Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Koláček

Poznámka k větě Cauchyho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 233--239

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123351

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1893

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Poznámka k větě Cauchyho.

Píše

prof. dr. **Fr. Koláček.**

Běžný důkaz věty uvedené jest po mém soudu stížen nejasností, jež se nesrovnává s fundamentálným významem jejím. Abych ukázal, v čem nejasnost spatřuji, musím v krátkosti rekapitulovati methodu důkazu, jenž se opírá o pomocnou, níže uvedenou větu. Činím to podle známého spisu „Cours" de M. Hermite 1891. Hermite praví (p. 65.): „Soient U et V deux fonctions de x et y, réelles, continues et **uniformes** à l'intérieur d'une aire S; je dis, que l'intégrale curviligne relative au contour de cette aire $\int(\mathrm{U}dx + \mathrm{V}dy)$ s'exprime par l'integrale double

$$\int\int dx\, dy\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \frac{d\mathrm{U}}{dy}\right)."$$

Na to se známou cestou, integrací po částech uvedená these dokazuje, a ku konci se ještě jednou opakuje: „Les fonctions U et V doivent être finies, continues et **uniformes**" (p. 66.).

Ale v početním mechanismu, v integraci po částech, není nikdež nutno předpokládati, že U a V musí býti úkony jednoznačnými (f. uniformes, eindeutig), ba nevystupuje ani jasně podmínka kontinuity, takže čtenář nabývá dojmu, že tyto podmínky s opětovaným důrazem vytčené jsou vlastně zbytečny.

Nezdá se mi tedy věcí zbytečnou, podám-li nový důkaz, který nepřipouští námitek takových. Povedeme jej bez pomocné věty nahoře uvedené.

1. Budiž $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ funkcí soujemného argumentu

$$z = x + iy\,,$$

a sice n-značnou, t. j. určité číselné hodnotě $x + iy$ odpovídej vždy „n" numerických hodnot Z. Mezi nimi jest v případu obecném rozdíl konečný, vyjma případy, kdy pro určité z několik hodnot Z koinciduje. Takový bod z v rovině xy jest množným, resp. i bodem rozvětvení.

Z uvedených nahoře n-číselných hodnot n-značné funkce, jež bodu A v rovině xy přísluší, zvolme jednu Z_A a stopujme nepřetržitou řadu hodnot, v něž přechází tato hodnota Z_A, opisuje-li „z“ křivku AB, na jejímž konci Z_A přešlo v Z_B. Konečná hodnota Z_B závisí na cestě AB, není tedy funkcí polohy B, ač musí s jednou z oněch n hodnot koincidovati, které přináležejí bodu B. Nebýti toho, musila by funkce proti podmínce býti více než n-značnou. Tuto souvislou řadu hodnot, Z_A počínající a Z_B končící, zovme zkrátka Z. Jsou-li mezi A a B vloženy body 1, 2, ..., n sobě nekonečně blízké, budeme integrálem

$$\int_A^B Zdz$$

vyrozumívati limitu výrazu

$$[(z_1 - z_A) . Z_A + (z_2 - z_1) Z_1 + \ldots + (z_B - z_n) Z_n],$$

značí-li $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, Z_B$ serii numerických hodnot, v něž přechází Z_A.

2. Dejme tomu, že body B, 1, 2, ..., n, B tvoří křivku uzavřenou jako na př. kruh, tak že bod B s bodem A v jeden splývá: pak jest integrál kol uzavřené křivky, jehož dolní a horní mez jest A, dán předešlým vzorcem.

Dejme tomu, že nyní po jednom oběhu Z_A přejde v $Z_{A'}$, a že při dalším obíhání následují po sobě numerické hodnoty $Z'_1, Z'_2, Z'_3, \ldots, Z'_p, \ldots$ Učiňme nyní východištěm integrace bod p-tý. Pak platí

$$\int_p^p Z . dz$$

$$= \lim [(z_{p+1} - z_p) Z_p + (z_{p+2} - z_{p+1}) Z_{p+1} + \ldots + (z_A - z_n) Z_n]$$
$$+ \lim [(z_1 - z_A) Z'_A + (z_2 - z_1) Z'_2 + \ldots + (z_p - z_{p-1}) Z'_{p-1}].$$

Z uvedeného vidíme, že kol téže křivky vzatý integrál

$$\int_A^A Z . dz,$$

jehož meze jsou AA, se naprosto liší od integrálu $\int_p^p Zdz$ jehož meze tvoří bod p. *Integrál kol uzavřené křivky funkce n-značné jest tedy mimo jiné také funkcí meze,* tak že může na-býti rozmanitých v sebe nepřetržitě přecházejících hodnot, mění-li se meze nepřetržitě.

