Pokusy sem spadající nebylo lze pro nedostatek času a špatné počasí ukončiti.

K větě Pythagorově.*)

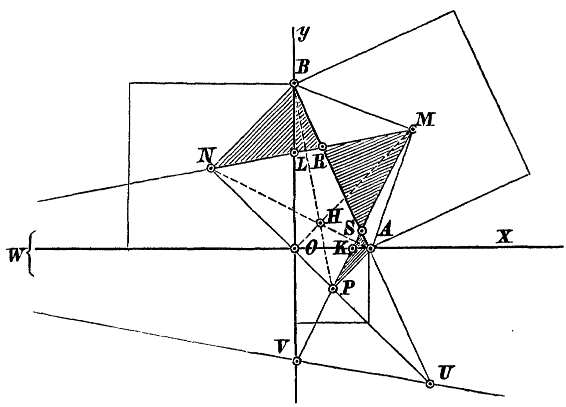
Napsal

Dr. K. Zahradník,
professor na universitě v Záhřebu.

Budiž dán pravoúhlý trojúhelník OAB s odvěsnami OA $= a$, OB $= b$. Bod M budiž střed čtverce nad stranou AB, podobně N, P pro čtverce nad BO, OA. Za osu úseček volme OA, druhou odvěsnu za osu pořadnic, bod O za počátek pravoúhelné soustavy souřadnic. Souřadnice středů M, N, P jsou

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \; N\left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right), \; P\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right).$$

Trojúhelník MNP nachází se vzhledem k trojúhelníku OAB ve vzláštním vztahu, jejž chceme tuto vyšetřiti.



1. Trojúhelník MNP a trojúhelník OAB mají společné těžiště (důkaz buď přímo nebo z 5.).

---

¹) Vyšlo ve „Nastavni vjesnik" pg 189 knihy III., ročník 1894.

2. Plocha trojúhelníka MNP rovna je $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, tudíž je větší o $\frac{a^2+b^2}{4}$ než plocha trojúhelníka OAB čili je větší o plochu trojúhelníku AMB.

3. Je-li R průsek přímky MN s přímkou AB, tudíž

$$R \equiv \overline{MN} . \overline{AB}, \text{ podobně } S \equiv \overline{PM} . \overline{AB},$$

vychází z poučky Pythagorovy:

$$\triangle AMB = \triangle BNO + \triangle OPA,$$

z relace 2. pak

$$\triangle MNP = \triangle OAB + AMP,$$

tudíž je

$$\triangle MNP = ABNP.$$

Odečteme-li po obou stranách plochu NPSR, najdeme (viz obraz)

$$\triangle MRS = \triangle ANR + \triangle ASP.$$

4. Přímky OM, AN, BP jsou výšky trojúhelníka MNP. Společný jejich průsek je H $\left(\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}, \frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}\right)$.

5. Trojúhelník OAB je perspektivný s trojúhelníkem MNP. To vychází již ze 4. Píšeme-li

$$U \equiv \overline{AB} . \overline{NP}, \; V \equiv \overline{Bo} . \overline{PM}, \; W \equiv \overline{oA} . \overline{MN},$$

leží body U, V, W na téže přímce, na ose, již označíme Π a která má rovnici

$$a^2x + b^2y - ab\,(a+b) = 0.$$

6. Píšeme-li $L \equiv \overline{OB} . \overline{MN}$, $K \equiv \overline{OA} . \overline{MP}$, můžeme říci: **kuželosečka, jež jde body OKSRL, dotýká se přímky MP v bodu O. Mámeť tu šestiúhelník Pascalův RLOOKS, kdež je $\overline{OO} \equiv \overline{NP}$. Pro tento šestiúhelník je osa Π Pascalovou přímkou.**

V následujícím budiž podán ještě toho důkaz analytický. Jest totiž

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MN} &\equiv -(a+2b)y + ax + b(a+b) = 0 \\
\mathrm{MP} &\equiv by - (2a+b)x + a(a+b) = 0 \\
\mathrm{AP} &\equiv ay + bx - ab = 0 \\
\mathrm{KL} &\equiv a(a+2b)y + b(2a+b)x - ab(a+b) = 0.
\end{aligned}
$$

Rovnice kuželosečky jdoucí body K, S, R, L jest

$$\mathrm{MN} \,.\, \mathrm{MP} - \lambda \,.\, \mathrm{AB} \,.\, \mathrm{KL} = 0,$$

a jde-li tato kuželosečka i bodem O, je

$$\lambda = \frac{a+b}{ab},$$

tudíž jest rovnice kuželosečky jdoucí body OKSRL, zkrátíme-li činitelem společným $(a^2 + ab + b^2)$:

$$(2a+b)bx^2 - abxy + (a+2b)ay^2 + ab(a+b)(x+y) = 0.$$

Ze tvaru této rovnice vychází již, že je přímka NP tečnou kuželosečky v bodu O.

