J. Bezděk

O číslech spřízněných a dokonalých. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 2, 129--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123315

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky

O číslech spřízněných a dokonalých.

Pro studující středních škol dle *Eulera* napsal

Josef Bezdíček,
posluchač filosofie v Praze.

Národové starověku, zejména pak Řekové, přikládali jednotlivým číslům zvláštní význam mystický. Od nich pak rozšířil se, abych tak řekl, kultus některých čísel mezi národy ostatní, takže pak snadno lze pochopiti, jak na př. u Židů v Palaestině číslo 7 a číslo 3 došlo tak veliké obliby. Byla to v Řecku škola Pythagorejská, která svůj filosofický systém založila právě na číslech. Každá věc, každý předmět měl svoje určité číslo; původ světa vykládali čísly, vůbec číslo bylo základem jejich nauky filosofické. Čísla tato pak dle různých vlastností také rozlišovali. Tak na př. dle toho, byl-li součet jednotlivých dílů nějakého čísla větší, rovný aneb menší než číslo samo, dělili čísla na 3 druhy, jež nazývaly se: *ἀριθμοὶ ὑπερτέλειοι*, *ἀριθμοὶ τέλειοι* a *ἀριθμοὶ ἐλλιπεῖς*. Český význam jejich jest asi: čísla *nadbytková, dokonalá a nedostatková.*

Čísla dokonalá, o nichž míním pojednati, jsou tedy ta, která rovnají se součtu svých vlastních dílů. Na př. číslo 6 má tyto díly:

1 šestina	1
1 třetina	2
1 polovina	3
součet . .	6.

Jiným druhem, o němž také chceme pojednati, byla čísla spřízněná, jež utvořena jsou tak, že součet jednotlivých dílů čísla jednoho roven jest číslu druhému a naopak součet dílů čísla druhého rovná se číslu prvému.

Velmi zajímavo jest zvěděti, jaký význam mystický byl přikládán takovýmto číslům. Pythagoras sám, když se ho tázali, co jest přítel, prý odpověděl: „Ten, jehož poměr ke mně jest takový jako 220 ku 284.“ Čísla tato jsou nejmenším párem čísla spřízněných.

Avšak nejen v přátelství, nýbrž i v lásce tato čísla měla svůj význam, zvláště u Arabů. V mystickém spise o účelu mudrcově arabský učenec Abû'l Kâsim Maslama ibn Ahmed Almadschriti z Madridu († 1007) uvádí předpis, aby ten, kdo lásku druhé osoby chce získati, napsal číslo 220 a 284, menší dal té osobě pojísti, větší pak aby snědl sám. Spisovatel prý sám zkusil erotický účinek na sobě samém. Jiný arabský učenec, Ibn Chaldûn (1332—1406), vypravuje o podivuhodných silách těchto čísel, užívaných jako talismanův.

Čísla dokonalá byla pak vždy symbolem dokonalosti tělesní i duševní. V Egyptě na př. známo bylo číslo 6 jakožto dokonalé asi v prvé polovici V. století po Kristu. Poněvadž prý čtvrtý prst ohnut představoval číslo 6, nazýván byl dokonalým a měl přednost tu před jinými prsty, že mohl nositi prsten. Zvlášť zajímavě líčen jest význam čísla dokonalého v spise Bungeově „Numerorum mysteria“ (1618), na nějž tuto poukazujeme.

I. Čísla spřízněná.

Znamenáme-li značkou $\int N$ součet dělitelů čísla N, bude $\int N - N$ součet dílů jednotlivých čísla N. Na př. $N = 8$;

$$\int N = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$
$$\int N - N = 15 - 8 = 7 = 1 + 2 + 4.$$

Poněvadž u čísel spřízněných součet dílů čísla jednoho rovná se druhému a naopak, bude podmínkou pro čísla spřízněná

$$\int N - N = M$$

a

$$\int M - M = N$$

aneb

$$\int M = \int N = M + N.$$

Tím hledání čísel spřízněných redukuje se tak, že nyní hledají se dvě čísla, která mají stejný součet svých dílův, kterýžto součet rovná se součtu čísel obou.

