovšem stačí splniti podmínku (1); druhá (1*a*) vyplývá z (1) a z (13). Tak Mises[1]) ve své knize o počtu pravděpodobnosti zavádí podmínku (13) a usuzuje z ní na rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti. Podobně americký chemik G. N. Lewis**) v práci, kde se zabývá přechody kvant energie, nazývá (13) „základní rovnicí kvantové kinetiky“. Výslovně poznamenávám, že rovno-

*) Viz Mémorial des sc. math. fasc. 52, Nro. 15.

**) G. N. Lewis, Quantum kinetics and the Planck equation; Phys. Review, *35*, 1930, p. 1533—37.

měrné rozdělení pravděpodobnosti po dlouhé řadě skoků není vázáno na podmínku symetrie (13), nýbrž že plyne z rovnic (1) a (1a).

Zbývá připomenouti, jak se celá teorie rozšiřuje pro případ spojitě proměnných veličin. Je-li dána funkce dvou proměnných $K(x, y)$ a definujeme-li iterované funkce $K^{(n)}(x, y)$ takto:

$$K^{(1)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(n+1)}(x, y) = \int_a^b K^{(n)}(x, z)\, K(z, y)\, dz, \tag{14}$$

můžeme si zase položiti otázku o existenci limity $\lim_{n=\infty} K^{(n)}(x, y)$. Je-li $K(x, y) > 0$ pro $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$, dá se existence limity dokázati přenesením Markovova důkazu (součty nahrazují se integrály). Připustíme-li však funkce K takové, že $K(x, y) \geqq 0$, je diskuse složitější. Konečný[2]) odvodil některé podmínky pro existenci limit. Současně pracoval na témže tématu Fréchet[6])[8]); uveřejnil letos obsáhlou práci [Fréchet[8])], ve které rozebírá velmi podrobně podmínky pro existenci limity, a to za předpokladů velmi obecných. Celkem možno říci, že se Fréchetovi podařilo přenésti všechny důležitější vztahy nalezené v případě nespojitě proměnných (t. j. v případě řetězu definovaného veličinami p_{ik}) i na případ spojitě proměnných. Výpočtem disperse v případě spojitě proměnných veličin zabýval se také Potoček a došel k zajímavým aplikacím na teorii Brownova pohybu [viz Potoček[2])[3])].

Zobecnění Markovovy teorie o řetězech. — Ve svých prvních pracích o míchání karet a o příbuzných problémech ukázal jsem, že výpočet veličin $P_{ik}^{(n)}$ není nic jiného než výpočet koeficientů lineární homogenní substituce o n proměnných, která vzniká opakováním dané substituce o koeficientech p_{ik}. Základní rovnice (2), kterou jsem uvedl v předešlé přednášce, má tento smysl: Aplikujeme-li m-krát po sobě lineární homogenní substituci

$$x'_i = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

jsou koeficienty výsledné substituce rovny veličinám $P_{ik}^{(m)}$; aplikujeme-li pak onu substituci ještě l-krát, provedeme-li ji tedy celkem $(l + m)$-krát, jsou koeficienty nové výsledné substituce rovny veličinám $P_{ik}^{(l+m)}$.

Úloha ustanoviti soustavu veličin $P_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r;$ $n = 1, 2, 3, \ldots)$ tak, aby vyhověly rovnicím (2), dá se zobecniti různými způsoby. Předně můžeme zavésti na místo indexů i, k spojitě proměnné veličiny x, y; na místo $P_{ik}^{(n)}$ nastoupí pak iterované funkce $K^{(n)}(x, y)$ definované vzorci (14). Iterační index n zůstává při tom nespojitě proměnný $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Můžeme také považovati v rovnicích (2) l a m za spojitě proměnné, ač původně tam měly význam celistvých iteračních indexů. Úloha nalézti všechny soustavy veličin $P_{ik}^{(l)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ tak, aby l byla spojitě proměnná veličina a aby bylo vyhověno rovnicím (2), dá se zobecniti takto: Nalézti funkce $\varphi_{ik}(s, t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ dvou spojitě proměnných s a t tak, aby

$$\varphi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{r} \varphi_{ij}(s, u)\, \varphi_{jk}(u, t), \quad s < u < t. \tag{15}$$

Závisí-li funkce $\varphi_{ik}(s, t)$ jen na rozdílu $t - s$ proměnných s a t, přechází (15) v rovnici (2) při $\varphi_{ik}(s, t) = P_{ik}^{(t-s)}$.

Uvádím dvojí řešení této úlohy. První řešení založíme na pojmu *integrace lineárních substitucí*, který zavedl Volterra r. 1887 [viz Hostinský[9])]. Rotace tělesa kolem pevné osy o úhel α dá se nahraditi n postupně provedenými rotacemi kolem téže osy, je-li úhel otočení při každé rotaci α/n. To je nejjednodušší příklad, jenž ukazuje, jak konečná transformace vzniká integrací nekonečně malých transformací. Každý systém diferenciálních rovnic homogenních

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} = \sum_{k=1}^{r} a_{ki}(u)\, x_k, \; i = 1, 2, \ldots, r \tag{15a}$$

dá se pojímati jakožto infinitesimální lineární transformace. Jsou-li totiž $x_1, x_2, \ldots, x_r$ původní hodnoty proměnných a $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ hodnoty transformované, položme $\mathrm{d}x_i = x'_i - x_i$, $\mathrm{d}u = h$ a tedy

$$x'_i = x_i + h \sum_{k=1}^{r} a_{ki}(u)\, x_k, \; i = 1, 2, \ldots, r. \tag{15b}$$

