Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Pleskot

Základy nomografického zobrazování

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D109--D118

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123391`

Z úzkých filmů přicházejí v tuzemsku zatím v úvahu ponejvíce filmy 9,5 mm závodů Pathé v Paříži; tam je též možno dostati příslušný seznam poučných filmů všech oborů, neboť se jich hojně užívá nejen ve Francii, ale i v Anglii a Italii. Některé filmy z matematiky jsou též obsaženy ve filmovém archivu Pathé v Praze, vydaném závodem „Cinéma", zástupcem firmy Pathé v Praze. K promítání těchto filmů je sice třeba aparátů vyrobených touže firmou, ale je možno dáti je upraviti tak, aby se mohly promítati kterýmkoli jiným strojem pro filmy 9,5 mm.

Geometrických filmů 16 mm se v tuzemsku dosud nedostává; bude k nim patrně obrácen zřetel teprve nyní, po normalisaci příslušného formátu; výrobou matematických filmů v Československu se dosud žádný závod nezabývá, o věci se však již před několika roky jednalo v JČMF.

Několik prstencových filmů z geometrie kinematické bylo zhotoveno amatérsky na zkoušku pro školskou potřebu a má je na skladě „Státní ústav pro učebné pomůcky škol průmyslových a odborných" v Praze, kde je možno též levně zakoupiti. Jsou normální šířky, ale bylo by možno dáti je zmenšiti na filmy úzké.

Bylo by zajisté nejenom k prospěchu školy, ale i věcí národního a státního významu, kdyby se uskutečnila tuzemská výroba školních filmů; další vývoj školního geometrického filmu bude však záviseti, jako v jiných oborech, na pochopení důležitosti filmové vyučovací metody a na další soustavné práci.

Mnoho by se získalo spoluprací amatérů s pedagogy; v zájmu usměrnění práce bylo by však třeba pracovati po dohodě s „Československou Společností pro vědeckou kinematografii v Praze", která je členem Mezinárodního ústavu v Římě a vzala si za úkol organisovati v tuzemsku příslušné práce směřující k řádnému vybudování školní kinematografie v plném slova smyslu.

Základy nomografického zobrazování.

V. Pleskot, Praha.

Dnes, kdy význam nomografie stále stoupá vlivem velkého použití v technické praksi a ve vojenských disciplinách, je třeba, aby alespoň její základy poznali už středoškolští studenti. Největší část našich záložních důstojníků pochází právě z jejich řad. Dělostřelecký důstojník se dnes bez nomogramu neobejde.

Následující řádky mají ukázati, jak lze vyložiti základy nomografie ve střední škole, resp. co by bylo třeba ukázati žákům VII. třídy reálek nebo r. gymnasií, aby se seznámili s příslušnými hlavními pojmy a názvoslovím.

Budu při tom předpokládati, že základy grafického počítání byly žákům vhodně — už před tím — připojeny k výkladům nebo k opakování konstrukce střední měřické úměrné resp. čtvrté měřické úměrné způsobem, který jsem uvedl v článku: Grafické počítání, *Rozhledy* roč. 15, seš. 1—3.

V úvodu řekněme si nejprve několik širších vět o nomogramu.

Nazývejme řešením daného vztahu mezi n proměnnými

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{I}$$

nalezení hodnoty jedné proměnné, která jej s ostatními $(n - 1)$ danými hodnotami proměnných splňuje. Lze pak úkol nomografie spatřovati v tom, že hledá takové grafické zobrazení vztahu (I), aby je bylo možno použíti k jeho řešení.

Provedení úkolu spočívá na myšlence, jednotlivým proměnným tak přiřaditi vhodně uspořádané geometrické elementy, body nebo čáry, kótované hodnotami proměnných, aby jejich grafická souvislost vzhledem k řešení vztahu (na tvaru jeho ovšem závislá) byla co nejjednodušší a odčítání hodnot proměnných bylo co nejpřesnější, nejzřetelnější. Grafická souvislost elementů přiřazených proměnným vzhledem k řešení vztahu je charakterisována tím, že v okamžiku řešení jsou elementy označené $(n - 1)$ danými hodnotami proměnných v takové poloze, že z ní je bezprostředně patrná poloha elementu označeného hledanou hodnotou n-té proměnné. Jako výsledek vytčeného úkolu dostaneme obrazec, kterému říkáme nomogram.

