František Josef Studnička
Hříčky multiplikační vůbec a příslušná poučka Lucasova zvlášť

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 4, 289--293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123430

Hříčky multiplikační vůbec a příslušná poučka Lucasova zvlášť.

Jakož z dějin arithmetiky známo, poskytovaly se žákům pro občerstvení ducha zábavné příklady, kdež buď provedení svou ostrovtipností nebo výsledek svou libotvárností více méně překvapoval. Abychom ze starších případů aspoň jeden uvedli, připomínáme zde, co *Ali ben Mohammed Ibn Mohammed ben Ali le Koraïchite Alandalouci Albasthî,* krátce *Alkalasadi* zvaný, uvádí ve svém kommentáři arithmetického spisu „*Talkhys*" jmenovaného a od marokánského mathematika jménem *Ibn Albanna* v prvé polovici XIII. stol. sepsaného.

Tam již vytčeno

$$\begin{aligned}
1\times 1 &= 1\\
11\times 11 &= 121\\
111\times 111 &= 12321\\
1111\times 1111 &= 1234321\\
11111\times 11111 &= 123454321
\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}
11\times 111 &= 1\;2\;2\;1\\
111\times 11111 &= 12\;3\;3\;3\;21\\
1111\times 1111111 &= 123\;4\;4\;4\;4\;321\\
11111\times 111111111 &= 1234\;5\;5\;5\;5\;5\;4321
\end{aligned}$$

K tomu druží se zajímavé výsledky, násobením devítkou vznikající, jako na př.

$$
\begin{array}{ll}
9 \times 0 & + 1 = 1 \\
9 \times 1 & + 2 = 11 \\
9 \times 12 & + 3 = 111 \\
9 \times 123 & + 4 = 1111 \\
9 \times 1234 & + 5 = 11111 \\
9 \times 12345 & + 6 = 111111 \\
9 \times 123456 & + 7 = 1111111 \\
9 \times 1234567 & + 8 = 11111111 \\
9 \times 12345678 & + 9 = 111111111 \\
9 \times 123456789 & + 10 = 1111111111
\end{array}
$$

anebo podobný případ

$$
\begin{array}{ll}
9 \times 9 & + 7 = 88 \\
9 \times 98 & + 6 = 888 \\
9 \times 987 & + 5 = 8888 \\
9 \times 9876 & + 4 = 88888 \\
9 \times 98765 & + 3 = 888888 \\
9 \times 987654 & + 2 = 8888888 \\
9 \times 9876543 & + 1 = 88888888 \\
9 \times 98765432 & + 0 = 888888888
\end{array}
$$

K tomu pak připojuje *E. Lucas* ve své nedávno uveřejněné „L'arithmétique amusante“, pag. 68:

$$
\begin{array}{ll}
8 \times 1 & + 1 = 9 \\
8 \times 12 & + 2 = 98 \\
8 \times 123 & + 3 = 987 \\
8 \times 1234 & + 4 = 9876 \\
8 \times 12345 & + 5 = 98765 \\
8 \times 123456 & + 6 = 987654 \\
8 \times 1234567 & + 7 = 9876543 \\
8 \times 12345678 & + 8 = 98765432 \\
8 \times 123456789 & + 9 = 987654321
\end{array}
$$

Mnohem zajímavější jsou pak podobné vlastnosti, nezávisí-li na určité soustavě číselné, náleží-li tedy do *nauky o číslech* v nejužším toho slova smyslu. A k těm patří vlastnost posledně tuto vytčená, již *E. Lucas* též vyložil ve svém spise „Théorie des nombres“ pro soustavu *dekadickou*, a již možná krátce vyjádřiti takto:

Obsahuje-li n číslicová soustava n číslic

$$\check{c}_0, \check{c}_1, \check{c}_2, \ldots, \check{c}_{n-2}, \check{c}_{n-1},$$

takže, užijeme-li našich číslic, tu platí

$$\check{c}_0 = 0, \check{c}_1 = 1, \check{c}_2 = 2, \ldots$$

vyjde při násobení všeobecně

$$(n-2) \times \check{c}_1\, \check{c}_2\, \check{c}_3 \ldots \check{c}_k + \check{c}_k = \check{c}_{n-1}\, \check{c}_{n-2} \ldots \check{c}_{k+1}\, \check{c}_k,$$

kteroužto relaci zveme poučkou E. Lucasovou.

Jak patrno, jest dřívější případ jí vyložen v soustavě dekadické, tedy pro $n = 10$.