Je-li h nekonečně malé, jest i rozdíl $x'_i - x_i$ nekonečně malý a vzorce (15b) definují tedy infinitesimální lineární substituci r proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Substituce ta odpovídá určité hodnotě parametru u. Rozdělme nyní daný interval (s, t), ve kterém se mění parametr u, na n stejných dílů o délce $h = \dfrac{t - s}{n}$ a proveďme postupně substituce, jež odpovídají dělicím bodům t, $t - h$, $t - 2h, \ldots, s$; dostaneme tak složenou substituci, která, když n roste do nekonečna, konverguje k určité lineární substituci o koeficientech $\varphi_{ik}(s, t)$. A pro tuto substituci zavádíme název „integrál dané infinitesimální substituce podle parametru u v mezích od s do t." Integrujme nyní danou substituci nejprve v mezích u, t $(u < t)$, pak v mezích s, u $(s < u)$; tak dostaneme dvě substituce o koeficientech $\varphi_{ik}(u, t)$ resp. $\varphi_{ik}(s, u)$ a provedeme-li napřed prvou a pak druhou, dostaneme substituci složenou, která podle definice integrálu není nic jiného než integrál dané infinitesimální substituce v mezích od s do t. Podle známého pravidla o koeficientech substituce složené ze dvou jiných budou koeficienty $\varphi_{ik}(s, t)$ substituce „integrálu od s do t" vyjádřeny právě formulemi (15).

Funkce $\varphi_{ik}(s, u)$ představují, za předpokladu, že se dá derivovati podle t, řešení rovnic (15a), neboť jest

$$\frac{d\varphi_{ik}(s, u)}{du} = \sum_{j=1}^{r} \varphi_{ij}(s, u)\, a_{jk}(u).$$

Integrovati lineární substituci, t. j. vyhledati funkce φ_{ik}, jsou-li dány a_{ik}, není pak vlastně nic jiného než řešiti rovnice (15); kladouce $i = 1, 2, \ldots, r$ obdržíme fundamentální systém r integrálů takový,

že $$\varphi_{ik}(s, s) = 0 \text{ pro } i \neq k, \quad \varphi_{ii}(s, s) = 1.$$

Ale pojem integrálu lineární substituce dá se přenésti do funkční analyse; můžeme integrovati také lineární funkční transformace a dospějeme tak k řešení některých funkčních rovnic, jak později ukáži.

Fréchet[1]) udal r. 1932 druhou metodu k řešení problému (15). Našel, že lze soustavu rovnic rozřešiti bez užití integračních znamének. Je-li $c_{ij}(t)$ soustava r^2 libovolných spojitých funkcí ($i, j = 1, 2, \ldots, r$), jejíž determinant $c(t)$ je různý od nuly, a je-li $C_{ij}(t)$ minor příslušný v $c(t)$ k elementu c_{ij}, vyhovují výrazy

$$\varphi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}(s) \frac{C_{kj}(t)}{c(t)} \tag{16}$$

rovnicím (15) a zároveň je

$$\varphi_{ik}(s, s) = 0 \text{ pro } i \neq k, \quad \varphi_{ii}(s, s) = 1.$$

Vzorce (16) platí, i když funkce $\varphi_{ik}(s, t)$ nemají derivací; v tomto případě je problém (15) zobecněním problému integrovati soustavu homogenních diferenciálních rovnic lineárních.

Další zobecnění. Chapmanova rovnice. — Zaveďme namísto indexů i, k spojitě proměnné x, y a zároveň namísto iteračních indexů l, m také spojitě proměnné s, t; dostaneme namísto soustavy (15) jedinou rovnici

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, dz, \tag{17}$$
$$a < x < b, \quad a < y < b, \quad s < u < t.$$

Tuto rovnici odvodil Chapman 1928 v práci jednající o teorii difuse. Závisí-li funkce Φ jen na rozdílu $t - s$ proměnných s a t (a vedle toho na x a y), přejde (17) v rovnici Smoluchowského

$$\Phi(x, y, u + v) = \int_a^b \Phi(x, z, u)\, \Phi(z, y, v)\, dz. \tag{18}$$

V přednáškách, jež jsem měl na Institutu Poincaréově 1930, a v přednáškách konaných v r. 1931 na Karlově universitě uvažoval jsem o Chapmanově rovnici, ale metodu řešení jsem neznal. Toliko v dodatku připojeném k pařížským přednáškám nastínil jsem stručně, jak se sestrojí řešení obsahující libovolnou funkci tří proměnných; později jsem tuto metodu podrobněji zpracoval a nyní uvedu přehled výsledků, ke kterým jsem došel.

Zrovna tak, jako rovnice (15) nebo (2) vyjadřují pravidlo, podle něhož se z koeficientů dvou substitucí počítají koeficienty substituce z nich složené, vyjadřují rovnice (17) nebo (18) pravidla, kterými se řídí skládání lineárních funkčních transformací. Je-li totiž

$$\mathrm{f}_1(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \mathrm{f}(y)\, \mathrm{d}y$$

lineární funkční transformace s „jádrem" $\mathrm{K}(x, y)$, která přiřaďuje dané funkci $\mathrm{f}(x)$ funkci $\mathrm{f}_1(x)$, a je-li dále

$$\mathrm{f}_2(x) = \int_a^b \mathrm{L}(x, y)\, \mathrm{f}_1(y)\, \mathrm{d}y$$

transformace téhož typu, platí, jak seznámе eliminujíce funkci $\mathrm{f}_1(x)$

$$\mathrm{f}_2(x) = \int_a^b \mathrm{M}(x, y)\, \mathrm{f}(y)\, \mathrm{d}y,$$

kde

$$\mathrm{M}(x, y) = \int_a^b \mathrm{L}(x, z)\, \mathrm{K}(z, y)\, \mathrm{d}z. \tag{19}$$

Funkce $\mathrm{f}_2(x)$ dá se tedy odvoditi z $\mathrm{f}(x)$ buď postupným provedením transformací s jádry K a L aneb jedinou transformací, která má jádro M složené z K a L podle formule (19).