Možnost takového zobrazení je podmíněna tím, aby geometrické elementy přiřazené kterékoliv proměnné tvořily systém jednorozměrný, neboli jednoparametrový, kde příslušná proměnná je parametrem. Hodnota parametru je pak k elementu připsána jako kóta. Rozumí se, že z nekonečného množství elementů přiřazených hodnotám proměnné na př. x_1, zakreslí se pouze určitý počet těchto elementů odpovídající omezené, vhodně volené řadě kót x_1. Polohu ostatních elementů odhadujeme „od oka" interpolací mezi elementy zakreslenými.

Požadavku, aby grafická souvislost elementů byla jednoduchá (pro řešení) a při tom, aby grafické obrazy elementů byly co nejjednodušší, lze zpravidla lépe vyhověti tehdy, použijeme-li při konstrukci nomogramu více rovin. Omezíme se však v dalším — pro jednoduchost výkladu — na použití jedné roviny a ukážeme si několik základních způsobů nomografického zobrazování vztahů mezi třemi proměnnými.

Nomogramy průsečíkové. Začněme příkladem: Mějme zobraziti vztah

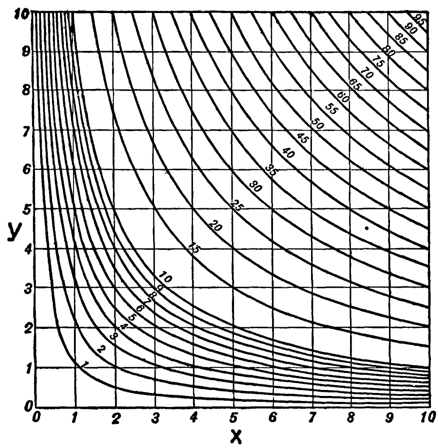
$$z = x \cdot y \tag{1}$$

tak, abychom obrazu mohli použíti k určení proměnné z, jsou-li dány hodnoty x a y. Proměnné x a y nechť se mění v intervalu (0; 10); odpovídající hodnoty z se pak mění v intervalu (0; 100).

1. Položíme-li za z určitou hodnotu (z uvažovaného oboru), označme ji z_0, dostaneme z (1) rovnici rovnoosé hyperboly

$$y = \frac{z_0}{x}. \tag{2}$$

kterou zobrazíme známým způsobem. Klademe-li za z po sobě řadu hodnot z daného intervalu, dostaneme soustavu hyperbol, říkáme jim isoplety, z nichž každá nese číslo, které jsme za z dosadili. Tím jsme vztah (1) nomograficky zobrazili, neboť pro každé x a y dovedeme nalézti z (obr. 1). Dáno-li x_0, y_0, naneseme



Obr. 1.

tyto hodnoty na osy souřadnic a získanými body vedeme rovnoběžky s osami; jejich průsečíkem jde hyperbola označená číslem z_0, t. j. číslem, které s x_0 a y_0 splňuje vztah (1).[1]) K usnadnění čtení veďme body na osách souřadnic označenými na př. celými čísly (kótami), rovnoběžky s osami. Dostaneme tak vlastně isoplety pro proměnnou x (rovnoběžky s osou $x = 0$) a proměnnou y (rovnoběžky s osou $y = 0$).

