

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

## Řešení úloh

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 279--288

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123352>

### Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1893

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

při značnějších větrech, neboť pak přistupují ku zjevu komplikace, které není tak snadno v počet uvéstí.

(Comptes rendus 1892. CXV.)

## Řešení úloh.

### Úloha 11.

Jak velké jsou ostré úhly trojúhelníka pravoúhlého, stojí-li na sobě kolmo společné tečny oněch kružnic, které mají odvěsny za průměry?

**Řešení.** (Zaslal p. *Frant. Nachtikal*, stud. VIII. tř. gymn. v Klatovech).

Budiž ABC trojúhelník pravoúhlý, M, N středy kružnic, které mají odvěsny  $BC = a$ ,  $AC = b$  za průměry a P průsečík společných tečen těchto kružnic. Vedme poloměry MQ, NR bodů dotýčných jedné z těchto tečen. Je-li  $a > b$  a položíme-li

$$\sphericalangle MPQ = \varphi,$$

obdržíme z trojúhelníků pravoúhlých MPQ, MPR

$$MQ = \frac{a}{2} = (MN + NP) \sin \varphi,$$

čili 
$$\frac{a}{2} = \left(\frac{c}{2} + NP\right) \sin \varphi,$$

$$NR = \frac{b}{2} = NP \sin \varphi.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic neznámou NP, bude

$$\sin \varphi = \frac{a - b}{c}.$$

Avšak 
$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

tedy 
$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \varphi \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Dle podmínek v úloze obsažených jest

$$\varphi = 45^\circ, \quad \frac{\gamma}{2} = 45^\circ,$$

pročež 
$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2};$$

jest tedy 
$$\alpha - \beta = 60^\circ, \quad \alpha + \beta = 90^\circ,$$

odkudž 
$$\alpha = 75^\circ, \quad \beta = 15^\circ.$$

### Úloha 12.

Vypočítati úhly a úhlopříčky v kosodélníku, jehož strany jsou  $a = 217$ ,  $b = 124$  a úhel úhlopříček  $\omega = 58^\circ 24' 40''$ .

**Řešení.** (Zaslal pan *J. Partaj*, stud. VII. tř. r. v Písku).  
Budtež  $m > n$  úhlopříčky kosodélníka.

Dle věty Carnotovy jest

$$4a^2 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \omega,$$

$$4b^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \omega.$$

Z rovnic těch nalezneme cestou algebraickou

$$m + n = \sqrt{2(a^2 + b^2) + \frac{2(a^2 - b^2)}{\cos \omega}},$$

$$m - n = \sqrt{2(a^2 + b^2) - \frac{2(a^2 - b^2)}{\cos \omega}}.$$

Při daných hodnotách číselných vypočítáme

$$m = 279, \quad n = 217;$$

z trojúhelníka omezeného stranami  $a$ ,  $b$ ,  $n$  ustanovíme sevřený stranami  $a$ ,  $b$  úhel

$$\alpha = 72^\circ 23' 54''.$$

### Úloha 13.

Vypočítati úhly a úhlopříčky v lichoběžníku, jehož půdice jsou  $a = 216$ ,  $b = 175$  a ramena  $c = 115$ ,  $d = 90$ .

**Řešení.** (Zaslal p. *Jaroslav Polák*, stud. VI. tř. české realky v Praze.)

V lichoběžníku  $abcd$  budiž

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{cd} = b, \quad \overline{ad} = c, \quad \overline{bc} = d.$$

Úhly označme písmeny řeckými souhlasně s označením vrcholů.

Vedeme-li příčku  $ef \parallel da$ , známy jsou v trojúhelníku  $fbc$  strany

$$\overline{fb} = a - b, \quad \overline{fc} = c, \quad \overline{bc} = d;$$

užitím tangents polovičních úhlů vypočítáme úhly

$$\begin{aligned} \alpha &= 117^{\circ}49'4'', & \beta &= 43^{\circ}48'6'', \\ \text{načež} \quad \delta &= 62^{\circ}10'56'', & \gamma &= 136^{\circ}11'54''. \end{aligned}$$

Délka úhlopříček

$$\overline{ac} = m, \quad \overline{bd} = n$$

vypočítáme z trojúhelníků  $abc$ ,  $abd$ , znajíce v každém dvě strany a úhel jimi sevřený. Užitím věty tangentsvé a sinusové najdeme tak

$$m = 155, \quad n = 270.$$

#### Úloha 14.

Pateronásobný obsah ellipsy, jejíž osy jsou  $2a$ ,  $a$ , rovná se povrchu komolého kužele, jehož základny mají poloměry  $a$ ,  $\frac{a}{2}$ .