Samo sebou se rozumí, že čísla kmenná nemohou býti spřízněnými ani naopak.

Čísla spřízněná skládají se obyčejně z nějakého společného faktoru a pak z jednotlivých čísel kmenných. Nejvíce známy jsou tyto formy čísel spřízněných:

$M = a \cdot p \cdot q$	$M = a \cdot p \cdot q$	$M = a \cdot p \cdot q \cdot r$	$M = a \cdot p \cdot q \cdot r$
$N = a \cdot r$	$N = a \cdot r \cdot s$	$N = a \cdot s \cdot t$	$N = a \cdot s \cdot t \cdot u$

a t. d.,

znamená-li a, jak již řečeno, společný faktor; p, q, r, s, t, u jsou čísla kmenná.

Nelze ovšem tvrditi, že by těmito formami byly všechny formy čísel spřízněných vyčerpány, neboť počet čísel těchto jest nekonečný.

A. *Prvá forma.*

$$M = a \cdot p \cdot q, \quad N = a \cdot r.$$

Prvou podmínkou spřízněnosti jest, aby

$$\int M = \int N \quad \text{aneb} \quad \int a \cdot p \cdot q = \int a \cdot r.$$

Z nauky o číslech jest známo, že

$$\int a \cdot p \cdot q = \int a \cdot \int p \cdot \int q.$$

Možno tedy onu podmínku napsati

$$\int a \cdot \int p \cdot \int q = \int a \cdot \int r$$

a krátíme-li, bude

$$\int p \cdot \int q = \int r.$$

Poněvadž p, q, r jsou čísla kmenná, platí, že

$$\int p = p + 1, \quad \int q = q + 1, \quad \int r = r + 1,$$

tedy

$$(p + 1)(q + 1) = r + 1.$$

Učiňme

$$\int p = p + 1 = x \quad \text{aneb} \quad p = x - 1,$$
$$\int q = q + 1 = y \quad \text{aneb} \quad q = y - 1,$$

tu bude

$$xy = r + 1 \quad \text{aneb} \quad r = xy - 1.$$

Budou tedy čísla spřízněná

$$\mathrm{M} = a\,(x - 1)\,(y - 1) \quad \text{a} \quad \mathrm{N} = a\,(xy - 1).$$

Druhou podmínkou spřízněnosti čísel jest, aby

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} = \int \mathrm{M},$$

aneb
$$a\,(2xy - x - y) = \int a \int p \int q$$
čili
$$a\,(2xy - x - y) = xy \int a.$$

Z této rovnice vypočteme

$$y = \frac{ax}{(2a - \int a)\,x - a}.$$

Učiňme

$$\frac{a}{2a - \int a} = \frac{b}{c},$$

bude pak

$$y = \frac{bx}{cx - b}.$$

Znásobíme číslem c,

$$cy = \frac{bcx}{cx - b} = b + \frac{b^2}{cx - b} \quad \text{aneb} \quad (cy - b)\,(cx - b) = b^2.$$

Rovnice tato jest základní rovnicí čísel spřízněných. Jsou-li tudíž $(cy - b)$ a $(cx - b)$ faktory čísla b^2, musíme toto číslo v takové činitele rozložiti, aby x a y bylo celistvé a $x - 1$, $y - 1$, $xy - 1$ byla čísla kmenná. Kde podobný process jest možný, tam nalezneme čísla spřízněná.

I. Budiž společný faktor $a = 2^n$.

Z toho $\quad \int a = 2^{n+1} - 1, \quad 2a - \int a = 1$

a odtud $\quad \dfrac{a}{2a - \int a} = 2^n$, pročež $b = 2^n$, $c = 1$.

Základní rovnicí bude:

$$(x - 2^n)(y - 2^n) = 2^{2n}.$$

Učiňme $x - 2^n = 2^{n-k}$, z čehož $x = 2^{n-k} + 2^n$
a $y - 2^n = 2^{n+k}$, z čehož $y = 2^{n+k} + 2^n$.