Proměnné z jsou zde jako geometrické elementy přiřazeny hyperboly, proměnným x a y rovnoběžky s osami souřadnic. Jejich grafická souvislost, vzhledem k řešení (1), kterou nazýváme klíčem nomogramu je ta, že čáry u nichž stojí připsány ty hodnoty

[1]) Neprochází-li průsečíkem právě žádná ze zakreslených hyperbol, interpolujeme, neboli vložíme „od oka“ isopletu, resp. odhadneme hodnotu proměnné, která by byla k ní připsána.

proměnných, které splňují rovnici (1) se protínají v jednom bodě. Je to příklad t. zv. *nomogramu průsečíkového.*[2])

Vytkněme si ještě vztah mezi souřadnicemi a proměnnými. Označme souřadnice bodu písmeny ξ, η, abychom je rozlišovali od proměnných x, y (neboť nebudeme vždy vynášeti shodně na př. proměnnou y na osu pořadnic η) a napišme rovnice platné mezi ξ, η a x, y, z. V uvedeném příkladě platí:

$$\xi = \alpha \, . \, x, \tag{a$_1$}$$

kde α je jednotka, zvaná modul, které používáme při vynášení hodnot x (je to rovnice rovnoběžek s η),

$$\eta = \beta \, . \, y, \tag{b$_1$}$$

β opět modul (rovnice rovnoběžek s ξ). Dosadíme-li x, y z (a_1), (b_1) do (1) vyplyne nám rovnice křivek pro proměnnou z

$$\eta = \frac{\alpha\beta z}{\xi}. \tag{c$_1$}$$

V příkladě voleno $\alpha = \beta = 1$, takže rovnice (c_1) má tvar $\eta = \frac{z}{\xi}$, stejný jako rovnice (2).

Říkejme rovnicím (a_1), (b_1) a (c_1), které nám vlastně popisují geometrické elementy přiřazené proměnným a jejich uspořádání, rovnice zobrazovací.

Z obr. 1 vidíme, že sestrojení tohoto nomogramu je pracné a v některých částech jeho použití je prakticky neupotřebitelné, protože je velmi nepřesné. Ukážeme si proto další způsoby přiřazení, abychom uvedené nevýhody odstranili. (Grafická souvislost elementů vzhledem k řešení daného vztahu zůstane stejná, jak dříve uvedeno.)

Jak snadno nahlédneme, lze rovnice (a_1), (b_1) voliti vždy libovolně, kdežto tvar rovnice (c_1) vyplyne použitím vztahu zobrazovaného a rovnic (a_1), (b_1). V tom právě leží možnost vystihnouti vhodné nomografické zobrazení. Počínejme si nyní takto.

2. Přiřaďme opět proměnné x rovnoběžky s η, ale proměnné z přiřaďme rovnoběžky s ξ, takže zobrazovací rovnice jsou

$\xi = \alpha \, . \, x$, $\eta = \beta \, . \, z$ a $\eta = \frac{\beta}{\alpha} y \, . \, \xi$, t. j. proměnná y se zobrazuje přímkami jdoucími počátkem o směrnici $\frac{\beta}{\alpha} y$ (obr. 2).

Tímto přiřazením jsme si velmi usnadnili kreslení nomogramu, protože geometrické elementy jsou vesměs přímky (dohromady tvoří

[2]) Srovnej definici nomogramu průsečíkového v článku: O dvojitém logaritmickém papíru, Rozhledy, 1934, str. R 36.

trojnásobnou soustavu přímek). Přesnost odčítání se sice zvětšila v některých částech (už tím, že rýsujeme přímky), ale na př. kolem počátku je opět nepostačující. Pokusíme se o výhodnější uspořádání trojnásobné soustavy přímek.