Rozdíl obou integrálů jest

$$\lim \left[(z_1 - z_A)(Z_A - Z'_A) + (z_2 - z_1)(Z_1 - Z'_1) + \dots + (z_p - z_{p-1})(Z_{p-1} - Z'_{p-1})\right].$$

Z toho plyne:

Jen tehdy, je-li funkce jednoznačná, aneb podmíněně jednoznačná, t. j. neobsahuje-li integrační křivka ve svém nitru bod rozvětvení pro použitou větev $Z_A, \dots, Z_{A'}, \dots$, *jest integrál dokola křivky, uzavřené v jednoduché rovině, nezávislým na východišti integrace.*

Po určitém počtu oběhů $m\,(< n)$ musí Z_A dospěti k své hodnotě počáteční; neboť jinak by byla funkce proti podmínce více než n-značnou. Integrál přese *všechny* oběhy vzatý jest nyní na poloze mezí nezávislým, protože jej lze psáti ve tvaru

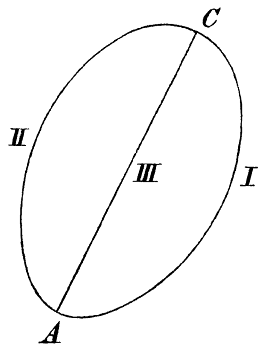
$$\lim \Sigma\,(z_p - z_{p-1})\left[Z_{p-1} + Z'_{p-1} + Z''_{p-1} + \dots + Z^{(m-1)}_{p-1}\right],$$

kdež součet $Z_{p-1} + \dots + Z^{(m-1)}_{p-1}$ jest nutně jednoznačnou funkcí polohy bodu $(p-1)$. Při tom označují $Z_{p-1}, Z'_{p-1}, \dots, Z^{(m-1)}_{p-1}$ hodnoty numerické, jichž dosáhne funkce Z, z bodu A s hodnotou Z_A vycházející po jednom, dvou, ..., m obězích, kdež m-tým oběhem cyklus oběhů se ukončuje.

Nelze si mysliti elegantnější illustrace vět právě uvedených než ji poskytuje Riemannova představa, dle níž se každé větvi n-značné funkce přisuzuje samostatná rovina xy. Oblouky AA, pp na jednoduché uzavřené rovině xy jsou na Riemannově ploše otevřeny; integrálům $\int_A^A Z\,dz$, $\int_p^p Z\,dz$ odpovídají dvě různé otevřené křivky na ploše Riemannově; konečně jest posledně uvedený, kol křivky $m$krát vzatý integrál na Riemannově ploše uzavřen.

3. Značiž Z_C hodnotu, jíž Z dosáhne v bodě C, jestliže jsme vyšli v bodě A od hodnoty Z_A, cestou I se ubírajíce; Z'_A značiž hodnotu, k níž dospějeme cestou AICIIA, Z''_A, ko-

nečně onu, v niž přejde Z_C cestou III končící v A (obr. 1.). Z řečeného jde: Integrál AICIIA, v němž Z v bodě A od hodnoty Z_A vychází, jest roven integrálu AICIIIA, kdež se v A od hodnoty Z_A vychází, rozmnoženému o integrál AIIICIIA,



Obr. 1.

kdež se v A vychází od hodnoty Z''_A. Co zde řečeno, jest jasno dle definice určitého integrálu, neboť v tomto případě se v uvedeném součtu integrálů AICIIIA + AIIICIIA, příspěvky cesty AC zruší, a ostatek se doplní v integrál, stojící na levé straně rovnice.

Z toho plyne věta:

Integrál hlavní křivky AICIIA s hodnotou východiště Z_A **nerovná** se součtu integrálů parciálných křivek AICIIIA a AIIICIIA, vyjdeme-li vždy z téhož místa A *od téže hodnoty* Z_A.

Avšak rovnost řečených výrazů nabývá platnosti tenkráte, je-li Z funkcí jednoznačnou nebo — pro nedostatek bodů rozvětvení uvnitř čáry uzavřené — funkcí podmínečně jednoznačnou.

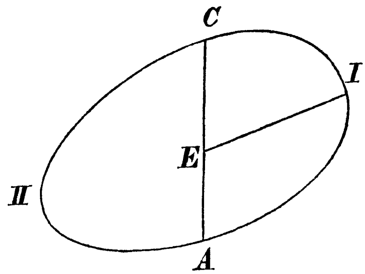
V tomto případě, a jen v tomto případě, jejž předpokládati chceme, jest mimo to každý integrál na poloze mezí nezávislým. Z toho jde vzhledem k obrazci 2. relace

$$\text{AICEA} = \text{ICEAI} = \text{ICEI} + \text{IEAI}.$$

4. Takto soudíce shledáváme, je-li Z funkcí jednoznač-

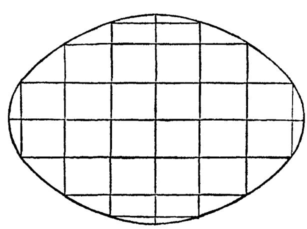
nou nebo podmínečně jednoznačnou, že integrál AICIIA jest roven součtu v stejném směru vzatých integrálů

AECIIA + ICEI + IEAI.



