Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Základové geometrického počtu Grassmannova. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 4, 265--284

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123434`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1896

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

$$\mathrm{OM} \equiv \left(b \cot \frac{\pi}{n} + a\right) y - \left(a \cot \frac{\pi}{n} + b\right) x = 0$$

$$\mathrm{AN} \equiv \left(2a + b \cot \frac{\pi}{n}\right) y + bx - ab = 0$$

$$\mathrm{BP} \equiv ay + \left(a \cot \frac{\pi}{n} + 2\,b\right) x - ab = 0$$

a tím platí:

$$\begin{vmatrix} b \cot \frac{\pi}{n} + a, & -a \cot \frac{\pi}{n} - b & 0 \\ 2\,a + b \cot \frac{\pi}{n} & b & -ab \\ a & a \cot \frac{\pi}{n} + 2\,b & -ab \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3. Trojúhelníky OAB, MNP jsou perspektivické, homologické strany protínají se v bodech téže přímky Π.

4. Kuželosečka jdoucí body RLOKS dotýká se přímky NP v bodě O; tím je RLOOKS Pascalův šestiúhelník a přímka Π jeho Pascalova přímka.

Základové geometrického počtu Grassmannova.

Podává **A. Libický**, professor v Roudnici.

(Pokračování.)

Jako příklad ku sečítání vektorů a bodů buď zde uveden známý způsob, kterým se vyjadřuje libovolný vektor součtem tří vektorů, odvozených z daných jednotek aneb libovolný bod součtem čtyř bodů mnohonásobných. Jsou-li i, j, k tři jednotky vektorů, o nichž předpokládáme, že nejsou rovnoběžny k jedné rovině (nejsou komplanarní), lze každý jiný vektor a pokládati za součet tří vektorů xi, yj, zk, kde značí teď odchylně od výše zavedeného označování x, y, z čísla, jimiž se odvozují sčítanci xi, yj, zk z jednotek i, j, k. O geometrickém významu těchto sčítanců netřeba se šířiti. Můžeme tudíž psáti:

(14) $$a = xi + yj + zk;$$

čísla x, y, z jsou tu *souřadnicemi* vektora a. Dle terminologie Grassmannovy jest vektor a *numericky odvozen* ze soustavy jednotek i, j, k.

Kladouce za vektor a rozdíl dvou bodů $-\mathrm{A} + \mathrm{M}$, obdržíme

(15) $$\mathrm{M} = \mathrm{A} + xi + yj + zk.$$

Podobně lze každý bod v prostoru numericky odvoditi ze čtyř bodů, jež neleží v jedné rovině. Buďtež dány čtyři body jednoduché A, B, C, D; položíme-li $-\mathrm{A} + \mathrm{B} = i$, $-\mathrm{A} + \mathrm{C} = j$, $-\mathrm{A} + \mathrm{D} = k$, obdržíme z poslední rovnice:

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + x(-\mathrm{A} + \mathrm{B}) + y(-\mathrm{A} + \mathrm{C}) + z(-\mathrm{A} + \mathrm{D})$$

čili

$$\mathrm{M} = (1 - x - y - z)\mathrm{A} + x\mathrm{B} + y\mathrm{C} + z\mathrm{D}.$$

Zavedeme-li v této rovnici

$$u = 1 - (x + y + z),$$

nabudeme pro bod M rovnice

(16) $$\mathrm{M} = u\mathrm{A} + x\mathrm{B} + y\mathrm{C} + z\mathrm{D}.$$

Obecněji mohou býti čtyři dané body mnohonásobnými, na př. $\alpha\mathrm{A}$, $\beta\mathrm{B}$, $\gamma\mathrm{C}$, $\delta\mathrm{D}$; vloží-li se do (16) za A, B, C, D hodnoty $\frac{\alpha\mathrm{A}}{\alpha}$, $\frac{\beta\mathrm{B}}{\beta}$, $\frac{\gamma\mathrm{C}}{\gamma}$, $\frac{\delta\mathrm{D}}{\delta}$ a násobí-li se obě strany této rovnice číslem μ, lze ji psáti ve tvaru

$$\mu\mathrm{M} = \frac{\mu u}{\alpha}\alpha\mathrm{A} + \frac{\mu x}{\beta}\beta\mathrm{B} + \frac{\mu y}{\gamma}\gamma\mathrm{C} + \frac{\mu z}{\delta}\delta\mathrm{D},$$

aneb, označí-li se kratčeji $\frac{\mu u}{\alpha} = u'$, $\frac{\mu x}{\beta} = x'$, atd.

(16a) $$\mu\mathrm{M} = u'\alpha\mathrm{A} + x'\beta\mathrm{B} + y'\gamma\mathrm{C} + z'\delta\mathrm{D}.$$

Místa bodů A, B, C, D tvoří čtyřstěn základní, čísla u', x', y', z' jsou *čtyřstěnnými* souřadnicemi bodu $\mu\mathrm{M}$. Jsou-li body A, B, C, D jednoduchými, jsou příslušná čísla u, x, y, z

barycentrickými souřadnicemi Möbiusovými. Jest zřejmo, že platí pro tyto souřadnice podmínečná rovnice

$$u + x + y + z = 1;$$

obecněji

$$\alpha u' + \beta x' + \gamma y' + \delta z' = \mu.$$

Je-li ve zvláštním případě

$$x + y + z = 1,$$

čili

$$u = 0,$$

lze dokázati, že bod M leží s body B, C, D v téže rovině. Neboť pak jest

$$z = 1 - x - y,$$

tudíž

$$\mathrm{M} = x\mathrm{B} + y\mathrm{C} + (1 - x - y)\,\mathrm{D} = \mathrm{D} + x(-\mathrm{D} + \mathrm{B}) + y(-\mathrm{D} + \mathrm{C}),$$

z čehož

$$-\mathrm{D} + \mathrm{M} = x(-\mathrm{D} + \mathrm{B}) + y(-\mathrm{D} + \mathrm{C}).$$

Vyjádřili jsme takto vektor $-\mathrm{D} + \mathrm{M}$ součtem dvou vektorů, rovnoběžných k vektorům $-\mathrm{D} + \mathrm{B}$ a $-\mathrm{D} + \mathrm{C}$, jež leží v rovině položené body B, C a D. Poněvadž se v této rovině nalézá počátek vektora $-\mathrm{D} + \mathrm{M}$, musí v ní ležeti též jeho konec M.

