Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hromádko

Ukázky z Diofanta. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 2, 143--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123312

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1896

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Ukázky z Diofanta.

Žákům středních škol podává

Fr. Hromádko,
professor v Praze.

(Dokončení.)

17. Vyhledati čtyři čísla (té vlastnosti), by po třech spolu vždy složená tvořila určitá čísla.

Řešení podobné jako u předešlé úlohy. Buďtež dané součty 20, 27, 24 a 22, pak jest $x = 9$, $y = 7$ $z = 4$ a $u = 11$.

18. Nalézti tři čísla (toho druhu), aby každé dva jejich součty po dvou převyšovaly číslo ostatní o daná čísla.

Řešení vede na soustavu rovnic:

$$x + y - a = z \tag{1}$$
$$x + z - b = y \tag{2}$$
$$y + z - c = x, \tag{3}$$
$$a = 20,\ b = 30,\ c = 40.$$

Všeobecně:

$$x = \frac{a + b}{2} = 25, \quad y = \frac{a + c}{2} = 30 \quad \text{a} \quad z = \frac{b + c}{2} = 35.$$

19. Vyhledati čtyři čísla toho druhu, aby vždy tři a tři spolu sečtená převyšovala číslo ostatní (čtvrté) o určité číslo.

Řešení srovnává se s úlohou 18.

20. Určité číslo rozložiti ve tři jiná čísla tak, aby každé z krajních, přiberouc k sobě číslo prostřední, bylo k druhému krajnímu v určitém poměru.

Řešení. Budiž určité číslo $= a = 100$, tedy:

$$x + y + z = a = 100 \tag{1}$$
$$\frac{x + y}{z} = m = 3 \tag{2}$$
$$\frac{z + y}{x} = n = 4, \tag{3}$$

z čehož:

$$z = \frac{a}{m + 1} = \frac{100}{4} = 25$$
$$x = \frac{a}{n + 1} = \frac{100}{5} = 20$$
$$y = a - (x + z) = 100 - 45 = 55.$$

Úlohy neurčité z knihy druhé.

1. Vyhledati dvě čísla té vlastnosti, aby jejich součet k součtu jejich čtverců byl v určitém poměru.

Řešení. Vede na rovnici všeobecnou $\frac{x+y}{x^2+y^2}=p$. U Diofanta jest $p=\frac{1}{10}$.

Diofantus klade menší číslo $= x$ a větší zcela libovolně $2x$, čímž rovnice hořejší se stává určitou a $x=6$, $y=2x=12$, ač všeobecně

$$y=mx,\quad x=10\,.\,\frac{m+1}{m^2+1}\quad \text{a}\quad p=\frac{1}{10}.$$

tedy na př. pro $m=3$, $x=4$, $y=12$ atd.

2. Vyhledati dvě čísla taková, aby jejich nadbytek byl k nadbytku jejich čtverců v daném poměru.

Řešení. Dle našeho způsobu:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2}=q \text{ čili } \frac{1}{x+y}=q=\frac{1}{6} \text{ u Diofanta,}$$

z čehož:

$$x+y=6 \text{ a ježto } x>y,\ x=5,\ 4$$
$$y=1,\ 2.$$

3. Vyhledati dvě čísla, aby jejich součin byl k jejich součtu (rozdílu) v určitém poměru.

Řešení. Všeobecně vyjádřená:

$$\frac{xy}{x\pm y}=p, \text{ u Diafonta } p=6.$$

Pro $x+y$ ve jmenovateli jest:

$$x=\frac{py}{y-p}.$$

Jest-li p prvočíslo, postav $y - p = 1$ čili

$$y = p + 1 = 7 \quad \text{a} \quad x = p(p+1) = 42.$$

Jestli p číslo složené, rozlož je v prvočísla atd.

4. Vyhledati dvě čísla toho druhu, aby součet jejich čverců byl k rozdílu těchto čísel v daném poměru t. j.

$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = p$. Budiž $x = my$ atd.; $m > 1$ u Diofanta jest $p = 6$,

z čehož $\quad y = \frac{m+1}{m^2+1} p \quad$ a $\quad x = \frac{m+1}{m^2+1} mp.$

5. Vyhledati taková dvě čísla, by rozdíl jejich čtverců byl k součtu obou v poměru daném.

Řešení. Dle úlohy jest;

$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = m$, což vede na rovnici: $d = x - y = m$, kde $x > y$.

7. Vyhledati taková dvě čísla, by rozdíl jich čtverců převyšoval několikanásobný jejich jednoduchý rozdíl o dané číslo.

Řešení. Všeobecně:

$x^2 - y^2 - a(x - y) = b$. U Diofanta $a = 3$, $d = x - y = 2$, $b = 10$.

Vede na soustavu rovnic:

$$(1) \qquad x + y = \frac{ad + b}{d}$$

$$(2) \qquad x - y = d,$$

z čehož snadno x a y vypočítati.

8. Daný čtverec rozložiti ve dva jiné čtverce.

Řešení. Dejme tomu, že jest 16 rozložiti ve dva čtverce.

Budiž první $= x^2$. pročež druhý $= 16 - x^2$ a dle požadavku čtverec. Čtverec tento sestavím z několikanásobného x zmenšeného o kořen ze 16. Budiž jeho (strana) $= 2x - 4$, tedy

$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$, z čehož $x = \frac{16}{5}$.

Je tudíž jeden čtverec $\frac{256}{25}$ a druhý $\frac{144}{25}$ a oba dohro- $\frac{400}{25} = 16$.