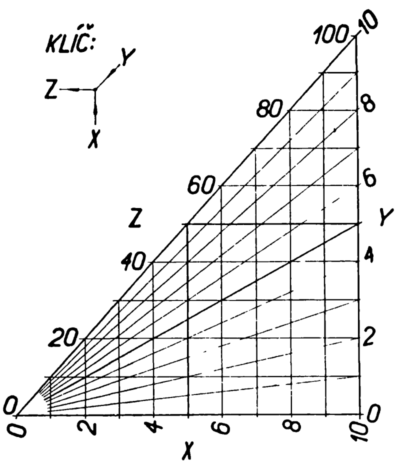
3. Logaritmujme rovnici (1)

$$\log x + \log y = \log z \tag{1a}$$

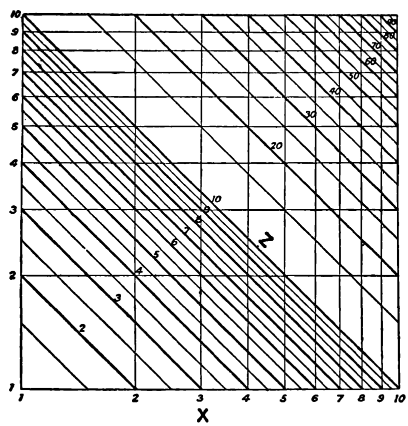
a napišme zobrazovací rovnice

$$\xi = \alpha \, . \log x, \ \eta = \alpha \, . \log y \ \text{a} \ \eta + \xi = \alpha \log z.$$

Nyní jsou všem proměnným přiřazeny vždy rovnoběžky. Proměnné x resp. y jsou přiřazeny rovnoběžky s osou η resp. ξ, vytí-



Obr. 2.



Obr. 3.

nající na příslušných osách dělení, kterému říkáme logaritmická stupnice,[3]) proměnné z jsou přiřazeny rovnoběžky o směrnici (— 1) vytínající současně na obou osách shodné logaritmické stupnice (moduly na obou osách voleny stejné (obr. 3). Protože v obchodě lze koupiti papír, na kterém jsou vytištěny na osách souřadnic logaritmické stupnice, jejichž dělícími body jsou již vedeny rovnoběžky s osami (říká se mu dvojitý logaritmický papír,[3]) je kreslení nomogramu velmi pohodlné a přesné.

Odčítání hodnot ve všech částech tohoto nomogramu je relativně stejně přesné z toho důvodu, že jsme použili při vynášení místo hodnot proměnných jejich logaritmů.[4]) To je velká přednost tohoto způsobu zobrazení.

[3]) Srovnej cit. článek v Rozhledech. 1934, R 34.
[4]) Srovnej Láska-Hruška, Počet graf. a grafickomechanický, JČMF., Praha 1923, str. 57.

Jak u zobrazení 2. tak 3. je velmi vítaná okolnost, že geometrické elementy jsou vesměs přímky. Ty lze rýsovati velmi přesně, čímž použití nomogramu se plněji uplatňuje. Hledejme proto nyní obecně podmínku, které musí vyhovovati vztah mezi třemi proměnnými x, y, z

$$F(x, y, z) = 0, \tag{II}$$

aby se dal zobraziti trojnásobnou soustavou přímek. Snadno postřehneme, že musí býti té povahy, aby jej bylo lze tak rozložiti, že zobrazovací rovnice budou míti tvar

$\xi f_1+\eta g_1+h_1=0$, kde f_1, g_1, h_1 značí funkce pouze proměnné x, (a)
$\xi f_2+\eta g_2+h_2=0$, kde f_2, g_2, h_2 značí funkce pouze proměnné y, (b)
$\xi f_3+\eta g_3+h_3=0$, kde f_3, g_3, h_3 značí funkce pouze proměnné z, (c)

při čemž f_1 je funkce obecně od f_2 a f_3 různá, podobně další.

Protože obecně pro kterékoliv hodnoty x_0, y_0, z_0, které splňují vztah (II), dostaneme použitím (a), (b), (c) 3 přímky, které se protínají v bodě, musí býti také splněna podmínka

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \equiv F(x, y, z) = 0.\text{[5]} \tag{III}$$

Obráceně, lze-li (II) psáti také ve tvaru (III), kde f_i, g_i, h_i mají vlastnosti sub (a), (b), (c), je možno (II) zobraziti trojnásobnou soustavou přímek.