O čtyřech bodech M, B, C, D, vyhovujících rovnici

$$\mathrm{M} = x\mathrm{B} + y\mathrm{C} + z\mathrm{D},$$

dí Grassmann, že jsou *ve vztahu číselném.*

Je-li ještě $x = 0$, čili $y + z = 1$, jest

$$\mathrm{M} = y\mathrm{C} + (1 - y)\mathrm{D} = \mathrm{D} + y(-\mathrm{D} + \mathrm{C}),$$

neb

$$-\mathrm{D} + \mathrm{M} = y(-\mathrm{D} + \mathrm{C}),$$

t. j. tři body M, C, D, které jsou ve vztahu číselném, leží na jedné přímce.

Poznali jsme, že lze odvoditi: 1. všechny body v prostoru ze čtyř daných veličin stupně prvního, 2. všechny body v rovině ze tří veličin téhož stupně, 3. všechny body přímky ze dvou takových veličin; Grassmannovi jest tudíž prostor *místem stupně čtvrtého,* rovina *místem stupně třetího,* přímka *místem stupně druhého* a konečně geometrický bod *místem stupně prvního. Hlavním místem* (Hauptgebiet) jest v geometrii trojrozměrné prostor, v geometrii rovinné rovina a v geometrii útvarů ležících na přímce přímka.

Násobení. Z různých druhů násobení, která lze vykonávati s veličinami *extensivními**), k nimž též veličiny geometrické náležejí, jsou nejdůležitější: násobení *externí* a *interní.*

Externí součiny vektorů a bodů. Externí součin *dvou vektorů* a a b vznikne, posouvá-li se násobenec a rovnoběžně tak, že každý jeho bod proběhne vektor rovný násobiteli b. Přísluší tudíž každému externímu součinu dvou vektorů jednak určitý běh roviny, rovnoběžné k daným vektorům, jednak jakási metrická veličina, totiž plocha rovnoběžníka, jehož sousedními stranami jsou oba činitelé. Můžeme si pak mysliti tento rovnoběžník sestrojený v kterékoli rovině osnovy, určené běhy daných vektorů. Tomuto součinu přisuzujeme též znaménko jakostné a to kladné neb záporné dle toho, leží-li pro pozorovatele, kráčejícího po obvodě rovnoběžníka směrem násobence, tato plocha na levo neb na pravo. Externí součin vektorů a a b označujeme dle Grassmanna $[ab]$**). Dva externí součiny $[ab]$ a $[cd]$ se sobě rovnají, náleží-li jim táž osnova rovin a jsou-li plochy rovnoběžníků jim příslušejících stejné co do velikosti i co do znaménka.

Z definice externího součinu dvou vektorů plyne:

1. Externí součin dvou vektorů rovnoběžných rovná se nulle. Má-li tedy externí součin míti hodnotu rozdílnou od nully, musí jeden vektor ležeti *mimo* druhý; odtud jméno tohoto součinu. Naopak také platí: Je-li externí součin dvou vektorů (jichž délky se nerovnají nulle) roveň nulle, jsou oba vektory rovnoběžné.

---

*) Veličinami extensivními (dle Hankela komplexními) nazývá Grassmann veličiny, které jsou odvozeny ze soustavy jednotek $i_1, i_2, \ldots i_n$, na sobě nezávislých, čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, tedy výrazy tvaru

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n.$$

**) Jen uvnitř těchto závorek, kde se není obávati nedorozumění, užíváme k označování extern. součinů též závorek tvaru ( ).

2. Externí násobení dvou vektorů není kommutativní. Neboť leží-li plocha rovnoběžníka, sestrojeného z vektorů a a b pro pozorovatele, pohybujícího se směrem vektora a, $\begin{array}{l}\text{na pravo,}\\ \text{na levo,}\end{array}$ jest táž plocha pro pozorovatele, který postupuje směrem vektora b (ze společného počátku obou vektorů), položena $\begin{array}{l}\text{na levo.}\\ \text{na pravo.}\end{array}$ Tudíž jest

$$[ab] = -[ba].$$

3. Značí-li α a β čísla (reálná), jest

$$[\alpha a\,.\,\beta b] = \alpha\beta[ab].$$

4. Pokládajíce za součet dvou rovnoběžníků, položených v různoběžných rovinách a majících jednu stranu společnou (v průsečnici obou rovin), rovnoběžník o téže straně, jehož druhou stranou jest geometrický součet nestejných stran daných rovnoběžníků, můžeme psáti

$$[ac] + [bc] = [(a + b)c],$$

čímž i distributivnímu principu externího násobení vzhledem ku sečítání jest vyhověno.

Externí součin dvou bodů jednoduchých A a B vzniká analogicky k externímu součinu dvou vektorů. Souhrnu běhů, jež jsou obsaženy v osnově rovin, stanovené dvěma vektory, odpovídá souhrn geometrických bodů, nalezajících se v přímé řadě bodové, určené místy bodů A a B. Metrickou veličinou, která tu nastupuje na místo plochy rovnoběžníka příslušné součinu dvou vektorů, jest patrně délka, jejíž krajními body jsou tato místa obou činitelů. I externímu součinu dvou bodů přisuzujeme znaménko jakostné; součiny [AB] a [BA] jsou protivně označeny.

