Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Milíč Sypták

O logaritmických spirálách v p-rozměrném euklidovském prostoru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 1, 34--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123415

O logaritmických spirálách v p-rozměrném euklidovském prostoru[1]).

M. Sypták, Nové Město na Moravě.

(Došlo dne 25. dubna 1940.)

Pod logaritmickou spirálou rozumíme křivku ležící v p-rozměrném euklidovském prostoru R_p ($p \geqq 2$), jejíž křivosti jsou nepřímo úměrné délce oblouku, t. j.

$$a_1 = \frac{k_1}{s},\ a_2 = \frac{k_2}{s},\ \ldots,\ a_{p-1} = \frac{k_{p-1}}{s}.^{2)} \tag{1}$$

Při vhodné volbě systému souřadného můžeme parametrické vyjádření každé log. spirály v R_p uvésti na tvar

a) pro $p = 2n : x_{2i-1} = r_i s \cos(l_i \log s),\ x_{2i} = r_i s \sin(l_i \log s)$
$(i = 1, 2, \ldots, n)$, (2)

b) pro $p = 2n + 1$ přistoupí $x_{2n+1} = Cs$;

při tom r_i, l_i, C jsou konstanty $\neq 0$, $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$ a s je oblouk log. spirály. Souřadné roviny (X_{2i-1}, X_{2i}) jsou rovinami axiálními, počátek souřadnic bodem asymptotickým a, v případě $p = 2n + 1$, osa X_{2n+1} osou log. spirály.[3])

Logaritmické spirály mají následující vlastnosti:

a) Aby křivka C v R_p byla log. spirálou, jest nutné a stačí,

---

[1]) Tento článek obsahuje výsledky, které jsem obdržel při studiu vlastností log. spirál v R_p. Podrobnější článek, obsahující důkazy, bude uveřejněn později.

[2]) Log. spirály tvoří zvláštní případ obecných nadkružnic a nadšroubovic, t. j. křivek ležících v R_{2n} a R_{2n+1}, jejichž křivosti jsou takové, že poměry $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots$ jsou konstantní. Viz M. Sypták: Sur les hypercirconférences et hyperhélices généralisées dans les espaces euclidiens à p dimensions, Comptes rendus, t. 198, 1934. Tedy všechny vlastnosti těchto křivek, o nichž pojednává citovaný článek, jsou také vlastnostmi log. spirál.

[3]) Rovinami axiálními je určen bod asymptotický (jako jejich společný bod) a také osa log. spirály (jako přímka jdoucí bodem asymptotickým kolmo na všechny axiální roviny).

aby existoval pevný bod O té vlastnosti, že každá přímka spojující O s libovolným bodem P na C svírá konstantní úhly ($\neq 90°$)[4]) s tečnou a se všemi normálami bodu P. Bod O je pak bodem asymptotickým.

b) Nutná a postačující podmínka, aby křivka C v R_{2n+1} byla log. spirálou, jest, aby existovala pevná přímka o té vlastnosti, že 1° tečna a všechny normály sudých indexů bodu P svírají s o konstantní úhly (neboli: všechny normály lichých indexů bodu P jsou kolmé k o), 2° tečna a všechny normály bodu P svírají konstantní úhly s přímkou p jdoucí bodem P a protínající o kolmo, 3° úhel sevřený tečnou a přímkou p není 90° (neboli: body křivky C nemají od o konstantní vzdálenosti). Přímka o je pak osou log. spirály C.

c) Délka tečny bodu P se rovná oblouku $\widehat{OP}$ mezi bodem asymptotickým O a bodem P. Délky všech normál bodu P jsou přímo úměrné oblouku $\widehat{OP}$. (Pod délkou tečny, po př. normály bodu P rozumíme úsek na tečně, po př. normále omezený bodem P a průsečíkem Q tečny, po př. normály s nadrovinou jdoucí bodem O kolmo na OP.) Subtangenta a subnormála bodu P je též přímo úměrná oblouku $\widehat{OP}$. (Pod subtangentou, po př. subnormálou rozumíme $\overline{OQ}$). Pohybuje-li se P po log. spirále C, opisuje Q log. spirálu mající s C společné axiální roviny. Leží-li specielně C v R_{2n+1}, opisuje Q, příslušný tečně, log. spirálu, ležící v nadrovině jdoucí bodem asymptotickým kolmo na osu.

d) Spojnice středu O nadkružnice[5]) K s jejími body tvoří kuželovou plochu π, kterou každá nadkoule o středu O protíná v nadkružnici mající s K společné axiální roviny. Isogonální trajektorie povrchových přímek plochy π jsou log. spirály, mající asymptotické body ve středu O a axiální roviny společné s K. Ortogonální trajektorie jsou nadkružnice mající s K společné axiální roviny. Obráceně: Spojíme-li asymptotický bod log. spirály s jejími body, dostaneme plochu π uvedené vlastnosti.

e) Buď K nadkružnice v nadrovině R_{2n} prostoru R_{2n+1} a O její střed. Buď o kolmice v O na R_{2n} a V bod na o. Spojnice V s body nadkružnice K vytvoří kuželovou plochu π, kterou každá

[4]) Předpoklad $\neq 90°$ můžeme v R_{2n+1} vynechati, jde-li o dostačující podmínku.