Integrace funkčních transformací. — Rovnice

$$\mathrm{f}_1(x) = \int_a^b \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi h c}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4hc}} + h\, \mathrm{A}(x, y, u)\right] \mathrm{f}(y)\, \mathrm{d}y,$$

kde $a < x < b$, $c > 0$ a kde $\mathrm{A}(x, y, u)$ značí danou funkci tří proměnných a h nekonečně malé kladné číslo, definuje infinitesimální transformaci, která převádí funkci $\mathrm{f}(x)$ ve funkci $\mathrm{f}_1(x)$; obě funkce liší se nekonečně málo jedna od druhé, neboť*)

$$\lim_{h=0} \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\pi h c}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4hc}}\, \mathrm{f}(y)\, \mathrm{d}y = \mathrm{f}(x).$$

Každé hodnotě parametru u odpovídá určitá infinitesimální transformace právě uvedeného typu. Rozdělme zase, stejně jako

*) Stran odůvodnění této rovnosti viz na př. E. Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles (Paris, 1927), deuxième leçon.

dříve, interval (s, t), v němž u jest obsažen, na n stejných dílů o délce $h = (t - s)/n$ a proveďme postupně transformace, které odpovídají dělicím bodům $t, t - h, t - 2h, \ldots, s$. Tak dostaneme složenou transformaci, která dává určitou limitní transformaci, když n roste do nekonečna; nazveme ji „integrálem infinitesimální transformace podle parametru u od s do t" a vyjádříme ji formulí

$$\mathrm{f}_1(x) = \int_a^b \Phi(x, y, s, t)\, \mathrm{f}(y)\, \mathrm{d}y.$$

Z definice pravé strany a z pravidla o skládání transformací vyjádřeného vzorcem (19) plyne, že $\Phi(x, y, s, t)$, jež obsahuje libovolnou funkci $\mathrm{A}(x, y, u)$ tří proměnných, vyhovuje Chapmanově funkční rovnici (17). Toto řešení Chapmanovy rovnice uveřejnil jsem v letech 1931—32 [viz Hostinský[1],[4],[5],[6],[7],[8]); nejobšírněji v práci[8])]; nebudu zde uváděti podrobnosti, nýbrž napíši jen výsledek a podám jednoduchou interpretaci řešení.

Řešení Chapmanovy rovnice. — Budiž $\mathrm{A}(x, y, u)$ libovolná spojitá funkce tří proměnných x, y, u a předpokládejme, že $a < x < b$, $a < y < b$, $s < u < t$; dále budiž $\mathrm{j}(x, y, s, t)$ nějaká funkce, která vyhovuje Chapmanově rovnici (17) a některým dalším podmínkám [viz Hostinský[8])]. Definujme nyní symbolickou n-tou mocninu funkce A utvořenou pomocí funkce j takto:

$$(A)_j{}^n = \int \mathrm{j}(x, z_1, s, u_1)\, \mathrm{A}(z_1, z_2, u_1)\, \mathrm{j}(z_2, z_3, u_1, u_2) \ldots$$
$$\ldots \mathrm{A}(z_{2n-1}, z_{2n}, u_n)\, \mathrm{j}(z_{2n}, y, u_n, t)\, \mathrm{d}\tau,$$

kde $\int \ldots \mathrm{d}\tau$ je symbol $3n$-násobného integrálu; integrační proměnné jsou $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}, u_1, u_2, \ldots, u_n$ a integrační obor jest určen podmínkami

$$a \leqq z_i \leqq b \ (i = 1, 2, \ldots, 2n), \quad s < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < t.$$

Při tom klademe $(\mathrm{A})_j{}^0 = \mathrm{j}$. Symbolická mocnina $(\mathrm{A})_j{}^n$ funkce A (při tom $n = 0, 1, 2, \ldots$) je funkcí čtyř proměnných x, y, s, t. Nekonečná řada

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{A})_j{}^n \qquad (20)$$

dává hledané řešení Chapmanovy rovnice.

Připojme k podmínce, že Φ má vyhověti rovnici (17), ještě tyto další:

$$\Phi > 0, \quad \int_a^b \Phi(x_1, y, s, t)\, \mathrm{d}y = 1; \qquad (21)$$

pak dá se funkce Φ vyjádřiti zase řadou tvaru (20) s tím rozdílem, že funkce j musí býti přiměřeně volena; její výraz je dosti složitý, neuvádím jej, jen poznamenávám, že v tomto případě j závisí určitým způsobem na funkci $A(x, y, u)$.