Všechny výsledky, které jsme obdrželi z definice externího součinu dvou vektorů, platí obdobně pro externí součiny dvou bodů; zejména jest:

$$[\mathrm{AA}] = 0,$$

$$[\mathrm{AB}] = -[\mathrm{BA}],$$

$$[\alpha A \,.\, \beta B] = \alpha\beta[AB];$$

též zachováme při násobení bodů princip distributivní.

Poněvadž jest

$$[AB] = -[AA] + [AB] = [A(-A + B)] = [Aa],$$

můžeme dáti extern. součinu dvou bodů též tvar extern. součinu násobence A s vektorem $-A + B = a$. O tomto součinu snadno dokážeme, že se hodnota jeho nemění, pošineme-li vektor a na přímce, body A a B stanovené tak, aby jeho počáteční bod A přišel do jakéhokoli jiného bodu C této přímky. Učiníme-li

$$-C + D = -A + B$$

bude

$$[A(-A + B)] = [A(-C + D)],$$

aneb, připojíme-li na pravé straně k násobenci A rozdíl

$$C - C = 0,$$

též

$$\begin{aligned}[A(-A + B)] &= [(-C + A + C)(-C + D)] \\ &= [(-C + A)(-C + D)] + [C(-C + D)].\end{aligned}$$

Vektory $(-C + A)$ a $(-C + D)$ leží na téže přímce; jejich extern. součin rovná se tudíž nulle a zbývá

$$[A(-A + B)] = [C(-C - D)].$$

Hodnota extern. součinu dvou bodů (aneb bodu a vektoru) se tudíž nemění, pošineme-li oba body na přímce jimi položené tak, aby se nezměnila vzájemná jejich vzdálenost.

Vektor, který lze pošinovati toliko na jediné pevné přímce, tedy geom. veličinu, mající určitou velikost, běh a polohu (ve vytčeném právě smyslu), nazývejme dle Clifforda z důvodů kinematických *rotorem* (zkráceno ze slova rotator)*). Délka vektoru jest *délkou* rotoru a přímka, po níž lze vektor pošinovati, *osou* jeho. Budiž zde poznamenáno, že přímka neomezená (ve smyslu v geometrii obvyklém), jest Grassmanovi rotor, jehož délka rovná se jednotce.

*) Grassmann nazývá takový vektor *Linientheil*, Hankel *Geradenstück*

Rovnoběžníky, jež představují externí součiny dvou vektorů,*) a rotory jsou geometrickými veličinami *stupně druhého.*

Externí součin tří vektorů a, b, c povstane, pohybuje-li se nejprvé každý bod prvního činitele a tím způsobem, že opisuje vektor b a pak každý bod plochy rovnoběžníka tímto pohybem vzniklého tak, aby dráha jeho rovnala se vektoru c. Místem tohoto součinu jest prostor, jeho metrickou veličinou obsah rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany v jednom rohu se sbíhající jsou vektory a, b, c. Extern. součinu $[abc]$ přisuzujeme též znaménko jakostné, které určíme takto: Vztyčí-li se v kterémkoli bodu roviny, jež jest místem rovnoběžníka součinu $[ab]$, kolmice a postaví-li se pozorovatel zpříma do toho směru jejího, se kterého vidí probíhati obvod rovnoběžníka od pravé ruky k levé, může padnouti třetí hrana rovnoběžnostěnu c s takto stanoveným směrem kolmice buď do téže části prostoru, omezeného s jedné strany zmíněnou rovinou, neb do části druhé; v prvním případě jest součin $[abc]$ kladný, v druhém záporný. Dva součiny $[abc]$ a $[def]$ se sobě rovnají, jsou-li oba příslušné rovnoběžnostěny stejné a stejně označené.

Z definice externího součinu tří vektorů plyne:

1. Extern. součin tří komplanarních vektorů rovná se nulle Tedy jest také:

$$[aab] = [abb] = [aba] = 0.$$

A naopak: Je-li extern. součin $[abc]$ roveň nulle, jsou vektory a, b, c komplanarní.

2. Vymění-li v součinu $[abc]$ kterékoli dva činitele svoje místo, změní se jeho znaménko.

Platnost rovnic $[abc] = -[bac] = -[cba] = -[acb]$ dokážeme, ustanovíme-li u každého součinu nejprve smysl, ve kterém musíme probíhati obvod rovnoběžníka, náležejícího k extern. součinu prvních dvou činitelů; z toho odvodíme kladný směr normály vztyčené na rovinu tohoto rovnoběžníka a přihlédneme-li ještě ku směru třetího činitele, určíme konečně dle pravidla výše vytčeného znaménko součinu.

---

*) Poněvadž dvojice sil jest dána takovým rovnoběžníkem, mohl by slouti též *rovnoběžníkem dvojice.*

Znaménko extern. součinu tří vektorů se nemění, provedeme-li sudý počet takových výměn, tedy

$$[abc] = [bca] = [cab].$$

3. Z toho, co bylo pověděno o vytvoření extern. součinu dvou a tří vektorů soudíme, že

$$[abc] = [(ab)\,c] = [a\,(bc)];$$

t. j. pro exter. násobení tří vektorů platí princip associativní.

4. Poněvadž jest součtem dvou rovnoběžnostěnů, majících stejnou základnu, rovnoběžnostěn o téže základně, jehož výška se rovná součtu výšek v a v' daných rovnoběžnostěnů, můžeme psáti:

$$[abc] + [abd] = [ab\,(c + d)], \tag{17a}$$

uvážíce ještě, že průměty vektorů c, d, $c + d$ na přímku kolmou k rovině základny jsou v, v', $v + v'$.