Je tedy nutná a postačující podmínka pro to, aby vztah mezi třemi proměnnými se dal zobraziti trojnásobnou soustavou přímek ta, aby se dal napsati do tvaru determinantu (III). Rovnice jednotlivých soustav přímek jsou právě (a), (b), (c).

Obecně převésti daný vztah mezi třemi proměnnými na tvar determinantu (III) není úloha možná; a je-li možnou, není převedení ve tvar (III) obecně snadné. Lze však vytknouti některé typy vztahů, říkáme jim kanonické tvary, které se v technické praksi velmi často vyskytují a jejichž převedení do tvaru determinantu je jednoduché. Udáme si jeden z nich. Zní

$$f_3 h_1 + g_3 h_2 + h_3 \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & h_1 \\ 0 & -1 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{IV}$$

indexy značí proměnné, t. j. h_1 je funkce první proměnné (značme ji třeba x), h_2 je funkce (od h_1 obecně různá) druhé proměnné (y), f_3, g_3, h_3 jsou funkce třetí proměnné (z). Použijme determinantu na náš příklad:

[5]) Vymizení determinantu znamená vlastně, že obsah plochy, kterou omezují uvažované přímky je stále roven 0.

$$xy - z = \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & z \\ y & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \alpha x \\ 0 & -1 & \beta z \\ \dfrac{y}{\alpha} & -\dfrac{1}{\beta} & .0 \end{vmatrix} = 0 \quad \alpha, \beta \text{ moduly.}$$

Odtud vyplývají zobrazovací rovnice právě tytéž, jako byly napsány v odst. 2, t. j.

$$\begin{aligned} -\xi \quad + \quad 0 + \alpha x &= 0 \\ 0 \quad - \quad \eta + \beta z &= 0 \\ \frac{y}{\alpha} \cdot \xi - \frac{1}{\beta}\eta + 0 \quad &= 0. \end{aligned}$$

Podobně lze vypsati použitím determinantu zobrazovací rovnice z odst. 3.

N o m o g r a m y s p o j n i c o v é. Zobrazovací rovnice při nomogramu s trojnásobnou soustavou přímek přiřazovaly určité hodnotě proměnné vždy přímku. Přisoudíme-li těmto rovnicím význam duální, dostaneme pro určitou hodnotu proměnné místo přímky b o d. Místo trojnásobné kótované soustavy přímek dostaneme duálně trojnásobnou kótovanou soustavu bodů. Hodnotám proměnných jsou přiřazeny — jako geometrické elementy — body, jejichž grafická souvislost vzhledem k řešení daného vztahu je také duální. T. j. body, u nichž jsou připsány ty hodnoty x_0, y_0, z_0, splňující zobrazovaný vztah, leží na přímce (je spojující). Máme případ t. zv. *nomogramu spojnicového.*

V zobrazovacích rovnicích proto místo ξ, η pišme u, v jako upozornění, že jsou to rovnice bodů. Tak rovnici (a) píšeme $uf_1 + vg_1 + h_1 = 0$. Dosadíme-li do f_1, g_1, h_1 za x hodnotu x_0, dostaneme určitý bod, k němuž připíšeme číslo x_0. Jeho souřadnice jsou dány výrazy

$$\xi_1 = \frac{f_1}{h_1}, \quad \eta_1 = \frac{g_1}{h_1}, \text{ [6]} \qquad \text{(a')}$$

v nichž je za x dosazeno x_0. Okótovaná spojnice všech bodů x vyčerpávajících udaný interval, sluje s t u p n i c e p r o m ě n n é x. Podobně plyne z rovnic (b) resp. (c) pro souřadnice bodů označených hodnotami proměnné y resp. z

$$\xi_2 = \frac{f_2}{h_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{h_2}, \qquad \text{(b')}$$

$$\xi_3 = \frac{f_3}{h_3}, \quad \eta_3 = \frac{g_3}{h_3}. \qquad \text{(c')}$$

[6]) Vyplývají ze srovnání s obecným tvarem rovnice bodu $u\xi + v\eta + 1 = 0$, kde u, v jsou přímkové souřadnice, ξ, η konstanty (souřadnice onoho bodu).