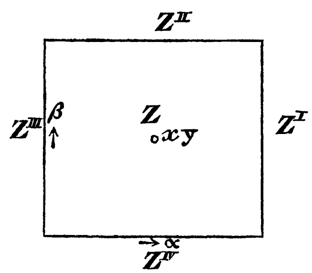
Obr. 2.

Každý z těchto parciálných integrálů jest vzat kol uzavřené křivky, každý jest na poloze dolní meze nezávislý, a v každém jest hodnotou východiště (dolní meze) ona hodnota Z, k níž dospějeme, jestliže v A vyjdeme od hodnoty Z_A a cestou zcela libovolnou se ubíráme k dolní mezi řečeného integrálu. Že v tom ohledu, držíme-li se nitra křivky AICIIA cesta jest lhostejnou, plyne z podmínky, že uvnitř téže křivky jest Z funkcí jednoznačnou nebo podmínečně jednoznačnou. Takto soudíce, můžeme si vnitřek uzavřené křivky vyplniti sítí, jejíž nekonečně malá



Obr. 3.

oka tvoří integrační kontury nekonečně velikého počtu integrálův, jichž součet dohromady jest dle předešlého roven integrálu kol křivky hlavní. Volme za oka pravoúhelníky o rozměrech nekonečně malých (obr. 3.). Pak lze integrace kol ok, jež podél obvodu položena jsou, a tvaru pravoúhelníka nemají, prostě vynechati; jsoutě v infinitesimální minoritě proti okům pravoúhelníkovým. Podobným obratem lze podle Ampèra dokázati, že účinek proudu uzavřeného možno nahraditi účinkem proudů, jež probíhají obvody jednotlivých ok sítě. Integrál kol kontury jednoho oka, jehož střed má koordinaty x, y a jehož strany mají délky α, β, lze snadno napsati (obr. 4.).



Obr. 4.

Z obrazce 4. patrno, že $\int Zdz$ kol kontury obdélníka čili

$$\int Z\left(\frac{dx}{ds}+i\,\frac{dy}{ds}\right)ds$$

přejde v součet

$$(Z^{IV}-Z'')\,\alpha+\beta i\,(Z'-Z''').$$

Je-li Z funkcí spojitou, t. j. není-li $\frac{dZ}{dz}$ nekonečným, lze

místo $Z''-Z^{IV}$ psáti $\beta\,.\,\frac{\partial Z}{\partial y}$

a místo $Z'-Z'''$ psáti $\alpha\,.\,\frac{\partial Z}{\partial x}$,

tak že nahradíme-li α i β značkami dx resp. dy, platí

$$\int Z\,.\,dz=\int\int dx\,.\,dy\left(i\,\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right).$$

Dle podmínky jest Z v obvodu křivky funkcí jednoznačnou, nebo takřka jednoznačnou, tedy zajisté funkcí polohy

$$Z = f(z) = f(x + iy),$$

z čehož

$$i \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

a konečně věta Cauchyho:

$$\int Z dz = 0.$$

Přehlédneme-li všechny vývody, shledáme, že podmínky jednoznačnosti a spojitosti zřejmě vystupují. Prvá podmiňuje možnost nahraditi integraci kol hlavní kontury integracemi kol kontur jednotlivých ok sítě; druhá jeví se nezbytnou, má-li se difference dvou hodnot Z vyjádřiti poměrem differenciálním.

Uzavřená křivka, o níž dosud byla řeč, jest uzavřenou na jednoduché rovině xy. Vztahuje-li se integrační cesta na m oběhů shora uvedených, kteréž cyklus definují, jest integrál $\int Z dz = 0$, kdykoliv součet tam se naskytujících m hodnot

$$Z_{p-1} + Z'_{p-1} + Z^{(m-1)}_{p-1}$$

není uvnitř křivky tím rozpojitý, že jeden z differenc. poměrů se stane nekonečným. To dostačí, neboť součet onen jest bez toho jednoznačným. Tím jest rozšířena platnost Cauchyho věty na křivku, jež jest na Riemannově ploše uzavřenou.

Jádro úvahy, již tímto ukončuji, spatřuji v důrazném vytčení okolnosti, že integrál $\int Z dz$, vzatý kol uzavřené křivky v prosté rovině, jest mimo jiné i funkcí meze, není-li právě Z funkcí jednoznačnou nebo podmínečně jednoznačnou. Jen tehdy lze mluviti o integrálu kol křivky vůbec, bez dodatku dalšího. Co pověděno, platí všeobecněji pro integrál

$$\int (P dx + Q dy + R dz),$$

znamenají-li P, Q, R libovolné funkce veličin x, y, z; jen tehdy, je-li P, Q, R jednoznačným, má integrál vzatý kol uzavřené křivky prostorové bez dalšího dodatku určitý smysl, a jen tehdy platí známá relace Stokesova, pomocí které řečený integrál nahraditi lze integrálem plošným.