Problém řešiti rovnici (17) s vedlejšími podmínkami (20) dá se interpretovati jako problém o difusi v tekutině. Představujeme si difusi v trubici (o konstantním nekonečně malém průřezu), která leží v ose OX; úsečky koncových bodů jsou a a b. Funkce $\Phi(x, y, s, t)$ nechť značí koncentraci nějaké látky v bodě y a v okamžiku t za předpokladu, že nějaké látky v okamžiku s ($s < t$) je jednotkové množství oné látky soustředěno v bodě x, kde ovšem je v tomto okamžiku koncentrace nekonečně veliká. Hledáme časový průběh koncentrace; změny v koncentraci nastávají tím, že difusí (Brownovým pohybem) v tekutině vniká ona látka, soustředěná původně v bodě x, do všech míst trubice. Na krajích trubice musejí býti ovšem předepsány určité podmínky (na př. částice difundující látky se na krajích odrážejí). Přijímáme konečně podmínky (21); druhá z nich stanoví, že úhrnné množství difundující látky se nemění. Rovnice (17) má tento smysl: Je-li v okamžiku u ($s < u < t$) v bodě z koncentrace $\Phi(x, z, s, u)$, představme si bod z jako nový zdroj difuse; podle definice funkce Φ udává $\Phi(x, z, s, u)\,dz$ množství difundující látky v elementu dz, toto množství difunduje dále a v okamžiku t bude se určitá jeho část, totiž $\Phi(x, z, s, u)\,dz\,.\,\Phi(z, y, u, t)\,dy$, nalézati uvnitř elementu dy v poloze y. Integrujme tento výraz podle z od a do b (element dz může míti jakoukoli polohu uvnitř trubice); dostaneme pak skutečné množství látky v elementu dy a v okamžiku t, t. j. $\Phi(x, y, s, t)\,dy$. Srovnajíce oba výrazy a krátíce dy po obou stranách shledáváme, že Φ skutečně vyhovuje rovnici (17).

Budiž nyní $j(x, y, s, t)$ koncentrace, jež se pozoruje v bodě y v okamžiku t, byla-li v okamžiku s koncentrace všude rovna nule až na bod x, kde bylo koncentrováno jednotkové množství látky. Rozeznáváme *dva druhy difuse*: Při difusi prvního druhu vznikne v místě y a v okamžiku t koncentrace $j(x, y, s, t)$, jak jsem právě uvedl. Druhý způsob difuse je tento: Je-li v okamžiku u soustředěno jednotkové množství látky v bodě x (a všude jinde současně koncentrace $= 0$), objeví se v okamžiku $u + du$ v bodě y koncentrace $A(x, y, u)\,du$. První druh je „pomalá difuse", kdežto při druhém způsobu přenáší se látka náhle z jednoho místa na druhé. Vzorec (20) dá se interpretovati tak, že každý člen nekonečné řady dává částečnou koncentraci; součet řady rovná se koncentraci hledané. První člen j dává koncentraci při difusi prvního druhu; jednotkové množství látky je v okamžiku s soustředěno v bodě x. Druhý člen

$$(A)_j{}^1 = \int_s^t\int_a^b\int_a^b j(x, z_1, s, u)\,A(z_1, z_2, u)\,j(z_2, y, u, t)\,dz_1\,dz_2\,du$$

je koncentrace vyvolaná v bodě y v okamžiku t takto: od okamžiku s až do u probíhá difuse prvního druhu; pak nastane náhlý přenos látky z polohy z_1 do polohy z_2 (difuse druhého druhu během nekonečně krátkého časového intervalu od okamžiku u do $u + du$), načež od okamžiku $u + du$ až do t probíhá zase difuse prvního druhu. Integrujíce podle z_1 a z_2 od a do b a podle u od s do t dostaneme koncentraci v bodě y a v okamžiku t pocházející od difuse prvního druhu (jednotkové množství bylo koncentrováno v bodě x v okamžiku s) přerušené *jednou* difusí druhého druhu. Obecně je $(\mathrm{A})_f^n$ koncentrace vyvolaná v bodě y a v okamžiku t difusí prvního druhu, která byla právě n-krát přerušena difusemi druhého druhu. Řada (20) jeví se tedy jakožto součet koncentrací pocházejících od všech možných difusních pohybů, kterými se látka přenáší z polohy x do polohy y, což právě je hledaná veličina $\Phi(x, y, s, t)$.

Takto jsme dospěli k velmi obecné představě o difusi; klademe si otázku, jak tato teorie souvisí s obyčejnou teorií difuse (nebo s teorií o vedení tepla v kovech, což je, matematicky vzato, totéž). Kolmogorov (Math. Annalen, Bd. 104) ukázal r. 1931, že funkce Φ, jež vyhovuje rovnici (17), za zvláštních dalších předpokladů vyhovuje parciální rovnici druhého řádu parabolického typu; nejjednodušším případem takovéto rovnice je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}.$$

To je Fourierova rovnice pro obyčejnou difusi. Otázka o vztahu mezi těmito parciálními rovnicemi a mezi rovnicí (17) není ještě dosti objasněna. Vedle těch parciálních rovnic parabolického typu, jimiž se zabýval Kolmogorov a jež jsou homogenní, mohou zde přijíti v úvahu také nehomogenní parciální rovnice druhého řádu a pak rovnice vyšších řádů. Podle S. Bernsteina[1]) je důležitým problémem této teorie vyšetřiti podmínky, za kterých funkce vyhovující rovnici (17) vyhovuje zároveň nějaké rovnici parciální.