Nyní dlužno nalézti hodnotu pro k takovou, aby

$$p = x - 1 = 2^{n-k} + 2^n - 1,$$
$$q = y - 1 = 2^{n+k} + 2^n - 1,$$
$$r = xy - 1 = 2^{2n+1} + 2^{2n+k} + 2^{2n-k} - 1$$

byla čísla kmenná.

Budiž $n - k = m$, z čehož $n = m + k$.

Dle toho bude $p = 2^m(1 + 2^k) - 1,$
$$q = 2^m(2^{2k} + 2^k) - 1,$$
$$r = 2^{2m}(2^{2k+1} + 2^{3k} + 2^k) - 1$$

a čísla spřízněná $M = 2^{m+k}[2^m(1 + 2^k) - 1][2^m(2^{2k} + 2^k) - 1]$,
$$N = 2^{m+k}[2^{2m}(2^{2k+1} + 2^{3k} + 2^k) - 1].$$

Za k budeme klásti nyní hodnoty postupné 1, 2, 3, 4 . . .

1. Je-li $k = 1$, jest

$$p = 3 \,.\, 2^m - 1,\ q = 6 \,.\, 2^m - 1,\ r = 18 \,.\, 2^{2m} - 1,$$

tedy
$$M = 2^{m+1} p \,.\, q,$$
$$N = 2^{m+1} r.$$

Budiž α) $m = 1$, bude

$p = 3 \,.\, 2 - 1 = 5$, $q = 6 \,.\, 2 - 1 = 11$, $r = 18 \,.\, 4 - 1 = 71$.

Ježto 5, 11, 71 jsou čísla kmenná, obdržíme zde dvojici čísel spřízněných a to

$$M = 2^2 \,.\, 5 \,.\, 11 = 220,$$
$$N = 2^2 \,.\, 71 = 284.$$

Tato čísla jsou nejmenší ze všech čísel spřízněných.

β) $m = 2$, jest

$p = 3 \,.\, 4 - 1 = 11$, $q = 6 \,.\, 4 - 1 = 23$, $r = 18 \,.\, 16 - 1 = 287$.

Poněvadž $r = 287$ není číslo kmenné, neobdržíme spřízněných čísel.

γ) $m = 3$, bude

$p = 3 . 8 - 1 = 23$, $q = 6 . 8 - 1 = 47$, $r = 18 . 64 - 1 = 1151$.

Čísla tato jsou kmenná, a obdržíme tedy zde čísla spřízněná a to

$$M = 2^4 . 23 . 47 = 17296,$$
$$N = 2^4 . 1151 = 18416.$$

Z menších hodnot pro m dává $m = 6$ také dvojici spřízněných čísel

$$M = 2^7 . 191 . 383 = 9363584,$$
$$N = 2^7 . 73727 = 9437056.$$

Do větších hodnot pro m není radno se pouštěti, poněvadž pak velmi nesnadno jest rozhodnouti, zda nějaké číslo s větším počtem číslic jest kmenné čili nic.

2. Je-li $k = 2^2$, jest

$$p = 5 . 2^m - 1, \quad q = 20 . 2^m - 1, \quad r = 100 . 2^{2m} - 1.$$

Pro $k = 2$ nenalezneme čísel spřízněných, neboť volíme-li za m kteroukoliv hodnotu, bude vždy $r = 100 . 2^{2m} - 1$ dělitelno třemi a tedy ne číslo kmenné.

3. Je-li $k = 3, 4, 5$, neobdržíme pro tyto hodnoty čísel spřízněných, poněvadž p, q, r z nich povstalé nejsou prvočísla.