Podobně platí rovnice:

$$[abc] + [ade] = [a\,(bc + de)]. \tag{17b}$$

Neboť je-li f nějaký vektor položený v průsečnici rovin příslušných součinům $[bc]$ a $[de]$, lze za $[bc]$ klásti součin $[fg]$ o témž místě, jehož rovnoběžník se rovná rovnoběžníku součinu $[bc]$; taktéž nahradíme $[de]$ součinem $[fh]$. Tím obdržíme:

$$[abc] + [ade] = [afg] + [afh] = [af\,(g + h)]$$

neb, protože

$$[f\,(g + h)] = [fg + fh]$$

též $\quad [abc] + [ade] = [a\,(fg + fh)] = [a\,(bc + de)].$

Tedy jest při extern. násobení tří vektorů vyhověno také principu distributivnímu.

Externí součin *tří bodů jednoduchých* A, B, C vytvoříme touto úvahou: Pokládáme-li prostor za soubor všech možných běhů, odpovídá mu rovina jako soubor všech geom. bodů té vlastnosti, že každé dva body stanoví přímku zcela v rovině obsaženou. Jest tedy místem extern. součinu tří bodů rovina těmi body položená; jeho metrickou veličinou jest dle Grassmanna obsah rovnoběžníka o stranách $-A+B$ a $-A+C$*).

Máme za to, že i pro extern. násobení tří bodů platí principy associativní a distributivní, jakož i věta, že extern. součin rovná se nulle, jsou-li dva jeho činitelé stejnými. Tudíž lze psáti:

$$\begin{aligned}[ABC] &= -[ABA]+[ABC]=[AB(-A+C)] \\ &= [A(-A+B)\,(-A+C)],\end{aligned}$$

t. j. extern. součin tří bodů A, B, C rovná se extern. součinu prvního činitele A a rovnoběžníka sestrojeného z vektorů $-A+B$ a $-A+C$. Znaménkem tohoto rovnoběžníka řídí se znaménko součinu [ABC].

Pošiňme nyní tento rovnoběžník libovolně v rovině, body A, B, C stanovené; jsou-li nové polohy stran $-A+B$, $-A+C$ vektory $-D+E$, $-D+F$, jest též

$$[A(-A+B)\,(-A+C)]=[A(-D+E)\,(-D+F)],$$

tudíž

$$\begin{aligned}[ABC] &= [A(-D+E)\,(-D+F)] \\ &= [(A(-D+D)\,(-D+E)\,(-D+F)] \\ &= [(-D+A)\,(-D+E)\,(-D+F)] \\ &\quad +[D(-D+E)\,(-D+F)].\end{aligned}$$

Součin $[(-D+A)\,(-D+E)\,(-D+F)]$ rovná se nulle, poněvadž vektory $-D+A$, $-D+E$, $-D+F$ jsou komplanární; zbývá tedy

$$[ABC]=[D(-D+E)\,(-D+F)].$$

Dle toho se součin [ABC] nemění, pošineme-li libovolně rovnoběžník o stranách $-A+B$, $-A+C$ v rovině body A, B, C položené.

Rovnoběžník, který lze pošinovati toliko v jediné rovině, stanoví *rovinu momentovou***) (dle Grassmanna „Flächentheil", dle Hankela „Ebenenstück"). Obsah rovnoběžníka jest *obsahem* jejím a rovina, v níž jest položen, *místem* jejím. V nauce

*) Mohl by to býti jakýkoli obrazec rovinný téhož obsahu, jehož obvod lze projíti v určitém smyslu.

**) Není-li se obávati nedorozumění, nazývám tuto geom. veličinu krátce *rovinou*.

Grassmannově jest rovina neomezená rovinou momentovou, jejíž obsah rovná se jednotce.

Rovnoběžnostěn, jímž jest dán extern. součin tří vektorů, a rovina momentová jsou geom. veličiny *stupně třetího.*

Externí součin čtyř vektorů (neb pěti bodů) nemá v prostoru trojrozměrném žádného významu; vyskytne-li se nám v některých případech, položíme zaň nullu, poznamenávajíce, že bude později nutno jiným ustanovením o to se postarati, abychom při násobení v počtu činitelů nebyli tak omezeni. Jest tedy ještě vyšetřiti externí součin *čtyř jednoduchých bodů.* Již z toho, co bylo pověděno o extern. součinu dvou a tří jednoduchých bodů, vysvítá, že sluší extern. součinem čtyř bodů A, B, C, D vyrozumívati nějakou část prostoru, který teď pokládáme za souhrn geom. bodů.

Předpokládáme-li, že pro extern. násobení čtyř bodů platí všechny zákony, které jsme poznali při extern. násobení tří bodů, můžeme psáti, majíce zření k významu součinu [ABC]:

$$\begin{aligned}[ABCD] &= -[ABCA] + [ABCD] = [ABC(-A+D)] \\ &= [A(-A+B)\,(-A+C)\,(-A+D)].\end{aligned}$$

Extern. součin [ABCD] rovná se tedy extern. součinu prvního činitele A a rovnoběžnostěnu určujícímu součin vektorů $-A+B$, $-A+C$, $-A+D$. Součin [ABCD] se nezmění, pošineme-li tento rovnoběžnostěn libovolně v prostoru. Neboť, je-li nová jeho poloha dána body E, F, G, H, při čemž

$$\begin{aligned}&[(-A+B)\,(-A+C)\,(-A+D)] \\ &= [(-E+F)\,(-E+G)\,(-E+H)],\end{aligned}$$

lze psáti:

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [A(-A+B)\,(-A+C)\,(-A+D)] \\ &= [A(-E+F)\,(-E+G)\,(-E+H)] \\ &= [(A-E+E)(-E+F)(-E+G)\,(-E+H)] \\ &= [(-E+A)\,(-E+F)\,(-E+G)\,(-E+H)] \\ &\quad + [E(-E+F)\,(-E+G)\,(-E+H)].\end{aligned}$$

Předposlední součin jest součinem čtyř vektorů, hodnota jeho jest nulla; i zbývá

$$[ABCD] = [E(-E+F)\,(-E+G)\,(-E+H)],$$

čímž jest uvedená vlastnost rovnoběžnostěnu dokázána.