[5]) Nadkružnice je křivka v R_{2n}, jejíž všechny křivosti jsou konstantní. Viz O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions (Spisy přírodovědecké fakulty Masarykovy university, Brno, sv. 146, 1931). Od téhož autora pojednání stejně nazvané v Comptes rendus, sv. 193, 1931. Viz též M. Sypták: Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions, Comptes rendus, sv. 195, 1932.

nadrovina kolmá k o protne v nadkružnici mající střed v průsečíku nadroviny s o a jejíž axiální roviny jsou rovnoběžné s axiál. rovinami nadkružnice K. Isogonální trajektorie povrchových přímek plochy π jsou log. spirály mající asymptotické body v bodě V, osy v přímce o a mající axiální roviny rovnoběžné s axiál. rovinami nadkružnice K. Ortogonální trajektorie jsou nadkružnice, mající axiální roviny rovnoběžné s axiál. rovinami nadkružnice K. Obráceně: Spojíme-li asymptotický bod log. spirály v R_{2n+1} s jejími body, dostaneme kuželovou plochu π uvedené vlastnosti.

f) Buď C log. spirála v nadrovině R_{2n} prostoru R_{2n+1} a O její asymptotický bod. Přímky, vedené body spirály C kolmo na R_{2n}, vytvoří válcovou plochu té vlastnosti, že isogonální a ortogonální trajektorie jejích povrchových přímek jsou log. spirály, mající axiální roviny rovnoběžné s axiál. rovinami spirály C a mající asymptotické body na přímce o, vedené v O kolmo na R_{2n}. Isogonální trajektorie mají o za svou osu.

g) Ortogonální průmět log. spirály C v R_{2n+1} na nadrovinu R_{2n}, kolmou k její ose o, je log. spirála C', mající axiál. roviny rovnoběžné s axiál. rovinami spirály C a mající asymptotický bod v průsečíku o s R_{2n}. Tečný prostor bodu P na C (určený tečnou a normálami sudého indexu bodu P) se promítá do tečného prostoru bodu P' na C' a normální prostor bodu P na C (určený normálami lichého indexu bodu P) se promítá do normálního prostoru bodu P' na C' a to tak, že normály stejného lichého indexu bodů P, P' jsou rovnoběžné. (Při tom P' značí ortog. projekci bodu P). Tečna v P svírá s tečnou v P' konstantní úhel a je kolmá ke každé normále bodu P'. Každá normála sudého indexu v P svírá s každou normálou sudého indexu v P' konstantní úhel (a na každou normálu lichého indexu je kolmá). Mezi křivostmi platí vztahy:

$$\alpha_1 = k^2 a_1, \ \alpha_{2\nu} \cdot \alpha_{2\nu+1} = k^2 a_{2\nu} \cdot a_{2\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$k = \dfrac{ds}{d\sigma}$ je konstantní (α_i jsou křivosti log. spirály C' a σ její oblouk).

h) Nutná a postačující podmínka, aby obecná nadkružnice nebo obecná nadšroubovice C byla log. spirálou, jest, aby se C ortogonálně promítala aspoň do jedné ze svých axiálních rovin jako log. spirála, nebo aby jí bylo možno přiřaditi bod O té vlastnosti, že tečna a první normála bodu P na C svírá se spojnicí OP konstantní úhly $\neq 90°$.

i) Vzdálenosti asymptotického bodu O od tečny a libovolné normály bodu P na log. spirále jsou přímo úměrné oblouku $\widehat{OP}$. Obráceně: Lze-li křivce C přiřaditi takový bod O, že jeho vzdálenosti od tečny a každé normály libovolného bodu na C jsou přímo úměrné oblouku křivky C, pak C je log. spirála a O její asymptotický bod.

j) Body P log. spirály v R_{2n}, po př. v R_{2n+1} mají 1°. od asymptotického bodu O, 2°. od n axiálních rovin, 3°. od n axiálních prostorů (t. j. $(2n-2)$, po př. $(2n-1)$-rozměrných prostorů vedených v O totálně kolmo na jednotlivé axiální roviny), 4°. od každého prostoru určeného ν axiálními rovinami ($1 < \nu \leqq n-1$, po př. $1 < \nu \leqq n$), 5°. od každého prostoru, v němž se protíná μ ($1 < \mu \leqq n$) axiálních prostorů, vzdálenosti přímo úměrné oblouku $\widehat{OP}$.

Pozn. Zobecněním log. spirál dostáváme pseudospirály, t. j. křivky v R_p, jejichž křivosti jsou tvaru

$$a_1 = k_1 s^{m-1},\ a_2 = k_2 s^{m-1}, \ldots \tag{3}$$

kdež $k_1, k_2, \ldots$ jsou konstanty $\neq 0$, m číslo $\neq 0, \neq 1$, a s oblouk. Rovnice těchto křivek v R_{2n}, po př. v R_{2n+1} můžeme při vhodné volbě souřadného systému psáti ve tvaru

$$x_{2i-1} = r_i \int \sin (l_i s^m)\, ds,\ x_{2i} = r_i \int \cos (l_i s^m)\, ds, \text{ po př. } x_{2n+1} = Cs; \tag{4}$$

při tom $i = 1, 2, \ldots, n$; r_i, l_i, C jsou konstanty $\neq 0$ a $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$.

*

Über die logarithmischen Spiralen in p-dimensionalen euklidischen Räumen.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Unter der logarithmischen Spirale versteht der Autor eine Kurve, deren alle Krümmungen dem Bogen indirekt proportional sind (1). Die Gleichungen jeder logarithmischen Spirale lassen sich in der Gestalt (2) schreiben, wobei r_i, l_i, C Konstanten $\neq 0$ sind und $|l_i| \neq |l_j|$ für $i \neq j$ ist. Aus diesen Gleichungen kann man eine ganze Reihe interessanter Eigenschaften dieser Kurven herleiten. Die Gleichungen der sogenannten Pseudospiralen, deren Krümmungen von der Form (3) sind, lassen sich in der Gestalt (4) darstellen.