Chapmanova rovnice a Dirichletův problém. — Rovnice (17) vyskytuje se také v úlohách zcela jiného druhu, než jsou ty, o kterých jsem právě jednal. Budiž dán systém uzavřených konvexních křivek obklopujících bod O, který považujeme za pól zobecněné soustavy polárních souřadnic. Předpokládáme, že každé křivce systému patří určitá hodnota spojitě proměnného parametru t, a to tak, že křivka t_0 jest obsažena celá uvnitř křivky t, když $t_0 < t$. V určité části roviny kolem bodu O nechť platí, že libovolným bodem prochází jen jedna křivka systému; poloha bodu v oné části roviny bude tedy určena parametrem t oné křivky, která bodem prochází, a pak úhlem φ, který svírá jeho průvodič s pevnou přímkou (na každé křivce systému mění se φ spojitě od 0 do 2π, když bod oběhne jednou dokola; naopak každé hodnotě úhlu φ obsažené v těchto mezích odpovídá jediný bod na křivce). Budiž nyní $\mathrm{G}(A, B)$ Greenova funkce pro Dirichletův problém pro nějakou z křivek systému; A a B jsou dva body ležící buď na křivce nebo uvnitř křivky. $\mathrm{G}(A, B)$ je definována takto: Je to harmonická funkce bodu B uvnitř oné křivky, stává se nekonečně velikou jako $-\frac{1}{2\pi}\log r_{AB}$, když B je nekonečně blízko bodu A (r_{AB} značí vzdálenost obou bodů), a rovná se nule, když B je na křivce samé. Pojem je vzat z elektrostatiky: Greenova funkce $\mathrm{G}(A, B)$ je potenciál vyvolaný v bodě B elektrickým nábojem o velikosti $= 1$, jenž je soustředěn v bodě A za předpokladu, že potenciál na obklopujícím vodiči (t. j. na křivce systému) je roven nule. Budiž A (t, φ) bod ležící uvnitř křivky systému, která jde bodem B (t', φ'); ovšem je $t < t'$. Pak je hodnota harmonické funkce $u_A = A\mathrm{u}(x, y)$, která všude uvnitř křivky t' vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} = 0$$

a která podél křivky nabývá daných hodnot u_B, dána formulí*)

$$u_A = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathrm{G}(A, B)}{\partial n_B}\, u_B \frac{\mathrm{d}s_B}{\mathrm{d}\varphi}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Zde značí n_B vnitřní normálu k t' v bodě B a $\mathrm{d}s_B$ element oblouku na t'. Poněvadž bodem B jde jediná křivka systému, je

$$\frac{\partial \mathrm{G}(A, B)}{\partial n_B} \frac{\mathrm{d}s_B}{\mathrm{d}\varphi} = \mathrm{F}(\varphi, \varphi', t, t')$$

jednoznačná funkce dvou bodů $A(t, \varphi)$ a $B(t', \varphi')$, ovšem za předpokladu, že $t < t'$; n_B je normála ke křivce, která prochází bodem B. Představme si nyní tři křivky systému příslušné parametrům t_0, t_1 a t_2. Předpokládáme, že první jest uvnitř druhé a tato uvnitř třetí, že tedy $t_0 < t_1 < t_2$. Zvolme na křivce t_0 bod (t_0, φ_0). Harmonická funkce definovaná uvnitř t_2 hodnotami, jichž nabývá na t_2, může se určiti dvojím způsobem: Buď ji počítáme přímo z hodnot podél křivky t_2, což dává

$$\mathrm{u}(t_0, \varphi_0) = \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\varphi_0, \varphi_2, t_0, t_2)\, \mathrm{u}(t_2, \varphi_2)\, \mathrm{d}\varphi_2$$

nebo použijeme formule právě napsané k tomu, abychom nejprve vypočetli hodnoty, kterých ona funkce nabývá podél křivky

*) Viz na př. Goursat, Cours d'Analyse, 3e édition, t. III, No. 518. Goursat píše $\frac{1}{2\pi}\,G$ místo G.

t_1 (píšeme v poslední formuli t_1 namísto t_0 a φ_1 namísto φ_0), a z těch teprve hodnotu v bodě (t_0, φ_0). Tento druhý způsob výpočtu dává

$$u(t_0, \varphi_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi_0, \varphi_1, t_0, t_1)\, F(\varphi_1, \varphi_2, t_1, t_2)\, u(t_2, \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

Srovnáme-li oba výsledky, dostaneme, poněvadž $u(t_2, \varphi_2)$ je libovolně daná funkce proměnné φ_2,

$$F(\varphi_0, \varphi_2, t_0, t_2) = \int_0^{2\pi} F(\varphi_0, \varphi_1, t_0, t_1)\, F(\varphi_1, \varphi_2, t_1, t_2)\, d\varphi_1,$$
$$t_0 < t_1 < t_2 \ldots$$

Funkce F vyhovuje tedy Chapmanově rovnici (17). Stanovení Greenovy funkce a tedy také řešení Dirichletova problému uvádí se tak na řešení Chapmanovy rovnice.