Rovnoběžnostěn, který lze libovolně v prostoru pošinovati, nazývám *tělesem extensivním* (Grassmannův „Körpertheil", Hankelův „Raumstück"). Obsah rovnoběžnostěnu jest *obsahem* extens. tělesa, prostor jest *místem* jeho.

Těleso extensivní jest geom. veličinou *stupně čtvrtého.*

Těmito úvahami o extern. součinech vektorů a bodů dospěli jsme ku geom. veličinám stupňů vyšších, jichž přehled tuto podávám:

Geometrická veličina		Její místo	metrická vel.
stupně prvního	vektor	běh	délka
	bod hmotný	bod geom.	součinitel
stupně druhého	rovnoběžník dvojice	běh roviny	obsah rovnoběžníka
	rotor	přímka	vzdál. dvou bodů
stupně třetího	rovnoběžnostěn	prostor jakožto soubor běhů	obsah rovnoběžnostěnu
	rovina momentová	rovina	obsah obrazce
stupně čtvrtého	těleso extensivní	prostor jakožto soubor bodů	obsah rovnoběžnostěnu

Budiž zde ještě poznamenáno, že bod jako činitel mění vektor v příbuzný rotor, rovnoběžník dvojice v rovinu momentovou a rovnoběžnostěn v těleso extensivní.

Ku konci tohoto oddílu odvodím výrazy, vyjadřující geometrické veličiny vyšších stupňů právě uvedené souřadnicemi jejich činitelů a to buď v soustavě vektorů (i, j, k) neb v soustavě bodů (A, B, C, D).

Buďtež dány v soustavě (i, j, k) dva vektory:

$$a = xi + yj + zk,$$
$$b = x'i + y'j + z'k;$$

pro jejich externí součin najdeme:

$$[ab] = (xy' - yx')\,[ij] + (yz' - zy')\,[jk] + (zx' - xz')\,[ki], \qquad (18)$$

ježto

$$[ii] = [jj] = [kk] = 0$$

a

$$[ji] = -[ij], [kj] = -[jk], [ik] = -[ki].$$

Externí součiny $[ij]$, $[jk]$, $[ki]$ na pravé straně této rovnice se vyskytující jsou dle Grassmanna *jednotkami stupně druhého.* O geometrickém významu každého ze tří sčítanců, jichž součtem jest exter. součin $[ab]$ dán, netřeba se šířiti.

Jsou-li vektory a a b rovnoběžné, jest $[ab] = 0$; z toho obdržíme známou podmínku pro rovnoběžnost dvou vektorů:

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{matrix} \right\| = 0.$$

Je-li dán ještě třetí vektor

$$c = x''i + y''j + z''k,$$

můžeme snadno stanoviti výraz pro $[abc]$; přihlížejíce k větám, které jsme výše z definice extern. součinu tří vektorů odvodili, nabudeme:

$$[abc] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} [ijk]. \qquad (19)$$

Externí součin $[ijk]$ jest *jednotkou stupně třetího.*

Podmínka, že tři vektory jsou komplanární jest dle toho

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

A podobně vyjádříme extern. součiny dvou, tří a čtyř bodů jednoduchých v soustavě (A, B, C, D); jsou-li nejprve dány dva body M a N rovnicemi:

$$\mathrm{M} = u_1\,\mathrm{A} + x_1\,\mathrm{B} + y_1\,\mathrm{C} + z_1\,\mathrm{D},$$
$$\mathrm{N} = u_2\,\mathrm{A} + x_2\,\mathrm{B} + y_2\,\mathrm{C} + z_2\,\mathrm{D},$$

obdržíme pro rotor [MN] výraz:

$$[MN] = u_1 x_2 [AB] + u_1 y_2 [AC] + u_1 z_2 [AD] + x_1 u_2 [BA] + x_1 y_2 [BC] + x_1 z_2 [BD] + y_1 u_2 [CA] + y_1 x_2 [CB] + y_1 z_2 [CD] + z_1 u_2 [DA] + z_1 x_2 [DB] + z_1 y_2 [DC],$$

uvážíce, že $[AA] = [BB] = [CC] = [DD] = 0$. Kladouce dále na pravé straně $[BA] = -[AB]$, $[CA] = -[AC]$ atd. nalezneme:

$$[MN] = (u_1 x_2 - x_1 u_2)[AB] + (x_1 y_2 - y_1 x_2)[BC] + (y_1 u_2 - u_1 y_2)[CA] + (u_1 z_2 - z_1 u_2)[AD] + (x_1 z_2 - z_1 x_2)[BD] + (y_1 z_2 - z_1 y_2)[CD]$$

aneb, poznačíme-li determinanty stupně druhého, které se tu vyskytují jako součinitelé rotorů [AB], [BC], [CA] atd kratčeji:

$$[MN] = p_{12}[AB] + p_{23}[BC] + p_{31}[CA] + p_{14}[AD] + p_{24}[BD] + p_{34}[CD] \tag{20}$$

Determinanty p_{12}, p_{23}, p_{31} atd. jsou *souřadnicemi rotoru*, vyhovují kvadratické rovnici

$$p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0.$$

Jest známo, že poprvé Plücker užil podobných výrazů k určení přímky jakožto prvku prostorového.