7. Poloha osy Π určena jest již polohou přepony AB Mění-li přepona svoji polohu dle zákona $\varphi(a, b) = 0$, obdržíme rovnici obálky osy Π, vyloučíme-li z rovnic

$$\Pi = 0, \quad \varphi(a, b) = 0, \quad \frac{d(\Pi, \varepsilon)}{d(a, b)} = 0$$

veličiny a, b. Zajímavý je zvláště případ, kde je

$$\varphi(a, b) = a + b - k = 0,$$

při konstantním k.

8. Je-li a konstantním, b proměnným, otáčí se přepona okolo vrcholu A; obdržíme tu celou řadu trojúhelníků OAB a jim příslušnou celou řadu kuželoseček, jichž středy vyplňují určitou kuželosečku. Podobně přísluší té řadě trojúhelníků celá řada os Π, jež vesměs obalují kuželosečku, a to hyperbolu

$$x(y-a) = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

9. Při daném a probíhají libovolným bodem (ξ, η) roviny

dvě kuželosečky článku 6. Příslušnou jim hodnotu za b určíme z rovnice

$$b^2[\xi^2+a(\xi+\eta)]+a[2\xi^2-\xi\eta+2\xi\eta^2+a(\xi+\eta)]b+a^2\eta^2=0.$$

Leží-li bod (ξ, η) na ellipse

$$2\xi^2-\xi\eta+2\eta^2+a(\xi+\eta)=0,$$

obdržíme dva trojúhelníky, jež leží symetricky vzhledem k ose X; trojúhelníky ty jsou realné, je-li

$$\xi^2+a(\xi+\eta)<0,$$

t. j. leží-li bod (ξ, η) uvnitř paraboly

$$\xi^2+a(\xi+\eta)=0.$$

Pro průseky té paraboly s ellipsou je $b=\pm\infty$.

Obě kuželosečky probíhající bodem (ξ, η) při daném a splývají v jednu, odpovídá jim tudíž jediná hodnota za b, leží-li bod (ξ, η) na křivce

$$[2\xi^2-\xi\eta+2\eta^2+a(\xi+\eta)]^2-\eta^2[\xi^2+a(\xi+\mu)]=0,$$

jež má bod úvratu v bodě O, a přímku NP za tečnu úvratu.

Zcela obdobné výsledky bychom obdrželi při konstantním b i proměnném a.

10. Výsledky, ku kterým jsme právě přišli, lze zobecniti, sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka pravidelné n-úhelníky. Označíme-li i zde M, N, P středy n-úhelníků nad stranami $\overline{AB}$, $\overline{BO}$, $\overline{OA}$, platí:

$$M\left(\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{n}+\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}+\frac{b}{2}\right)$$

$$N\left(-\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{n}, \frac{b}{2}\right), P\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\right).$$

Můžeme i zde říci:

1. Trojúhelníky MNP a OAB mají společné těžiště.

2. Spojnice $\overline{OM}$, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ protínají se v jednom bodě. Jsouť rovnice těch přímek:

$$\mathrm{OM} \equiv \left(b \cot \frac{\pi}{n} + a\right) y - \left(a \cot \frac{\pi}{n} + b\right) x = 0$$

$$\mathrm{AN} \equiv \left(2a + b \cot \frac{\pi}{n}\right) y + bx - ab = 0$$

$$\mathrm{BP} \equiv ay + \left(a \cot \frac{\pi}{n} + 2\,b\right) x - ab = 0$$

a tím platí:

$$\begin{vmatrix} b \cot \frac{\pi}{n} + a, & -a \cot \frac{\pi}{n} - b & 0 \\ 2\,a + b \cot \frac{\pi}{n} & b & -ab \\ a & a \cot \frac{\pi}{n} + 2\,b & -ab \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3. Trojúhelníky OAB, MNP jsou perspektivické, homologické strany protínají se v bodech téže přímky Π.

4. Kuželosečka jdoucí body RLOKS dotýká se přímky NP v bodě O; tím je RLOOKS Pascalův šestiúhelník a přímka Π jeho Pascalova přímka.

Základové geometrického počtu Grassmannova.

Podává **A. Libický**, professor v Roudnici.

(Pokračování.)

Jako příklad ku sečítání vektorů a bodů buď zde uveden známý způsob, kterým se vyjadřuje libovolný vektor součtem tří vektorů, odvozených z daných jednotek aneb libovolný bod součtem čtyř bodů mnohonásobných. Jsou-li i, j, k tři jednotky vektorů, o nichž předpokládáme, že nejsou rovnoběžny k jedné rovině (nejsou komplanarní), lze každý jiný vektor a pokládati za součet tří vektorů xi, yj, zk, kde značí teď odchylně od výše zavedeného označování x, y, z čísla, jimiž se odvozují sčítanci xi, yj, zk z jednotek i, j, k. O geometrickém významu těchto sčítanců netřeba se šířiti. Můžeme tudíž psáti: