Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jar. Simerský

Graf při řešení goniometrických rovnic

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D176--D179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123409

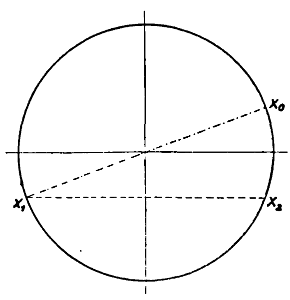
VYUČOVÁNÍ.

Graf při řešení goniometrických rovnic.

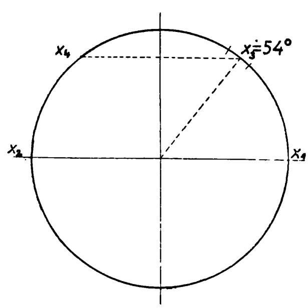
Jar. Simerský, Třeboň.

Goniometrické rovnice jsou nejcennější učebnou látkou pro upevnění představy o vlastnostech goniometrických funkcí.

První fáze jejich řešení, t. j. odvození jedné nebo několika hodnot určité funkce (po eventuelním převedení různých funkcí a argumentů na jedinou funkci s jediným argumentem) neskýtá obyčejně žákům obtíží. Nesnáze se teprve dostaví, když se má v druhé fázi řešení odvoditi, na příklad, které úhly vyhovují požadavku $\sin x = -\frac{1}{3}$. Lze co nejvíce doporučiti, aby žáci vždy před logaritmickým výpočtem načrtli hledané úhly v jednotkové kružnici. Není ani třeba kresliti jejich ramena, stačí vytknouti jim „příslušné" body na této kružnici. Náčrtek (obr. 1)



Obr. 1.



Obr. 2.

ihned ukáže, že se jedná o dva úhly x_1, x_2 v kvadrantu 3. a 4., a že se jejich hodnoty odvodí logaritmickým výpočtem pomocného úhlu x_0, splňujícího vztah $\sin x_0 = \frac{1}{3}$ v kvadrantu prvém. Z obrazce je bezprostředně patrno, že $x_1 = 2R + x_0$, $x_2 = 4R - x_0$. Tomuto zobrazení, jistě hojně užívanému, přikládám takovou váhu, že často ani nežádám logaritmického výpočtu, když ovšem hledání v tabulkách je už žákům běžné. Při provádění zkoušky správnosti také není třeba znáti přesné hodnoty úhlů, hovících dané rovnici, vždyť do rovnice dosazujeme hodnoty funkcí (nalezených úhlů), které vypočteme z resultátu první fáze řešení; k určení však znamének skýtá zobrazení kořenů v jednotkové kružnici neocenitelné služby.

Prováděti zkoušku o správnosti řešení je v zájmu solidnosti práce. A tu se občas žáci octnou před faktem, že některé kořeny, řešením získané, původní rovnici nevyhovují.

Budiž třeba dána rovnice

$$\sin x + 2 \cos x = 2. \tag{1}$$

Při jejím řešení budou žáci pravděpodobně vyjadřovati $\cos x$ pomocí $\sin x$ a dospějí k rovnici $5 \sin^2 x - 4 \sin x = 0$, jejíž řešení jsou: I. $\sin x = 0$, odtud $x_1 = 0$, $x_2 = 2R$, II. $\sin x = \frac{4}{5}$, odtud plynou další dva kořeny (obr. 2). Zkouškou se pak shledá, že dané rovnici vyhovují pouze kořeny x_1, x_3. Zdvojnásobení počtu kořenů bylo způsobeno povýšením rovnice.

Skýtá-li jindy řešení 8 hodnot nebo dokonce 12, jak dále bude o tom řeč, potvrdí každý praktik, že žáci s nevalnou chutí zkoušku správnosti provádějí, spatřujíce v tomto opětovném nezajímavém dosazování zbytečnou pedanterii učitelovu. A tu jest jiný, daleko zajímavější způsob, kterým je možno vždy o počtu kořenů snadno rozhodnouti a který je při přesném provedení vlastně grafické řešení dané goniometrické rovnice.

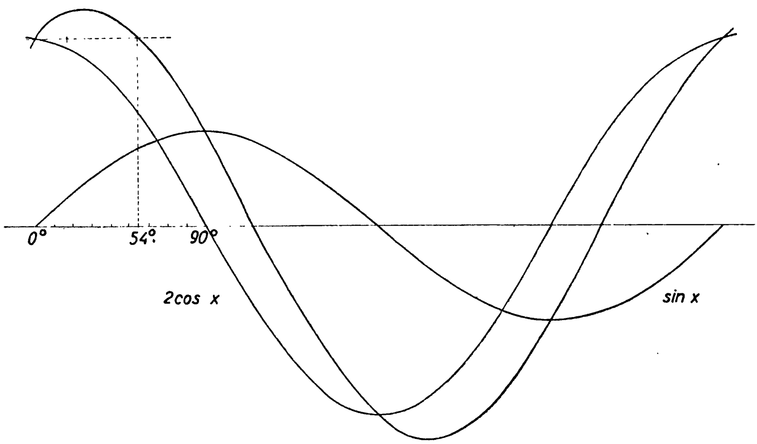
Řešiti rovnici (1) znamená hledati takové úhly, pro něž funkce $f(x) \equiv \sin x + 2 \cos x$ nabývá hodnoty rovné 2. Průběh této funkce — omezujeme se výslovně na interval $0 \leqq x < 4R$ — se zobrazí velmi snadno, opatří-li si žáci kartonovou deštičku, „omezenou“ úsečkou na př. 4 cm dlouhou a obloukem jedné poloperiody grafu funkce sinové. Dvojím přiložením této deštičky zobrazí funkci $\sin x$; připojí graf funkce $\cos x$ a dvojnásobné pořadnice bodů této křivky sečtou algebraicky s pořadnicemi bodů křivky prvé. Tak se získá graf funkce $f(x)$. (Tento postup, mimochodem řečeno, je dobrá průprava pro skládání harmonických kmitů a vln v akustice.) Z grafu obr. 3 je zřejmo, že $f(x)$ může nabýti hodnoty rovné 2 pouze dvakrát (ve zvoleném intervalu), a to pro $x = 0$ a $x \doteq 54°$.

Bylo by možno graficky řešiti rovnici $\sin x + 2 \cos x = 2$ zobrazením dvou funkcí, $f_1 \equiv 2 \cos x$, $f_2 \equiv 2 - \sin x$. Řešení je dáno průsečíky obou křivek.

Co se týče přesnosti grafického řešení, možno říci, že lze docela dobře dosáhnouti přesnosti 1°, rýsuje-li se na papíře milimetrovém a zvolí-li se úsečka, představující interval 0° až 90°, dlouhá 45 mm, takže rozpětí grafu by bylo 18 cm.

Poučný příklad toho, jak graf usnadní provedení zkoušky správnosti, poskytuje rovnice $\sin x - \cos x = \sin 2x - \cos 2x$. Její nejjednodušší početní řešení je:

$$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} - \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sin 2x - \cos 2x,$$



Obr. 3.

odtud umocněním dvěma a převodem na funkci $\cos 2x$ dostane se rovnice

$$4\cos^4 2x - 5\cos^2 2x + 1 = 0,$$

z níž plyne

I. $\cos 2x = \pm 1$, tedy

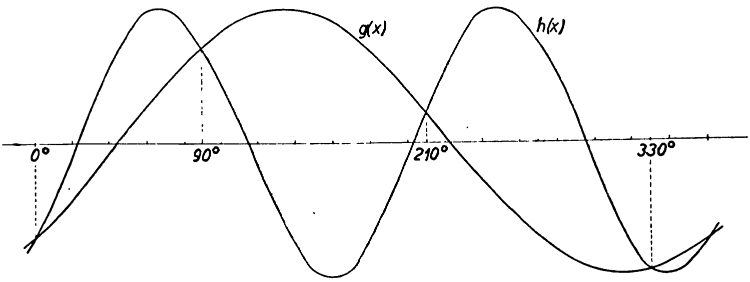
$$2x = 0°, \quad 2R, \quad 4R, \quad 6R,$$
$$x_1 = 0°,\ x_2 = R,\ x_3 = 2R,\ x_4 = 3R;$$

II. $\cos 2x = \pm \frac{1}{2}$, tedy

$$2x = 60°,\ nR \mp 60°\ (n = 2, 4, 6),\ 8R - 60°$$
$$x_5 = 30°,\ x_{6,7} = R \mp 30°,\ x_{8,9} = 2R \mp 30°,$$
$$x_{10,11} = 3R \mp 30°,\ x_{12} = 4R - 30°.$$

Provedení zkoušky pro všech 12 nalezených hodnot bylo by únavné, a což je hlavní věc, pro žáky málo zajímavé. Metoda grafická — a zde by stačil zběžný náčrtek — ukáže ihned, kolik řešení rovnice má. Sestrojí se grafy funkcí $g(x) \equiv \sin x - \cos x$, $h(x) \equiv \sin 2x - \cos 2x$ a jejich 4 průsečíky (obr. 4) ukazují, že ze dvanácti nalezených hodnot pro x jsou kořeny dané rovnice pouze x_1, x_2, x_9, x_{12}.

Při provádění grafu funkce $h(x)$ nebude jistě žákům nesnadno rozhodnouti, že na př. funkce $\sin 2x$ je sinusovka, ve směru osy x o polovinu „zkrácená“ vzhledem k funkci $\sin x$. (Přeneseno do akustiky, jedná se o kmity oktávy vzhledem k primě.)

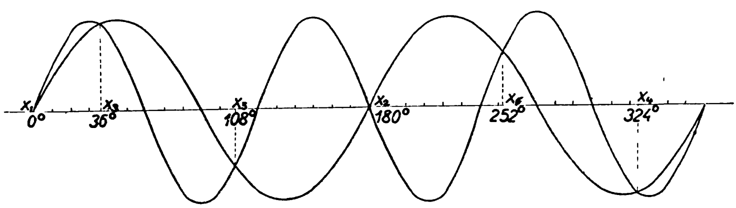


Obr. 4.

Ke grafickému řešení nehodí se dobře ty goniometrické rovnice, jejichž členy jsou mocniny nebo dokonce součiny goniometrických funkcí. Vhodné jsou však rovnice tvaru na př.

$$\sin 3x = \sin 2x.$$

Grafické řešení (obr. 5) ukazuje, že kořeny jsou 0°, 180° a přibližně



Obr. 5.

36°, 108° 252°, 324°, což je v dobré shodě s početním výsledkem, plynoucím z

I. $$\sin x = 0,$$

II. $$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

(V akustice značí obě křivky v obr. 5 souzvuk primy s kvintou. Tyto vztahy k akustice lze ovšem úspěšně uvésti až v nejvyšší třídě stř. školy, když byla akustika probrána. Jsou vhodným námětem při souborném opakování vlastností funkcí.)