II. Předešlý společný faktor měl velmi vhodnou formu $a = 2^m$, neboť pak při poměru $\frac{b}{c}$ rovnalo se c jedničce, což jest velmi výhodno. Takovýto vhodný faktor jest ještě

$$a = 2^n(2^{n+1} + 2^k - 1) = 2^n f$$

s tou podmínkou, že $f = 2^{n+1} + 2^k - 1$ jest kmenné číslo. Tu pak

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a} = \frac{2^n(2^{n+1} + 2^k - 1)}{2^k}$$

aneb
$$\frac{b}{c} = 2^{n-k}(2^{n+1} + 2^k - 1),$$

při čemž $n > k$; z toho

$$b = 2^{n-k}(2^{n+1} + 2^k - 1), \quad c = 1.$$

Kdybychom rozváděli tento tvar dále, seznali bychom, že v tomto případě neobdržíme opět čísel spřízněných, a to buď že p, q, r, vyčíslíme-li je, nejsou prvočísla, aneb že jsou tak veliká, že nesnadno rozsouditi, jsou-li čísly kmennými čili nic.

III. Užijme téhož tvaru $a = 2^n(2^{n+1} + 2^k - 1)$, ale s jinou podmínkou, že $n < k$,

tu
$$\frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1} + 2^k - 1)}{2^k}.$$

Dle toho $b = 2^{n+1} + 2^k - 1$, $c = 2^{k-n}$.

Položme $k - n = m$, takže $k = m + n$,

bude tedy

$$a = 2^n(2^{n+1} + 2^{m+n} - 1),$$
$$b = 2^{n+1} + 2^{m+n} - 1 = f,$$
$$c = 2^m.$$

Dosazením obdržíme základní rovnici

$$(2^m x - b)(2^m y - b) = b^2.$$

Poněvadž $b = f$ je číslo kmenné, jest celistvé řešení možné jen toto

$$2^m x - b = 1, \text{ z čehož } x = \frac{1+b}{2^m}$$

a
$$2^m y - b = b^2, \quad \text{„} \quad y = \frac{b(1+b)}{2^m},$$

aneb
$$x = 2^n + 2^{n+1-m},$$
$$y = (2^{n+1} + 2^{m+n} - 1)(2^n + 2^{n+1-m}).$$

Z této formy obdržíme čísla spřízněná jen pod tou podmínkou, jsou-li čísla kmenná

$$f = 2^{n+1} + 2^{m+n} - 1,$$
$$p = x - 1,$$
$$q = y - 1,$$
$$r = xy - 1$$

a je-li $m < n + 1$.

1. Budiž $m = 1$,

tu $f = 2^{n+2} - 1, \quad x = 2^{n+1} \text{ a } p = 2^{n+1} - 1.$

Aby f a p byla čísla kmenná, musí jediné $n = 1$. Platí-li však $n = 1$, tu $y = 28$ a $q = 27$, což však není číslo kmenné. Pro tuto hodnotu tedy neexistují vůbec čísla spřízněná.

2. Je-li $m = 2$, pak jest

$$
\begin{aligned}
f &= 3 \,.\, 2^{n+1} - 1, \\
p &= 3 \,.\, 2^{n-1} - 1, \\
q &= 3 \,.\, 2^{n-1}(3 \,.\, 2^{n+1} - 1) - 1, \\
r &= 9 \,.\, 2^{2n-2}(3 \,.\, 2^{n+1} - 1) - 1.
\end{aligned}
$$

Kladouce nyní za n postupně za sebou hodnoty 1, 2, 3, 4 . . . , shledáme, že jen pro $n = 2$ obdržíme dvojici čísel spřízněných

$$
\begin{aligned}
M &= 2^2 \,.\, 23 \,.\, 5 \,.\, 137 = 63020\,, \\
N &= 2^2 \,.\, 23 \,.\, 827 \quad = 76084.
\end{aligned}
$$

3. Když $m = 3, 5, 7, \ldots$ neobdržíme v tomto případu pro f neb p hodnoty čísel kmenných a tedy ani čísel spřízněných.

4. Je-li $m = 4$, bude

$$
\begin{aligned}
f &= 9 \,.\, 2^{n+1} - 1, \\
p &= 9 \,.\, 2^{n-3} - 1, \\
q &= 9 \,.\, 2^{n-3}(9 \,.\, 2^{n+1} - 1) - 1, \\
r &= 81 \,.\, 2^{2n-6}(9 \,.\, 2^{n+1} - 1) - 1
\end{aligned}
$$

a dosadíme-li za n kteroukoliv hodnotu, neobdržíme opět čísel spřízněných.