Vypočítati výšku tohoto kužele.

**Řešení.** (Zaslal p. *Boh. Lauschmann*. stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze).

Je-li strana kužele  $s$ , jest dle podmínek úlohy

$$\frac{5\pi a^2}{2} = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3\pi a s}{2},$$

z čehož

$$s = \frac{5}{6} a.$$

Odtud vypočítáme výšku

$$v = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{3} a.$$

## Úloha 15.

Povrch úseče kulové má se k povrchu koule jako 9 : 25. V kterém poměru jsou jich obsahy?

**Řešení.** (Zaslal p. *Ant. Maryánek*, stud. VIII. tř. gymn. v Kroměříži).

Budiž  $r$  poloměr koule,  $v$  výška úseče. Potom jest povrch úseče

$$P = 2\pi r v + \pi [r^2 - (r - v)^2] = \pi v (4r - v)$$

a poměr jeho k povrchu koule

$$\pi v (4r - v) : 4\pi r^2 = 9 : 25.$$

Z úměry této plyne rovnice

$$25v^2 - 100rv + 36r^2 = 0,$$

jejíž kořen  $v = \frac{2}{5}r$  vyhovuje úloze.

Poměr obsahů obou těles jest pak

$$K : K' = \frac{\pi v^2}{3} (3r - v) : \frac{4\pi r^3}{3}$$

a po dosazení hodnoty  $v$

$$K : K' = 13 : 125.$$

## Úloha 16.

Jak velká jest plocha největšího obdélníka vepsaného v elipsu o poloosách  $a$ ,  $b$ ?

**Řešení.** (Zaslal p. *Jan Vykruta*, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci).

Dejme tomu, že jest bod  $m(x, y)$  jedním vrcholem žádaného obdélníka; bod ten náleží ellipse určené rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Plocha obdélníka, jehož ostatní tři vrcholy jsou s bodem  $m$  souměrně sdruženy, jest

$$P = 4xy.$$

Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic  $y$ , obdržíme rovnici

$$16b^2x^4 - 16a^2b^2x^2 + a^2P^2 = 0,$$

jejíž kořeny jsou reálné při

$$4a^2b^2 - P^2 \geq 0.$$

Plocha největšího vepsaného obdélníka jest tedy

$$P = 2ab$$

a to při 
$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

### Úloha 17.

V trojúhelníku ABC jest základna AB pevná a vrchol C proměnlivý. Dokázati jest, že geometrickým místem vrcholu C jest ellipsa, je-li výška jeho  $v_c$  rovna  $n$ -násobnému poloměru kruhu vepsaného.

**Řešení.** (Zaslal p. *Jaroslav Doležal*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích).

Jest známo, že poloměr kruhu vepsaného

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c},$$

kdež  $\Delta$  značí plochu trojúhelníka a  $r$  poloměr kruhu vepsaného.

Dále jest

$$v_c = \frac{2\Delta}{c},$$

a dle podmínky

$$v_c = nr.$$

Vyloučíme  $v_c$ ,  $r$  a  $\Delta$  z rovnic předešlých, obdržíme

$$\frac{nc}{a+b+c} = 1,$$

odkudž

$$a+b = (n-1)c.$$

Z rovnice této jest patrné, že součet vzdáleností vrcholu C od pevných bodů A, B jest stálý, pročež jest geometrickým místem vrcholu C ellipsa, mající A, B za ohniska.

## Úloha 18.

Kterou hodnotu má nekonečný periodický zlomek řetězový  
 $1/3 + 1/\sqrt{2} + 1/3 + 1/\sqrt{2} + \dots$  in inf. ?