Řešení Hadamardovy funkční rovnice. — Hadamard ukázal v přednáškách, jež měl r. 1928 v Praze a v Brně,*) jak některé funkční rovnice mohou býti považovány za analytický výraz této obecné zásady, z níž vychází také Huyghensův princip: Vyjádříme-li počtem stav, ve kterém se nalézá nějaká soustava v okamžiku t_2, jednak na základě stavu, ve kterém byla v okamžiku t_0, jednak na základě stavu, ve kterém byla v okamžiku t_1 ($t_0 < t_1 < t_2$), a srovnáme-li oba způsoby vyjádření, dostaneme hledanou funkční rovnici. Hadamard udal jakožto nejjednodušší příklad rovnici, kterou se zabýval dříve Smoluchowski v teorii difuse. Viděli jsme, že tato rovnice, jakož i obecnější Chapmanova, která také vyjadřuje cosi podobného Huyghensovu principu, dají se řešiti integrací funkčních transformací. Hadamard uvedl jakožto další příklad rovnici, kterou nazvu nyní *Hadamardovou rovnicí* a ke které se dochází takto: Obecná parciální rovnice druhého řádu hyperbolického typu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = 0 \qquad (22)$$

definuje neznámou funkci $u(x, y)$, když jsou dány t. zv. Cauchyovy podmínky: hledaná funkce u a jedna její parciální derivace 1. řádu nabývají v bodech křivky dané v rovině (x, y) předepsaných hodnot. K výpočtu neznámé funkce u slouží zde funkce G, která je obdobná Greenově funkci pro Dirichletův problém. A tato funkce G vyhovuje právě Hadamardově rovnici (26), která zase vyjadřuje

*) Viz výtah z těch přednášek v Časopise, LVIII, p. 346—366. Užívám této příležitosti, abych opravil tři omyly ve formulích, jež jsou tam uvedeny:
Str. 358, rovnice (4): Integrační meze na levé straně jsou y' a y.
Str. 359, řádek 11 shora má zníti:

$$u(x, y, x', y') = (y' - x)^{-\beta}(y - x')^{-\beta}(y - x)^{2\beta}\, F(\beta, \beta, 1, \sigma).$$

onu základní myšlenku Huyghensova principu*); tentokrát je to vlastně výraz Huyghensova principu v užším smyslu toho slova, neboť na rovnici (22) převádějí se úlohy o šíření vln ve dvou rozměrech.

Ukáži nyní, že Hadamardova rovnice (26) dá se také řešiti metodou založenou na integraci lineárních funkčních transformací.

Budiž

$$\mathrm{f}_1(y) = \mathrm{f}(y) + h\int_0^y \mathrm{A}(\xi, y, y_0)\,\mathrm{f}(y_0)\,\mathrm{d}y_0 + h\,\mathrm{b}(\xi, y)\,\mathrm{f}(y),$$

kde A a b jsou dané spojité funkce, ξ parametr a h nekonečně malá veličina, infinitesimální lineární funkční transformace. Při daném ξ je každé funkci $\mathrm{f}(x)$ přiřaděna jiná funkce $\mathrm{f}_1(x)$. Zaveďme nyní funkci $\mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)$, která závisí též na kladné proměnné ε, takovou, že

$$\mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0) = 0 \text{ pro } y < y_0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0) = \mathrm{A}(\xi, y, y_0) \text{ pro } y_0 < y,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{y-\varepsilon}^{y} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\,\mathrm{d}y_0 = \lim_{\varepsilon=0} \int_{y}^{y+\varepsilon} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y_0, y)\,\mathrm{d}y_0 = \mathrm{b}(\xi, y).$$

Pak můžeme psáti hořejší transformaci ve tvaru

$$\mathrm{f}_1(y) = \mathrm{f}(y) + h \lim_{\varepsilon=0} \int_0^y \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\,\mathrm{f}(y_0)\,\mathrm{d}y_0. \tag{23}$$

Integrujme nyní tuto transformaci nehledíce k symbolu lim při konstantním ε podle ξ v mezích x_0, x. To znamená: rozdělíme interval (x_0, x) na n dílů o délce h, provedeme postupně transformace odpovídající hodnotám ξ v jednotlivých dělicích bodech**) a učiníme pak lim $h = 0$. Tak dostaneme v limitě transformaci

$$\mathrm{f}_1(y) = \mathrm{f}(y) + \int_0^y \Phi_\varepsilon(x, y, x_0, y_0)\,\mathrm{f}(y_0)\,\mathrm{d}y_0,$$

jejíž jádro Φ je dáno vzorcem

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(x, y, x_0, y_0) &= \int_{x_0}^{x} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi, y, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \\ &+ \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi_1} \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_1, y, \eta)\,\mathrm{B}(\varepsilon, \xi_2, \eta, y_0)\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta \ldots\end{aligned} \tag{24}$$

n-tý člen nekonečné řady na pravé straně je roven $(2n - 1)$-ná-

*) Hadamard odvodil rovnici (26) v práci uveřejněné v Bulletin de la Société math. de France t. *31*, 1903, p. 200—224.

**) Při skládání transformací užije se formule, kterou jsem dříve odvodil [viz Hostinský[9]), vzorec (11)].

sobnému integrálu součinu

$$\mathrm{B}(\varepsilon, \xi_1, y, \eta_1)\, \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \dots$$
$$\dots \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_{n-1}, \eta_{n-2}, \eta_{n-1})\, \mathrm{B}(\varepsilon, \xi_n, \eta_{n-1}, y_0);$$

integrační proměnné jsou $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ a integrační obor jest určen vztahy

$$x_0 \leqq \xi_n \leqq \xi_{n-1} \leqq \dots \leqq \xi_1 \leqq x, \quad y_0 \leqq \eta_{n-1} \leqq \eta_{n-2} \leqq \dots \leqq \eta_1 \leqq y.$$

Viděli jsme dříve, že smysl Chapmanovy rovnice (17) je tento: integrujeme funkční transformaci určitého typu napřed v mezích u, t, pak v mezích s, u. Tím dostaneme dvě funkční transformace, složíme je a jádro složené transformace vyjadřuje se dvěma způsoby: jednak je přímo rovno levé straně rovnice (17), jednak pravé straně téže rovnice, poněvadž skládání oněch dvou transformací řídí se formulí (19).