IV. Pro společný faktor a jest možno nalézti ještě jiné výhodné formy, kde c buď se rovná jedničce aneb jest mocností čísla 2.

Budiž tedy $a = 2^n(g - 1)(h - 1)$, aby však $g - 1$ a $h - 1$ byla prvočísla.

Dle toho bude $f\,a = (2^{n+1} - 1)gh$

a $$2a = 2^{n+1}gh - 2^{n+1}g - 2^{n+1}h + 2^{n+1}.$$

Z toho $2a - f\,a = gh - 2^{n+1}g - 2^{n+1}h + 2^{n+1} = d$

aneb $$(g-2^{n+1})(h-2^{n+1})=d-2^{n+1}+2^{2n+2},$$

při čemž $$\frac{b}{c}=\frac{a}{d}.$$

Číslo $d-2^{n+1}+2^{2n+2}$ rozloží se ve dva faktory, tak aby, jak dříve podmínka byla dána, $g-1$ a $h-1$ byla prvočísla.

1. Je-li $n=1$,

$$(g-4)(h-4)=d+12.$$

α) Budiž $d=4$, jest $(g-4)(h-4)=16=2.8$

a z toho $g=6$, $h=12$, $a=2.5.11$, $\frac{b}{c}=\frac{2.5.11}{4}=\frac{5.11}{2}$

$$b=5.11=55,\ c=2.$$

Základní rovnice čísel spřízněných bude nyní

$$(2x-55)(2y-55)=55^2.$$

Ať rozložíme 55^2 v kterékoliv faktory, neobdržíme čísel spřízněných z příčin, které jsou totožné s předešlými.

Taktéž stane se pro $d=8$, 16 atd.

2. Je-li $n=2$,

$$(g-8)(h-8)=d+56.$$

α) Budiž $d=4$, jest $(g-8)(h-8)=60=6.10$.

Odtud $g=14$, $h=18$, $a=4.13.17$, $b=13.17$, $c=1$.

Základní rovnice bude $(x-221)(y-221)=221^2$.

V tomto případě obdržíme dvojici čísel spřízněných, rozložíce 221^2 ve faktory 169.289. Jest totiž

$$p=x-1=389,$$
$$q=y-1=509,$$
$$r=xy-1=198899,$$

jsou-li p, q, r prvočísla; budou tedy čísla spřízněná

$$M=2^2.13.17.389.509=175032884,$$
$$N=2^2.13.17.198899=175826716.$$

Pro další hodnoty d vycházejí čísla velmi veliká, že nelze o nich rozhodovati, jsou-li kmenná čili nic.

V. Společný faktor a může míti ještě rozmanitou formu Na př.

1. $a = 3^2 . 5 . 13$,

$\int a = 13 . 6 . 14$, $2a - \int a = 6 . 13$, $b = 15$, $c = 2$.

Základní rovnice bude

$$(2x - 15)(2y - 15) = 225$$

a čísla spřízněná

$$M = 3^2 . 5 . 13 . 11 . 19 = 122265,$$
$$N = 3^2 . 5 . 13 . 239 = 139815.$$

2. Když $a = 3^2 . 7 . 13$,

$\int a = 13 . 3 . 19 . 14$, $2a - \int a = 4 . 3 . 7 . 13$, $b = 9$, $c = 2$

tu základní rovnice jest $(2x - 9)(2y - 9) = 81$.

Čísla spřízněná jsou

$$M = 3^2 . 7 . 13 . 5 . 17 = 69615,$$
$$N = 3^2 . 7 . 13 . 107 = 87633.$$

3. Je-li $a = 3^2 . 7^2 . 13$,

$\int a = 2 . 3 . 7 . 13$, $2a - \int a = 4 . 3 . 7 . 13$, $b = 21$, $c = 4$

tu základní rovnice jest $(4x - 21)(4y - 21) = 441$.