Pro soustavu *dyadickou* pak z ní plyne

$$0 \times \mathbf{1} + 1 = \mathbf{1};$$

pro soustavu *triadickou* podobně

$$\begin{array}{l} 1 \times \mathbf{1} \;\;\; + 1 = 2, \\ 1 \times 1\,\mathbf{2} + 2 = 2\,1; \end{array}$$

pro soustavu *tetradickou*

$$\begin{array}{l} 2 \times \mathbf{1} \qquad + 1 = \mathbf{3} \\ 2 \times 1\,\mathbf{2} \quad\; + 2 = 3\,\mathbf{2} \\ 2 \times 1\,2\,\mathbf{3} + 3 = 3\,2\,1; \end{array}$$

pro soustavu *pentadickou*

$$\begin{array}{l} 3 \times \mathbf{1} \qquad\quad + 1 = \mathbf{4} \\ 3 \times 1\,\mathbf{2} \qquad + 2 = 4\,\mathbf{3} \\ 3 \times 1\,2\,\mathbf{3} \quad\; + 3 = 4\,3\,\mathbf{2} \\ 3 \times 1\,2\,3\,\mathbf{4} + 4 = 4\,3\,2\,\mathbf{1}; \end{array}$$

pro soustavu *hexadickou*

$$\begin{array}{l} 4 \times \mathbf{1} \qquad\qquad + 1 = \mathbf{5} \\ 4 \times 1\,\mathbf{2} \qquad\quad + 2 = 5\,\mathbf{4} \\ 4 \times 1\,2\,\mathbf{3} \qquad + 3 = 5\,4\,\mathbf{3} \\ 4 \times 1\,2\,3\,\mathbf{4} \quad\; + 4 = 5\,4\,3\,\mathbf{2} \\ 4 \times 1\,2\,3\,4\,\mathbf{5} + 5 = 5\,4\,3\,2\,\mathbf{1}, \text{ atd.} \end{array}$$

Pro soustavu *čtrnáctičíselnou*, obsahující číslice

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Ɩ, ↊, ↋, ᔭ

by tedy obdobně platilo

↊ × 1 2 3 4 5 + 5 = ᔭ ↋ ↊ Ɩ 9
↊ × 1 2 3 4 5 6 7 + 7 = ᔭ ↋ ↊ Ɩ 9 8 7 atd.

Dodatek.

Při této příležitosti budiž mi dovoleno poukázati ku podobné vlastnosti čísel v soustavě $2n$-číslicové, již možná vyjádřiti takto:

Značí-li $2n$ číslic symboly obecné

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-1},$$

takže možná identifikovati v dekadické soustavě

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad \dots, \quad c_9 = 9,$$

a odečteme-li od čísla všechny číslice, vyjmouc c_0, obsahujícího v témže pořádku, jak po sobě *dolů* jdou, tedy od čísla

$$c_{2n-1}c_{2n-2}c_{2n-3} \dots c_2 c_1$$

číslo, obsahující všechny číslice v pořádku *opačném* po sobě jdoucí, tedy číslo

$$c_1c_2c_3 \dots c_{2n-2}c_{2n-1},$$

vyjde co rozdíl číslo, vyjádřené opět všemi číslicemi, avšak v jiném pořádku, totiž

$$c_{2n-2}c_{2n-4} \dots c_4c_1c_{2n-1}c_{2n-3} \dots, c_3c_2,$$

Podlé toho platí v soustavě *čtyřčíslicové**)

$$\begin{array}{r} 3\,2\,1 \\ 1\,2\,3 \\ \hline 1\,3\,2, \end{array}$$

v soustavě *šestičíslicové*

*) O soustavě *dvojčíslicové* čili *binární* nemůže tu býti řeči, poněvadž obsahuje pouze jednu plnou číslici, totiž 1, již arci nelze přemístěním uděliti hodnoty jiné.

$$\begin{array}{r} 54321 \\ 12345 \\ \hline 41532, \end{array}$$

v soustavě *osmičíslicové*

$$\begin{array}{r} 7654321 \\ 1234567 \\ \hline 6417532, \end{array}$$

v soustavě *desetičíslicové*, u níž tento zjev byl již dávno známý, přímo

$$\begin{array}{r} 987654321 \\ 123456789 \\ \hline 864197532, \end{array}$$

v soustavě *dvanáctičíslicové*, zavedeme-li potřebné symboly ciferní a to pro desítku ! a pro jedenáctku ?,

$$\begin{array}{r} ?\,!\,987654321 \\ 123456789\,!\,? \\ \hline !\,8641?97532 \end{array}$$

a podobně dále.

Jak možná tuto vlastnost odůvodniti, pozná každý velmi snadno, vyjádří-li příslušná čísla algebraicky a provede-li pak vytčené zde subtrakce.

Poznámka. Poněvadž podlé našich učebných osnov má se *v páté* třídě škol středních vykládati též zařízení jiných soustav číselných nežli jest obecně užívaná dekadická, poskytují relace tuto vytčené a jim podobné dosti vhodný a vábný materiál ke cvičení školnímu, takže by zasluhovaly, aby se jako příklady pojaly i do příslušných učebnic; obecný důkaz nechť si pak sestaví autor sám. *Dr. F. J. Std.*