Buď dán mimo body M a N ještě třetí bod

$$O = u_3 A + x_3 B + y_3 C + z_3 D,$$

pak vypočítáme snadno pro rovinu výraz:

$$[MNO] = p_{123}[ABC] + p_{124}[ABD] + p_{134}[ACD] + p_{234}[BCD], \tag{21}$$

kde značí

$$p_{123} = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \; p_{124} = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & z_1 \\ u_2 & x_2 & z_2 \\ u_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ atd.}$$

Pro extensivní těleso zjednáme si konečně vzorec:

$$[MNOP] = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ u_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} [ABCD]. \tag{22}$$

V soustavě (A, B, C, D) vyskytují se čtyři jednotky stupně prvého, totiž body A, B, C, D, jichž místa jsou vrcholy základního čtyřstěnu; dále šest jednotek stupně druhého, totiž rotory [AB], [BC], [CA], [AD], [BD], [CD], jichž osy jsou prodloužené hrany tohoto čtyřstěnu; čtyři jednotky stupně třetího: [ABC], [ABD], [ACD], [BCD], jichž místa jsou roviny obsahující stěny jeho a konečně jedna jednotka stupně čtvrtého [ABCD]. Z těchto jednotek odvozují se geom. veličiny, které násobením bodů vznikají, determinanty stupně druhého, třetího a čtvrtého, utvořenými dle vzorců (20), (21) a (22) ze souřadnic jednotlivých činitelů.

Důležitý jest ten případ zvláštní, v němž položíme buď za součin [*ijk*] neb za [ABCD] *absolutní jednotku;* pak se vyjadřuje každý rovnoběžnostěn, udávající součin tří vektorů neb každé těleso extensivní pouhým číslem. Násobíme-li veličiny geometrické externě, šetříce při tom této podmínky, provádíme násobení, které nazývá Grassmann *stereometrickým.**) V následujícím chceme často tohoto násobení užívati.

Doplňky geom. veličin. Vztyčíme-li v kterémkoli bodě roviny, v níž leží rovnoběžník extern. součinu [*ab*] kolmici a vneseme-li na ni tolik jednotek délkových, kolik má obsah rovnoběžníka jednotek čtverečných a to ve směru kladném neb záporném dle toho, je-li součin [*ab*] kladný neb záporný, obdržíme vektor, který nazývá Grassmann *doplňkem* součinu [*ab*]. Poznačíme-li tento vektor d, píšeme:

$$d = |[ab];$$

naopak jest též rovnoběžník součinu [*ab*] doplňkem vektora d, tedy

$$[ab] = |d.$$

Sestrojme z vektorů a, b, c rovnoběžnostěn**) a protněme jej rovinou R kolmou ku c; rovina ta protíná rovnoběžníky příslušné k součinům [*ac*] a [*bc*] v úsečkách a' a b'. Veďme

*) Podobný význam, jaký má násobení stereometrické pro geometrii prostorovou, má pro geometrii rovinnou násobení *planimetrické,* při němž buď [*ij*] neb [ABC] se rovná absol. jednotce.

**) Laskavý čtenář znázorní si snadno následující úvahu nákresem.

dále v rovnoběžníku o stranách a a b úhlopříčku $s = a + b$; rovina R seče rovnoběžník příslušící k součinu $[sc]$ v úsečce s', která se patrně rovná součtu $a' + b'$. I jsou úsečky a', b' s' výšky rovnoběžníků $[ac]$, $[bc]$ a $[sc]$, majících stejnou základnu c; tudíž jsou obsahy těchto rovnoběžníků dle známé věty geometrické v přímém poměru úseček a', b', s'. Buďtež nyní doplňky součinů $[ac]$ a $[bc]$ vektory d a e vedené v rovině R; ty jsou především kolmé k a' a b' a poněvadž délky jejich mají tolik jednotek, kolik jednotek čtverečných mají rovnoběžníky součinů $[ac]$ a $[bc]$, jsou též úměrny k těmto dvěma úsečkám. Sestrojíme-li pak trojúhelník, jehož dvě strany jsou tyto doplňky, bude tento trojúhelník podobný k trojúhelníku sestrojenému z úseček a', b', s'; tudíž třetí jeho strana f jest doplňkem součinu $[sc]$. Ježto $f = d + e$, jest též

$$|\,[ac] + |\,[bc] = |\,[sc]$$

čili

$$|\,[ac] + |\,[bc] = |\,[(a + b)\,c]. \tag{23}$$

Z rovnice

$$[ac] + [bc] = [sc]$$

plyne

$$|\,d + |\,e = |\,f$$

neb

$$|\,d + |\,e = |\,(d + e), \tag{24}$$

což lze rozšířiti na libovolný počet sčítanců.

O třech vektorech i, j, k, které nám byly relativními jednotkami, předpokládejme teď, že stojí vzájemně na sobě kolmo jakož i, že $[ijk] = 1$; pak tvoří dle Grassmanna *normální skupinu* vektorů.

V této skupině buďtež součiny $[jk]$, $[ki]$, $[ij]$ relativními jednotkami pro geom. veličiny stupně druhého; tudíž jest

$$i = |\,[jk], \quad j = |\,[ki], \quad k = |\,[ij],$$

tedy také

$$|\,i = [jk], \quad |\,j = [ki], \quad |\,k = [ij].$$

Pro doplněk vektora $a = xi + yj + zk$ nabudeme pak výrazu:

$$|\,a = x\,[jk] + y\,[ki] + z\,[ij]$$

a pro doplněk součinu

$$[ab] = (xy' - yx')[ij] + (yz' - zy')[jk] + (zx' - xz')[ki]$$

výrazu:

$$|[ab] = (xy' - yx')k + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j.$$

A podobně buď v soustavě (A, B, C, D) předpokládaje, že $[ABCD] = 1$:

$$|A = [BCD], \; |B = -[CDA], \; |C = [DAB], \; |D = -[ABC]$$

aneb

$$A = -|[BCD], \quad B = |[CDA], \quad C = -|[DAB], \quad D = |[ABC],$$

dále

$$|[AB] = [CD], \; |[AC] = [DB], \; |[AD] = [BC] \text{ atd.};$$

z čehož lze snadno ustanoviti výrazy pro doplňky jiných bodů, rotorů a rovin.

Obecně jmenuje Grassmann doplňkem jednotky libovolného stupně I veličinu I', kterou jest danou jednotku I externě násobiti, aby součin [II'] se rovnal absolutní jednotce. Poněvadž předpokládáme, že extern. součin jednotek stupně prvního $i_1, i_2, \ldots i_n$ se rovná absolutní jednotce, rovná se doplněk I' externímu součinu všech těch jednotek, které nejsou v součinu I obsaženy s takovým znaménkem, aby $[II'] = +1$. Doplněk geom. veličiny jakéhokoli stupně, kterou lze dle předešlého vždy psáti ve tvaru

$$\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \ldots + \alpha_n I_n$$

jest pak

$$\alpha_1 |I_1 + \alpha_2 |I_2 + \ldots + \alpha_n |I_n.$$

Interním součinem dvou vektorů nazývá Grassmann externí součin násobence a doplňku násobitelova. Tudíž interní součin vektorů a a b, který označíme $[a | b]$, dán jest rovnoběžnostěnem, jehož jedna stěna jest kolmá ku b a má tolik čtverečných jednotek, kolik má b jednotek délkových a jehož třetí hranou jest vektor a. Výškou tohoto rovnoběžnostěnu kolmou ku $|b$ jest úsečka, jejíž délka rovná se délce pravoúhelného průmětu vektora a na běh vektora b. Znaménko součinu se řídí znaménkem rovnoběžnostěnu; jsou-li oba dané vektory a a b na jedné straně roviny, ve společném počátečním bodě obou vektorů ku b kolmo vedené, jest součin $[a | b]$ kladný; jsou-li na opáčných stranách této roviny, jest součin ten záporný.

Z této definice plyne:

1. Interní součin dvou vektorů rovná se nulle, stojí-li oba vektory na sobě kolmo. Neboť pak jest násobenec rovnoběžný k rovině, v níž se nalézá doplněk násobitelův.

A naopak: Rovná-li se interní součin dvou vektorů nulle, stojí oba vektory na sobě kolmo.

2. Interní násobení dvou vektorů jest kommutativní, tedy

$$[a \mid b] = [b \mid a].$$

Abychom tuto větu dokázali, sestrojme si rovnoběžnostěn $\mathbf{R}_1$, jenž přísluší intern. součinu $[a \mid b]$; základnou jeho jest rovnoběžník doplňku $\mid b$ a výškou průmět vektora a na běh vektora b. Tento pravoúhlý rovnoběžnostěn rovná se, jak již praveno, rovnoběžnostěnu šikmému $\mathbf{R}_2$ o téže základně, mající třetí hranu rovnou vektoru a. Protneme-li $\mathbf{R}_2$ rovinou kolmou k a, obdržíme obdélník, který jest průmětem rovnoběžníka $\mid b$ na rovinu sečnou. Poněvadž obsah rovnoběžníka $\mid b$ má b čtver. jednotek a úhel roviny sečné a roviny doplňku $\mid b$ jest dán úhlem α vektorů a a b, jakožto kolmicím k těmto rovinám, jest obsah tohoto řezu $b \cos \alpha$ čtver. jednotek. Učiňme ho základnou třetího rovnoběžnostěnu pravoúhlého $\mathbf{R}_3$, jehož výškou jest vektor a; dle známé věty stereometrické jest $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2$. Rovnoběžnostěn $\mathbf{R}_3$ proměníme konečně takto: základnu ponecháme v rovině kolmé k a, ale obsah její měj a čtver. jednotek (místo $b \cos \alpha$). Má-li obsah nového rovnoběžnostěnu $\mathbf{R}_4$ se rovnati obsahu tělesa $\mathbf{R}_3$, musí býti jeho výška dlouhá $b \cos \alpha$ jednotek (místo a jedn.). Rovnoběžnostěn $\mathbf{R}_4$, který se tedy obsahem rovná $\mathbf{R}_1$, představuje pak součin $[b \mid a]$. Z toho, co bylo výše pověděno o určení znaménka intern. součinu dvou vektorů, vysvítá dále, že oba součiny $[a \mid b]$ a $[b \mid a]$ jsou stejně označeny.

3. Z rovnice:

$$[aed] + [ced] = [(a + c) ed],$$

platné pro extern. násobení, plyne

$$[a \mid b] + [c \mid b] = [(a + c) \mid b],$$

položíme-li $[ed] = \mid b$. Tedy při násobení interním vyhověno jest principu distributivnímu.

Je-li v součinu $[a \mid b]$ vektor $b = a$, obdržíme *interní dvojmoc* vektora a, kterou označíme $a^{\underline{2}}$.

Jsou-li dány v normální skupině (i, j, k) dva vektory:

$$a = xi + yj + zk,$$
$$b = x'i + y'j + z'k,$$

najdeme pro jejich interní součin nejprve výraz:

$$[a \mid b] = [(xi + yj + zk) \mid (x'i + y'j + z'k)]$$
$$= xx'i^{\underline{2}} + yy'j^{\underline{2}} + zz'k^{\underline{2}},$$

uvážíme-li, že

$$[i \mid j] = [j \mid k] = [k \mid i] = 0.$$

Poněvadž předpokládáme, že

$$[ijk] = [jki] = [kij] = 1,$$

jest též $i^{\underline{2}} = j^{\underline{2}} = k^{\underline{2}} = 1$, jak vychází z této podmínečné rovnice, klademe-li v ní za součiny $[jk]$, $[ki]$, $[ij]$ příslušné doplňky vektorů i, j, k.

Tedy obdržíme pro interní součin dvou vektorů vzorec:

$$[a \mid b] = xx' + yy' + zz', \qquad (25)$$

a pro interní dvojmoc vektora:

$$a^{\underline{2}} = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (26)$$

Z (25) plyne, že jest rovnice:

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

podmínkou, aby dva vektory stály na sobě kolmo.