Čísla spřízněná pak

$$M = 3^2 . 7^2 . 13 . 5 . 41 = 1175265,$$
$$N = 3^2 . 7^2 . 13 . 251 = 1438983.$$

4. Je-li $a = 3^2 . 5 . 13 . 19$, $\int a = 16 . 3 . 5 . 7 . 13$,
$2a - \int a = 112 . 3 . 5 . 13$, $b = 57$, $c = 2$,

pak základní rovnice bude

$$(2x - 57)(2y - 57) = 3249.$$

Čísla spřízněna jsou

$$M = 3^2 . 5 . 13 . 39 . 29 . 569 = 183408615,$$
$$N = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 17099 = 190055385.$$

5. Když $a = 3^2 . 7^2 . 13 . 19$, $\int a = 3 . 5 . 7 . 8 . 13 . 19$,
$2a - \int a = 2 . 3 . 7 . 13 . 19$, $b = 21$, $c = 2$,

jest základní rovnice $(2x - 21)(2y - 21) = 441$.

Zde neobdržíme čísel spřízněných, poněvadž

$$p = x - 1 = 13,$$

jest již obsaženo v a.

6. Pro a bylo by lze mnoho jiných hodnot zkoušeti, z nichž alespoň některé by vedly k cíli jako na př. ještě v těchto případech:

$$M = 3^2 . 5 . 7 . 53 . 1889 = 31536855,$$
$$N = 3^2 . 5 . 7 . 102059 = 32148585;$$
$$M = 3^2 . 5 . 19 . 37 . 7 . 887 = 196421715,$$
$$N = 3^2 . 5 . 19 . 37 . 7103 = 224703405;$$
$$M = 3^4 . 5 . 11 . 29 . 89 = 11498355,$$
$$N = 3^4 . 5 . 11 . 2699 = 12024045.$$

B. *Druhá forma.*

$$M = a . p . q, \qquad N = a . r . s.$$

Podmínkou čísel spřízněných jest, aby

$$\int a \int p \int q = \int a \int r \int s$$

a krátíme-li a dosadíme-li za součet příslušné hodnoty, bude

$$(p + 1)(q + 1) = (r + 1)(s + 1).$$

Učiňme účelně

$$(p + 1)(q + 1) = (r + 1)(s + 1) = \alpha\beta xy.$$

Položme nyní

$$p + 1 = \alpha x, \quad q + 1 = \beta y, \quad r + 1 = \beta x, \quad c + 1 = \alpha y,$$

obdržíme

$$p = \alpha x - 1, \quad q = \beta y - 1, \quad r = \beta x - 1, \quad s = \alpha y - 1.$$

Zřejmo jest, že čísla α, β, x, y musí býti tak konstruována, aby p, q, r, s byla prvočísla.

Spřízněná čísla budou pak

$$M = a(\alpha x - 1)(\beta y - 1),$$
$$N = a(\beta x - 1)(\alpha y - 1).$$

Z povahy čísel spřízněných vychází, že

$$\alpha\beta xy\int a = a(\alpha x - 1)(\beta y - 1) + a(\beta x - 1)(\alpha y - 1).$$

Poněvadž
$$\frac{b}{e} = \frac{a}{2a - \int a}$$
čili
$$\int a : a = (2b - c) : b,$$
bude též

$$2b\alpha\beta xy - c\alpha\beta xy = 2b\alpha\beta xy - b\alpha x - b\beta y + 2b - b\beta x - b\alpha y$$
aneb
$$c\alpha\beta xy = b(\alpha + \beta)(x + y) - 2b.$$

Znásobme celou rovnici číslem $c\alpha\beta$,

$$c^2\alpha^2\beta^2 xy = bc\alpha\beta(\alpha + \beta)(x + y) - 2bc\alpha\beta.$$

Upravíme a na obou stranách připočteme $b^2(\alpha + \beta)^2$; tím obdržíme základní rovnici čísel spřízněných této formy:

$$[c\alpha\beta x - b(\alpha + \beta)][c\alpha\beta y - b(\alpha + \beta)] = b^2(\alpha + \beta)^2 - 2bc\alpha\beta.$$