**Řešení.** (Zaslal p. A. Haas, stud. VII. tř. českého gymn. v Opavě).

Položíme-li

$$z = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2} + z},$$

jest  $3z^2 + 3z\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$

Kladný kořen této rovnice vyjadřuje tvarem zakončeným hodnotu daného periodického řetězce, totiž

$$z = \frac{1}{6} (-3\sqrt{2} + \sqrt{18 + 12\sqrt{2}}).$$

Výrazu tomu lze dáti též podobu

$$z = \frac{1}{6} (\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$$

čili

$$z = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## Úloha 19.

Řešiti soustavu rovnic

$$9 \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{y}} - 4 \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{y}} = 2$$

$$y - \frac{1}{2} \log x = 2$$

**Řešení.** (Zaslal p. Jos. Kincl, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové).

Položíme-li  $\left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{y}} = z,$

bude  $4z^2 - 9z + 2 = 0,$

tedy  $z_1 = 2, \quad z_2 = \frac{1}{4};$

odtud jde 
$$y_1 = -\frac{\log x}{\log 2}, \quad y_2 = \frac{\log x}{\log 4}.$$

Dosadíme tyto hodnoty do druhé z daných rovnic, obdržíme

$$\log x_1 = -\frac{4 \log 2}{2 + \log 2} = -0.52329$$

$$x_1 = 0.29971$$

$$y_1 = \frac{4}{2 + \log 2} = 1.73835,$$

aneb

$$\log x_2 = \frac{4 \log 2}{1 - \log 2} = 1.72271$$

$$x_2 = 52.809$$

$$y_2 = \frac{2}{1 - \log 2} = 2.86135.$$

#### Úloha 20.

V rovině  $\varrho$ , která jest odchýlena od průmětny  $\pi$  o úhel  $60^\circ$ , dán jest trojúhelník rovnoramenný, jehož obvod jest  $36 \text{ cm}$  a úhel při půdici  $\alpha = 30^\circ$ . Trojúhelník tento jest promítnouti do průmětny  $\pi$ , průmět nazpět do roviny  $\varrho$ , odtud do  $\pi$  a t. d. Stanovití součet obsahů všech těchto trojúhelníků.

**Řešení.** (Zaslal p. *Jaroslav Skála*, stud. VII. tř. r. v Prostějově).

Značí-li  $x$  polovici půdice,  $y$  rameno a  $v$  výšku daného trojúhelníka rovnoramenného, jest dle podmínek úlohy

$$x + y = 18, \quad x = \frac{y}{2} \sqrt{3}, \quad v = \frac{y}{2}.$$

Odtud vypočítáme

$$x = 18(2\sqrt{3} - 3), \quad v = 18(2 - \sqrt{3}),$$

tudíž obsah trojúhelníka

$$A = xv = 324(7\sqrt{3} - 12).$$

Průměty tohoto trojúhelníka jsou po řadě

$$A_1 = A \cos 60^\circ = \frac{1}{2} A, \quad A_2 = \frac{1}{2} A_1, \dots$$



a součet všech

$$S = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}} = 2A = 648 (7\sqrt{3} - 12).$$

### Úloha 21.

Úhlopříčné řezy pravoúhlého rovnoběžnostěnu jsou:  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . Stanoviti hrany a obsah.

**Řešení.** (Zaslal p. A. Haas, stud. VII. tř. českého gymn. v Opavě).

Jsou-li  $x$ ,  $y$ ,  $z$  hrany rovnoběžnostěnu pravoúhlého, jest řešiti rovnice:

$$\begin{aligned} x\sqrt{y^2 + z^2} &= u_1, \\ y\sqrt{z^2 + x^2} &= u_2, \\ z\sqrt{x^2 + y^2} &= u_3, \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 &= u_1^2 + u_2^2 - u_3^2, \\ 2x^2z^2 &= u_1^2 - u_2^2 + u_3^2, \\ 2y^2z^2 &= -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \end{aligned}$$

akže

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{\frac{(s^2 - u_2^2)(s^2 - u_3^2)}{s^2 - u_1^2}}, \\ y &= \sqrt[4]{\frac{(s^2 - u_3^2)(s^2 - u_1^2)}{s^2 - u_2^2}}, \\ z &= \sqrt[4]{\frac{(s^2 - u_1^2)(s^2 - u_2^2)}{s^2 - u_3^2}}, \end{aligned}$$

a obsah

$$O = \sqrt[4]{\frac{(s^2 - u_1^2)(s^2 - u_2^2)(s^2 - u_3^2)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 2s^2}},$$

píšeme-li

### Úloha 22.

O kouli opsán jest kolmý kužel komolý tak, že obsah jeho rovná se  $n$ -násobnému obsahu koule. Kterak mají se k sobě povrchy obou těles a které jsou poloměry základů kužele komolého?