Positivní druhou odmocninu z interní dvojmoci nějaké geom. veličiny zove Grassmann její *numerickou hodnotou.* Chceme ji označiti tím, že dotýčnou geom. veličinu uzavřeme ve dvě svislé čárky. Jest tedy dle (26)

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

zároveň vidíme, že lze za $a^{\underline{2}}$ položiti též $|a|^2$.

Abychom ustanovili numerickou hodnotu extern. součinu dvou vektorů a a b, musíme nejprv nalézti výraz pro interní dvojmoc $[ab]^{\underline{2}}$; ta jest zvláštním případem součinu $[ab \mid cd]$, pro který vyvodíme nyní vzorec, jehož se v počtu geometrickém častěji užívá. Jsou-li dány vektory:

$$
\begin{aligned}
a &= x_1 i + y_1 j + z_1 k, \\
b &= x_2 i + y_2 j + z_2 k, \\
c &= x_3 i + y_3 j + z_3 k, \\
d &= x_4 i + y_4 j + z_4 k,
\end{aligned}
$$

jest především

$$
\begin{aligned}
[ab] &= (x_1 y_2 - y_1 x_2)[ij] + (y_1 z_2 - z_1 y_2)[jk] + (z_1 x_2 - x_1 z_2)[ki], \\
[cd] &= (x_3 y_4 - y_3 x_4)[ij] + (y_3 z_4 - z_3 y_4)[jk] + (z_3 x_4 - x_3 z_4)[ki].
\end{aligned}
$$

Abychom utvořili součin $[ab \mid cd]$, uvažme, že

$$[ij \mid jk] = [ij \mid ki] = [jk \mid ki] = 0,$$

neboť stojí rovnoběžníky v těchto intern. součinech se vyskytující (a tedy i jejich doplňky) na sobě kolmo; dále jest

$$[ij]^2 = [jk]^2 = [ki]^2 = 1,$$

jak plyne z podmínečných rovnic $[ijk] = [jki] = [kij] = 1$, vložíme-li tu $k = \mid [ij]$, $i = \mid [jk]$, $j = \mid [ki]$.

Pročež jest

$$
\begin{aligned}
[ab \mid cd] &= (x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_3 y_4 - y_3 x_4) \\
&+ (y_1 z_2 - z_1 y_2)(y_3 z_4 - z_3 y_4) + (z_1 x_2 - x_1 z_2)(z_3 x_4 - x_3 z_4),
\end{aligned}
$$

kde lze pravou stranu dle známého vzorce přetvořiti takto:

$$
\begin{aligned}
[ab \mid cd] &= (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3)(x_2 x_4 + y_2 y_4 + z_2 z_4) \\
&- (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)(x_1 x_4 + y_1 y_4 + z_1 z_4)
\end{aligned}
$$

čili

$$[ab \mid cd] = [a \mid c][b \mid d] - [b \mid c][a \mid d]. \qquad (27)$$

Položíme-li v této rovnici $b = 1$, obdržíme vzorec:

$$[a \mid cd] = [a \mid c] \,.\, \mid d - \mid c \,.\, [a \mid d]. \qquad (27a)$$

Dosadíce ještě v předposledním vzorci pro $[ab|cd]$ $c = a$, $d = b$, nabudeme konečně

$$[ab]^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2$$

čili

$$[ab]^2 = a^2 b^2 - [a \mid b]^2; \qquad (28)$$

dělíme-li obě strany algebraickým součinem $a^2 b^2$, povstane rovnice:

$$\frac{[ab]^2}{a^2b^2} + \frac{[a \mid b]^2}{a^2b^2} = 1. \tag{a}$$

Definujme s Grassmannem úhel dvou geom. veličin téhož stupně A, B jako úhel, jehož cosinus se rovná poměru (v tom smyslu jak jej arithmetika užívá) jejich interního součinu k algebraickému součinu dvojmocí jejich numerických hodnot; položme tedy

$$\cos AB = \frac{[A \mid B]}{|A| \cdot |B|},$$

při čemž ještě předpokládáme, že úhel AB, znázorníme-li ho úhlem dvou polopaprsků, jest obsažen v mezích 0 a π. Pak jest úhel α dvou vektorů a a b dán rovnicí

$$\cos \alpha = \frac{[a \mid b]}{|a| \cdot |b|};$$

z toho plyne

$$\cos^2 \alpha = \frac{[a \mid b]^2}{|a|^2 \cdot |b|^2} = \frac{[a \mid b]^2}{a^2b^2},$$

a na základě rovnice (a) podobně

$$\sin^2 \alpha = \frac{[ab]^2}{a^2b^2} = \frac{[ab]^2}{|a|^2 |b|^2}.$$

Z výsledků, k nimž jsme takto dospěli, jest zřejmo, že

$$[a \mid b]^2 = |a|^2 . |b|^2 \cos^2 \alpha$$

a

$$[ab]^2 = |a|^2 . |b|^2 \sin^2 \alpha;$$

tudíž obdržíme pro numerickou hodnotu intern. součinu dvou vektorů výraz $|a| . |b| . \cos \alpha$ a pro numerickou hodnotu jejich extern. součinu výraz $|a| . |b| . \sin \alpha$.*) (Dokončení).

Věstník literární.

Annuaire pour l'an 1896, *publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars et fils.*

Letošní ročník tohoto sborníku honosí se týmiž přednostmi, které jsme již v dřívějších letech rádi vytknuli: neobyčejným bohatsvím obsahu, přesností údajů ze všech oborů nauk přírodních a spolehlivostí dat statistických. Z připojených letos

*) **Jest tedy intern. součin dvou vektorů a a b totéž, co v theorii quaternionů znamená $-Sab$ a extern. součin totéž, co tensor Vab.**