Rovnice (a'), (b') a (c') můžeme také vypsati přímo z determinantu (III), dělíme-li v něm posledním sloupcem a přirovnáme k determinantu

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

který vyjadřuje duální podmínku pro body (ξ_i, η_i), $i = 1, 2, 3$, aby ležely na téže přímce.

Protože v determinantu (III), který je pro uvažované hodnoty proměnných stále roven nule, lze sloupce spolu libovolně vzájemně zaměniti, násobiti nenulovými konstantami, algebraicky přičítati a tím i výrazy (a'), (b') a (c') pro zobrazení vhodně upravovati, lze uvažovati přímo tyto výrazy jako zobrazovací rovnice. Budeme tedy v dalším vypisovati tyto rovnice vždy z upraveného determinantu.

4. Použijme toho nyní na uvažovaný příklad:

$$xy - z = \begin{vmatrix} -1 & 0 & z \\ 0 & -1 & -x \\ 1 & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & z \\ -1 & -1 & -x \\ 1+y & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ \dfrac{y}{1+y} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po vynásobení α, β dostaneme zobrazovací rovnice:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \beta z, \\ \xi_2 &= \alpha, & \eta_2 &= -\beta x, \\ \xi_3 &= \frac{\beta y}{1+y}, & \eta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Moduly voleny $\alpha = 12$ cm, $\beta = 0{,}1$ cm (obr. 4). Při tomto zobrazení délka stupnice pro x vypadne 10krát kratší, než pro z[7]) a dělení stupnice y není příliš vhodné pro daný rozsah. Také vzájemné uspořádání stupnic není vyhovující, protože spojnice hodnot y (zvláště od 5 do 10) s hodnotami x (zvláště od 0 do 5) jsou velmi nepřesné. Zobrazení není tedy k odčítání vhodné. Hledáme lepší.

5. Upravme obecně determinant (IV) na tvar

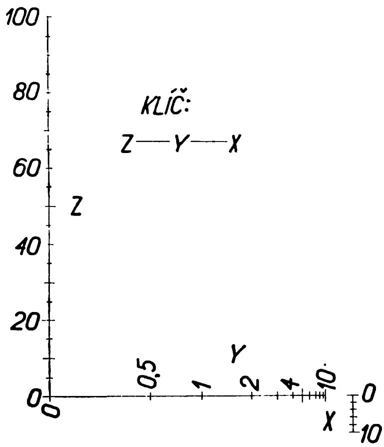
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & h_1 \\ 0 & -1 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha h_1 & 1 \\ \delta & \beta h_2 & 1 \\ \dfrac{\alpha\delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} & -\dfrac{\alpha\beta h_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(α, β, δ jsou nenulové konstanty, které vždy vhodně volíme), z něhož plynou tyto zobrazovací rovnice:

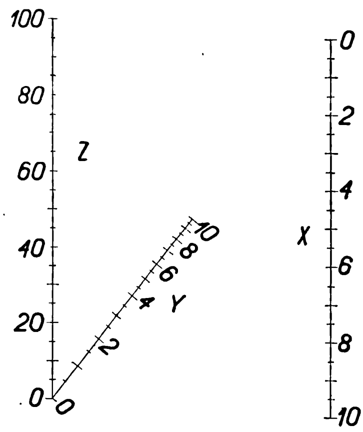
[7]) Mají stejný modul, ale různý rozsah.

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \alpha h_1, \qquad (\text{a}'')$$
$$\xi_2 = \delta, \qquad \eta_2 = \beta h_2, \qquad (\text{b}'')$$
$$\xi_3 = \frac{\alpha \delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3}, \quad \eta_3 = -\frac{\alpha \beta h_3}{\beta f_3 + \alpha g_3}, \qquad (\text{c}'')$$

které praví, že stupnice první a druhé proměnné jsou na dvou přímkách rovnoběžných, kdežto stupnice třetí proměnné je obecně křivá.