Lze-li pravou stranu rozložiti ve dva celistvé faktory P a Q tak, aby x a y byla čísla celá a aby p, q, r, s byla čísla kmenná a kromě toho, aby žádné z nich v sobě neobsahovalo společný faktor a, tu možno očekávati, že obdržíme čísla spřízněná. Bude pak

$$p = \frac{P + b\alpha + (b - c)\beta}{c\beta},$$
$$q = \frac{Q + b\beta + (b - c)\alpha}{c\alpha},$$
$$r = \frac{P + b\beta + (b - c)\alpha}{c\beta},$$
$$s = \frac{Q + b\alpha + (b - c)\beta}{c\alpha}.$$

Uvedeme jen některé případy:

1. Buďtež $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $a = 2^2$,
dle toho $b = 4$, $c = 1$, $PQ = 232$,

$$p = \frac{P + 16}{3} - 1, \quad q = Q + 16 - 1, \quad r = P + 16 - 1,$$
$$s = \frac{Q + 16}{3} - 1.$$

Nejvýhodnější řešení bude, když $P = 2$ a $Q = 116$.

Tu pak

$$p = 5, \quad q = 131, \quad r = 17, \quad s = 43.$$

Čísla spřízněná jsou

$$M = 2^2 . 5 . 131 = 2620,$$
$$N = 2^2 . 17 . 43 = 2924.$$

Učiníme-li $P = 8$, bude Q číslo liché a tím q sudé a zároveň ne prvočíslo. V tomto případě neobdržíme čísel spřízněných.

2. Budiž opět

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \text{ ale } a = 2^8.$$

Dle toho

$$b = 2^8, \quad c = 1, \quad PQ = 1047340,$$

$$p = \frac{P + 1024}{3} - 1, \quad q = Q + 1024 - 1, \quad r = P + 1024 - 1,$$
$$s = \frac{Q + 1024}{3} - 1.$$

Pro hodnoty $P = 128$ a $Q = 8180$ obdržíme čísla spřízněná

$$M = 2^8 . 383 . 9203 = 902335744,$$
$$N = 2^8 . 1151 . 3067 = 903709952.$$

3. Budiž

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad a = 3^2 . 5 . 13,$$

takže

$$b = 15, \quad c = 2, \quad PQ = 5265,$$

$$p = \frac{P + 75}{6} - 1, \quad q = \frac{Q + 75}{4} - 1, \quad r = \frac{P + 75}{4} - 1,$$
$$s = \frac{Q + 75}{6} - 1.$$

Volme

$$P = 45, \quad Q = 117.$$

Tím obdržíme novou dvojici čísel spřízněných

$$M = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 47 = 522405,$$
$$N = 3^2 . 5 . 13 . 29 . 31 = 525915.$$

4. Budiž

$$\alpha = 1, \quad \beta = 4, \quad a = 3^3 . 5,$$

takže

$$b = 9, \quad c = 2, \quad PQ = 1881,$$

$$p = \frac{P+45}{8} - 1, \quad q = \frac{Q+45}{2} - 1, \quad r = \frac{P+45}{2} - 1,$$

$$s = \frac{Q+45}{8} - 1.$$

Volme

$$P = 19, \quad Q = 99.$$

Čísla spřízněná budou

$$M = 3^3 . 5 . \ 7 . 71 = 67095,$$
$$N = 3^3 . 5 . 31 . 17 = 71145.$$

Methoda tato jest hlavně pro vyhledávání vhodného α, β, P, Q příliš rozvláčná, avšak lze jí dosti velký počet čísel spřízněných obdržeti. Tak mimo uvedená ještě na př.

$$M = 2^3 . 17 . 79 = 10744$$
$$N = 2^3 . 23 . 59 = 10856;$$
$$M = 2^4 . 23 . 1367 = 503056$$
$$N = 2^4 . 53 . \ 607 = 514736.$$

(Dokončení.)