Zde užije se celkem stejného postupu; ale skládání transformací typu (23) řídí se jinou formulí než (19). Výsledek, ke kterému se dojde, vyslovím takto (odůvodnění bude předmětem jiné práce): Je-li $y \neq y_0$, jest podle (24)

$$\Phi_\varepsilon(x, y; x_0, y_0) = \lim_{\varepsilon=0} \Phi(x, y; x_0, y_0)$$

spojitá funkce čtyř proměnných, jež zůstává spojitou, když y_0 se blíží k y. Tato funkce, vyjádřená řadou (24) pro $\lim \varepsilon = 0$, závisí na libovolných funkcích $\mathrm{A}(\xi, y, y_0)$ a $\mathrm{b}(\xi, y)$ a vyhovuje funkční rovnici

$$\Phi(x, y, x_0, y_0) - \int_{y_0}^{y} \Phi(x, y, x_1, \eta)\, \Phi(x_1, \eta; x_0, y_0)\, d\eta$$
$$- \Phi(x_1, y, x_0, y_0)\, e^{\int_{x_1}^{x} \mathrm{b}(\xi, y)\, d\xi} - \Phi(x, y, x_1, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{b}(\xi, y_0)\, d\xi} = 0. \quad (25)$$

Vyhovuje-li funkce $\mathrm{G}(x, y, x_0, y_0)$ Hadamardově rovnici [viz „Časopis", LVIII, p. 358, rovnice (4)]:

$$\mathrm{G}(x, y, x_0, y_0) =$$
$$\int_{y}^{y_0} \mathrm{G}(x, y; x_1, \eta) \left[\mathrm{G}(x_1, \eta, x_0, y_0)\, \mathrm{a}(x_1, \eta) - \frac{\partial \mathrm{G}(x_1, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} \right] d\eta \, +$$
$$+ \, \mathrm{G}(x, y, x_1, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{b}(\xi, y_0)\, d\xi}, \quad (26)$$

vyhovuje funkce

$$\Phi(x, y, x_0, y_0) = \frac{\partial \mathrm{G}(x, y, x_0, y_0)}{\partial y} - \mathrm{a}(x, y)\, \mathrm{G}(x, y, x_0, y_0)$$

rovnici (25). Takto se převádí řešení rovnice (26) na řešení rovnice (25). Zbývá dokázati, že vzorec (24) vede k obecnému řešení rovnice (25); kdyby tomu tak bylo, vedl by vzorec (24) zároveň k obecnému řešení Hadamardovy rovnice (26).

*

Sur la théorie des chaînes de Markoff et sur l'intégration des transformations linéaires.

(Extrait de l'article précédent.)

Rappel des théorèmes fondamentaux de la théorie des chaînes*) et de quelques compléments qui y ont été ajoutés par Kaucký, Konečný, Potoček et Fréchet. Suivant Fréchet les quantités s_{jk} qui se présentent dans la théorie de la dispersion se déterminent par la résolution d'un système d'équations linéaires. Si les quantités p_{ik} qui définissent la chaîne ne sont pas toutes positives, la limite de $P_{ik}^{(n)}$ n'existe pas en général, mais la limite de moyennes arithmétiques (limite au sens de Cesàro) existe toujours (Fréchet).

Une généralisation de la notion de chaîne conduit au système d'équations (14); une autre donne l'équation de Chapman (17). Pour résoudre ces équations il faut revenir à la méthode d'intégration des substitutions linéaires introduite par Volterra en 1887. Volterra a montré comment cette intégration (composition d'une suite infinie de substitutions infinitésimales) donne la solution des équations différentielles linéaires. D'une manière analogue, l'intégration des transformations fonctionnelles donne la solution de l'équation de Chapman. La recherche des fonctions de Green pour l'équation de la chaleur et pour le problème de Dirichlet se ramène à l'étude de cette équation. En intégrant un autre type de transformations fonctionnelles linéaires on trouve la solution d'une équation fonctionnelle considérée par Hadamard en 1903.

Seznam prací uveřejněných v letech 1931—1933

o teorii Markovových řetězů a příbuzných problémech. Do tohoto seznamu nejsou pojaty spisy, které jsem citoval v práci Méthodes générales du Calcul des Probabilités (Mémorial des Sciences mathématiques fasc. LII, Paris 1931; viz bibliografii na str. 60—63).

Bernstein S.[1]): Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires. [Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, Bd. I. (Bericht u. allg. Vorträge) S. 288—309.]

Fréchet M.[1]): Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités „en chaîne". (Bull. Soc. Math. France, t. 60, 1932, p. 242—277.)

*) Voir l'ouvrage de l'auteur intitulé Méthodes générales du Calcul des Probabilités (Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 52, chap. II). La bibliographie placée à la fin de l'article fait suite de celle qui se trouve dans ce fascicule du Mémorial.

Fréchet M.[2]): Sur le comportement de certains noyaux de Fredholm itérés indéfiniment et sur les probabilités en chaîne. (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 195, 1932, p. 590—592.)

Fréchet M.[3]): Sur la solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne. (Tamtéž, t. 195, 1932, p. 639—641.)

Fréchet M.[4]): Sur la convergence des probabilités en chaîne. (Tamtéž, t. 194, 1932, p. 1542—1544.)

Fréchet M.[5]): Remarques sur les probabilités des événements en chaîne. (Tamtéž, t. 194, 1932, p. 1785—1786.)