Obr. 4.



Obr. 5.

Použijme rovnic (a''), (b'') a (c'') na uvažovaný příklad. Přirovnáním rovnice (1) s kanonickým tvarem (IV), dostaneme $h_1 = z$, $h_2 = -x$, $f_3 = 1$, $g_3 = y$, $h_3 = 0$ a tedy

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \alpha z,$$
$$\xi_2 = \delta, \qquad \eta_2 = -\beta x,$$
$$\xi_3 = \frac{a \delta y}{\beta + \alpha y}, \quad \eta_3 = 0,$$

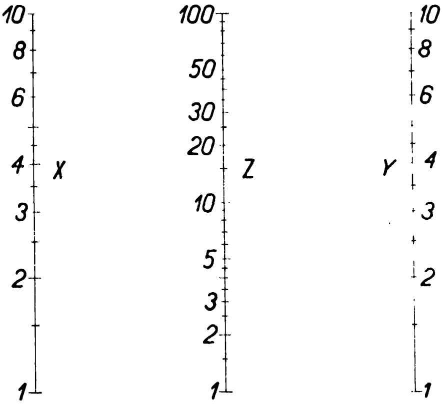
(v obr. 5 voleno $\alpha = 0{,}1$ cm, $\beta = 1$ cm, $\delta = 12$ cm).

Protože dělení stupnic z a x roste ve smyslu opačném, použijeme s výhodou kosoúhlého systému souřadnic, abychom mohli stupnice umístit „vedle sebe“. Proti zobrazení v odst. 4, máme zde výhodu, že délky stupnic pro proměnné x a z lze voliti na sobě nezávisle, protože mají různé moduly. Toto uspořádání však neodstranilo úplně závadu nepřesného odčítání, zvláště spojnice bodů okolo $x = 1$ s hodnotami y nejsou spolehlivé.

6. Použijme rovnice (1a) ke zobrazení spojnicovým nomogramem. Položme $h_1 = \log x$, $h_2 = \log y$, $h_3 = -\log z$, $f_3 = g_3 = 1$ a napišme zobrazovací rovnice

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \alpha \log x,$$
$$\xi_2 = \delta, \qquad \eta_2 = \beta \log y,$$
$$\xi_3 = \frac{\alpha\delta}{\alpha + \beta}, \; \eta_3 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \,.\, \log z,$$

(v obr. 6 voleno $\alpha = \beta = \delta = 10$ cm).



Obr. 6.

Toto zobrazení se jeví z uvedených nejvýhodnější. Hledanou hodnotu z odčítáme na stupnici, kterou máme uvnitř rovnoběžných stupnic x a y. Spojnice, u které odčítáme je velmi přesná, protože spojuje body dosti vzdálené. Stupnice jsou vesměs vyneseny od 1 místo od 0 (protože $\log 0 = -\infty$), ale můžeme je snadno prodloužit do 0,1 (i dále), neboť přikreslení stupnice od 0,1 do 1 znamená připojiti úsek shodný s částí od 1 do 10.

Z uvedeného vidíme, že nejen přiřazení jednoduchých geometrických elementů, ale též jejich vhodné uspořádání je při nomografickém zobrazování velmi důležité. Leží tedy význam a důležitost nomografie v tom, že hledá možnosti pro to, aby se dané vztahy (které se v praksi často používají a pro počítání jsou nepohodlné nebo pracné na př. kubatura „kulatých dřev“[8]), vhodně graficky zobrazily a aby se obrazy daly použíti k jejich řešení.

Uvedených metod lze užíti na příklady $s = c \,.\, t$, $V = \pi r^2 v$ $V = \frac{\pi}{40.000} d^2 \,.\, l$,[8]) $\sin z = \sin x \,.\, \sin y$, $y = z - x \sin z$ (Keplerova rovnice z astronomie; stupnice pro z je křivá!).

---

[8]) $V = \frac{\pi}{40000} d^2 l$, viz cit. článek v Rozhledech, 1934.