**Řešení.** (Zaslal p. *Josef Hájiček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Značí-li  $K$  obsah kužele komolého,  $R$ ,  $r$  poloměry základů jeho,  $k$  obsah koule poloměru  $\varrho$ , jest

$$K = nk$$

$$\text{aneb} \quad \frac{2\pi\varrho}{3} (R^2 + Rr + r^2) = \frac{4n\pi\varrho^3}{3},$$

$$\text{z čehož} \quad R^2 + Rr + r^2 = 2n\varrho^2.$$

Povrch  $P$  kolm. kužele komolého dle toho jest

$$P = 2\pi (R^2 + Rr + r^2) = 4\pi n\varrho^2,$$

uvážíme-li, že strana jeho  $s = R + r$ .

Poněvadž povrch koule  $p = 4\pi\varrho^2$ , obdržíme

$$P : p = n : 1.$$

Zároveň snadno určíme poloměry základů

$$R = \frac{1}{2} \varrho (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-3}),$$

$$r = \frac{1}{2} \varrho (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-3}).$$

#### Správné řešení úloh zaslali pp.:

- Václav Kolář*, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích, úl. 14.  
*Ant. Picha*, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích, úl. 14.  
*Jan Vykřuta*, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 18., 19., 20., 21., 22.  
*Otakar Janků*, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 11., 12.  
*Frant. Nachtikal*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 11., 12., 13., 14., 16.  
*Josef Poláček*, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 13., 14.  
*Josef Kincl*, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 13., 14., 18., 19., 20., 21.  
*Josef Langr*, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 11., 12., 13., 14., 18., 19., 20., 21.  
*Vinc. Sura*, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 13., 14., 15., 19., 20.

- Jan Matoušek*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 18., 19., 20., 21., 22.
- Ant. Maryánek*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 19., 20., 21., 22.
- Frant. Očadlík*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 19., 20., 21., 22.
- Václav Vraný*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 11., 13., 15.
- Vítězslav Pavloušek*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 14.
- Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 11., 12., 13., 14., 16., 17., 18., 19., 20., 21., 22.
- Zd. Dvořák*, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 14.
- Vojtěch Prach*, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 11., 13., 14., 15., 19., 22.
- Jarosl. Doležal*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 18., 19., 20., 21., 22.
- Václ. Kmoníček*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 11., 13., 14.
- Josef Píthardt*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 11., 13., 14., 15., 16., 19., 20., 22.
- Eman. Svoboda*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 14., 15.
- Karel Urban*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 12.
- Josef Partaj*, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 11., 12., 13., 15., 16.
- Josef Pössner*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 11., 14., 19., 21.
- Jos. Kučera*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 19.
- Boh. Lauschmann*, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 14.
- Jan Pexider*, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16.
- Jarosl. Polák*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 13.
- Vladimír Líst*, stud. VI. tř. akad. g. v Praze, úl. 15.
- O. Podhajský*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 11., 13., 14., 15., 18., 20.
- Josef Bernhard*, stud. VII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, úl. 18., 19.
- Adolf Sláma*, stud. V. tř. g. v Žitné ul. v Praze, úl. 14., 21.
- Leopold Šauer*, stud. VII. tř. g. v Truhlářské ulici v Praze, úl. 12., 13.
- Jarosl. Skála*, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 11., 12., 13., 14., 16., 17., 18., 19., 20., 21., 22.
- Václav Beneš*, stud., VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 18., 19.
- Frant. Mitáček*, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 13., 14., 15., 16., 19., 20.
- Josef Hájiček*, učitel v Grygově u Olomouce, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 18., 19., 20., 21., 22.
- Václav Jelínek*, stud. v Praze, úl. 11., 12., 13., 14., 16., 17.
- Frant. Moravan* na Král. Vinohradech, úl. 11., 12., 13., 14., 15., 16.