Fréchet M.[6]): On the behavior of the n-th iterate of a Fredholm kernel as n becomes infinite. (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 18, 1932, p. 671 až 673.)

Fréchet M.[7]): Compléments à la théorie des probabilités discontinues „en chaîne". (Ann. Scuola norm. super. Pisa, vol. II, 1933, p. 131—164.)

Fréchet M.[8]): Les probabilités continues „en chaîne". (Comment. math. helv. t. 5, 1933, p. 175—245.)

Fréchet M.[9]): Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants. (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 178, Brno, 1933.)

Hadamard J.[1]): Sur le battage des cartes et ses relation avec la mécanique statistique. (Atti del Congresso internat. dei Matematici, Bologna, 1928, t. V, p. 133—140.)

Hadamard J. - Fréchet M.[1]): Sur les probabilités discontinues des événements „en chaîne". (Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik, Bd. 13, 1933, S. 92—97.)

Hostinský B.[1]): Sur les probabilités des effets qui dépendent d'une suite de transformations successives prises au hasard. [Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna 1928, t. VI, p. 61—62. (Vytištěno 1932.)]

Hostinský B.[2]): Čtyři přednášky o různých problémech teoretické fysiky. (Časopis pro pěstování mat. a fys., *61*, 1931, p. 33—80.)

Hostinský B.[3]): O některých aplikacích počtu pravděpodobnosti. (Sborník matem. přírodovědeckých kursů pro středoškolské profesory konaných v Brně 1931, Brno 1931, p. 1—15.)

Hostinský B.[4]): Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. (Rend. Acc. Lincei, vol. XIII, ser. 6a, 1o sem. 1931, p. 921—923.

Hostinský B.[5]): Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. (Tamtéž, vol. XIV, ser. 6a, 2o sem. 1931, p. 326—331.)

Hostinský B.[6]: Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. (Atti accad. naz. Lincei, ser. VI, t. 16, 1932, p. 25—27.)

Hostinský B.[7]): Sulla teoria degli errori. (Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, vol. III, 1932, p. 3—10.)

Hostinský B.[8]): Applications du calcul des probabilités à la théorie du mouvement Brownien. (Ann. de l'Inst. H. Poincaré, vol. III, fasc. I, 1932, p. 1—74.)

Hostinský B.[9]): Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 156, Brno, 1932.)

Hostinský B.[10]): Valeurs moyennes des quantités qui varient avec le temps. [Verhandlungen des internat. Mathematiker-Kongresses. Zürich, 1932, Bd. II. (Sektionsvorträge) S. 241—242.]

Kolmogoroff A.[1]): Zur Theorie der stetigen zufälligen Processe. (Math. Annalen, Bd. 108, 1933, str. 149—160.)

Kolmogoroff A. - Leontowitsch M.[2]): Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche. (Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Bd. 4, 1933, p. 1—13.)

Konečný M.[1]): O teorii Markovových řetězů. (Sur la théorie des chaînes de Markoff.) (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 147, Brno, 1931.)

Konečný M.[2]): Trois théorèmes sur la limite des transformations itérées. (Tamtéž, č. 163, Brno, 1932.)

Métadier J.[1]): Sur l'étude du mouvement brownien dans un champ de forces. (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 195, 1932, p. 649—651.)

Métadier J.[2]): Sur la théorie du mouvement Brownien et la méthode opératorielle. (Tamtéž, t. 197, 1933, p. 29—31.)

Mises R. v.[1]): Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. (Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Wien, 1931, IV. Abschnitt.)

Mises R. v.[2]): Théorie des probabilités. Fondements et applications. (Annales de l'Institut H. Poincaré, Vol. III, fasc. II, 1932, p. 137—190.)

Moisil Gr. C.[1]): Sur l'intégration des matrices. (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 195, 1932, p. 456—458.)

Moisil Gr. C.[2]): Sur les sauts de probabilité dans les évolutions stochastiques. (Tamtéž, t. 195, 1932, p. 456—458.)

Potoček J.[1]): O dispersi v teorii Markovových řetězů. (Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markoff.) (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 154, Brno, 1932.)

Potoček J.[2]): Příspěvek k teorii Brownova pohybu. (Contribution à la théorie des chaînes de Markoff.) (Tamtéž, č. 171, Brno, 1933.)

Potoček J.[3]): K Brownovu pohybu torsního zrcátka. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, sv. 63, 1933 p. 45—51.)

Schulz G.[1]): Über Markoffsche Ketten. (Zeitschrift für angew. Math. u. Mechanik, Bd. 11, 1931, p. 444.)

Schulz G.[2]): Über Markoffsche Ketten höherer Ordnung. (Tamtéž, Bd. 13, 1933, p. 235—238.)

Schulz G.[3]): Über das Summenproblem bei Markoffschen Ketten. [Verhandl. des internat. Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, Bd. II, (Sektionsvorträge), S. 230—231.]

Romanovsky V.[1]): Sur les chaînes discrètes de Markoff. (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 191, 1930, p. 450—452.)

Romanovsky V.[2]): Sur une classe d'équations intégrales linéaires. (Tamtéž, t. 191, 1930, p. 552—555.)

Romanovsky V.[3]): Sur les chaînes biconnexes continues de Markoff. (Tamtéž, t. 191, 1930, p. 695—697.)

Romanovsky V.[4]): Sur une classe d'équations intégrales linéaires. (Acta mathematica, t. 59, 1932, p. 99—208.)

Urban F. M.[1]): Das Mischungsproblem des Daniel Bernoulli. (Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna 1928, t. VI, p. 21—25.)