9. Dané číslo, které se skládá ze dvou čtverců, rozebrati ve dva jiné čtverce.

Řešení. Dané číslo budiž $13 = 2^2 + 3^2$. Ať se vezmou z daných čtverců kořeny 2 a 3 a kořeny hledaných čtverců ať se položí, jeden $x + 2$ a druhý $2x - 3$, pročež:

$$x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 12x + 9 = 13$$

čili

$$5x^2 - 8x = 0,$$

z čehož $x = \frac{8}{5}$, pročež

$$x + 2 = \frac{18}{5},$$

$$2x - 3 = \frac{1}{5}$$

a

$$2^2 + 3^2 = 13 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2,$$

odkud též

$$10^2 + 15^2 = 18^2 + 1^2.$$

10. Vyhledati dvě čísla čtverce s daným nadbytkem.

Řešení. Učiňme, že nadbytek ten je třeba $= 60$.

Budiž kořen jednoho čtverce $= x$ a druhého x a ještě několik jednotek, ovšem jen tolik, aby jejich čtverec nedostoupil daného nadbytku, tedy na př. $x + 3$.

I bude:

$$(x + 3)^2 - x^2 = 60,$$

odkud:

$$x = 8\frac{1}{2} \text{ a } x + 3 = 11\frac{1}{2}.$$

Čtverce pak: $72\frac{1}{4}$ a $132\frac{1}{4}$ a zřejmá tu pravda úlohy.

11. Dvěma daným číslům přidati jedno a totéž číslo a způsobiti, aby každé z nich bylo čtverec.

Řešení. Buďtež dána čísla 2 a 3, k nimž přidati jest x. Budou tudíž $2 + x$ a $3 + x$ se rovnati čtvercům, kterážto podoba rovnic slove rovnice *dvojitá*.

Patře na rozdíl obou čtverců, shledáš jej $= 1$; hledej dvě čísla, jichž součin se rovná tomuto rozdílu. Taková jsou: 4 a $\frac{1}{4}$.

Čtverec polovičního jejich rozdílu $\left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64} = x + 2$

a " " " součtu $\left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{289}{64} = x + 3$,

pak z každé jest $x = \frac{97}{64}$, což dlužno přidati ku 2 a 3 a zřejmá tu pravdivost položky.

12. K poznání zvláštních obratův, jichž Diofantus při svých výpočtech užívá, stůj zde řešení úlohy 15. knihy IV.

Úloha zní:

Vyhledati tři čísla té vlastnosti, by součiny součtů každých dvou s třetím se rovnaly číslům daným.

a) Řešení dle nynějšího způsobu:

Buďtež hledaná čísla x, y a z, tedy jest dle úlohy:

(1) $(x + y)\, z = 35,$

(2) $(y + z)\, x = 27,$

(3) $(x + z)\, y = 32.$

Provede-li se naznačené násobení a sečteme-li všecky tři rovnice, obdržíme:

$$2xy + 2xz + 2yz = 94$$

a dvěma krátíce:

(4) $xy + xz + yz = 47.$

Odečteme-li posloupně rovnice (1), (2) a (3) od rovnice (4), obdržíme rovnice

(5) $xy = 12,$

(6) $yz = 20,$

(7) $xz = 15.$

Dělíme-li součin těchto tří rovnic:

$$x^2y^2z^2 = 12 \,.\, 20 \,.\, 15$$

zdvojmocněnými rovnicemi (5), (6) a (7), obdržíme snadno

$$z^2 = 25 \quad \text{čili} \quad z = \pm 5, \quad y = \pm 4, \quad x = \pm 3.$$

b) Řešení *Diofantovo*:

Značí-li z třetí z hledaných čísel, tedy je součet prvních dvou: $x + y = \frac{35}{z}$, což lze psáti také $\frac{10}{z} + \frac{25}{z} = x + y$.

Z rovnic (2) a (3) jde:

$$(2') \qquad \left(z + \frac{25}{z}\right)\frac{10}{z} = 10 + \frac{250}{z^2},$$

$$(3') \qquad \left(z + \frac{10}{z}\right)\frac{25}{z} = 25 + \frac{250}{z^2}.$$

Rozdíl těchto rovnic (3′) — (2′) jest = 15; avšak rozdíl týchž rovnic (3) — (2) jest = 5, pročež dlužno jinak rozložiti $\frac{35}{z}$ než se stalo, totiž: $\frac{35}{z} = \frac{15}{z} + \frac{20}{z}$, a míti na zřeteli daný rozdíl rovnic (3) — (2), který se rovná 5, t. j. voliti čítatele obou zlomků tak, aby jejich rozdíl se rovnal 5, což při druhém rozkladu (20 — 15) vyplněno. Úpravou touto změní se podoby rovnic (2) a (3) (nahoře) v následující:

$$\left(\frac{20}{z} + z\right)\frac{15}{z} = \frac{300}{z^2} + 15 = 27$$

a třetí:

$$\left(\frac{15}{z} + z\right)\frac{20}{z} = \frac{300}{z^2} + 20 = 32$$

čili

$$\frac{300}{z^2} = 12,$$

nebo-li

$$z^2 = \frac{300}{12} = 25 \quad \text{a} \quad z = 5;\text{*)}$$

pročež z rovnic (6) a (7):

---

*) Čísel záporných Diofant nezná.

$$y = \frac{20}{z} = 4 \quad \text{a} \quad x = \frac{15}{z} = 3,$$

čímž platnost požadavku zřejmá.

O kutálejícím se kuželi.

Podává

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

1. Úplný přímý kužel o kruhové půdici p opisuje, kutálí-li se svým pláštěm P po rovině, plochu K kruhu o poloměru rovném straně s svého pláště.

Zdvojmocníme-li výraz pro plášť tohoto kužele

$$P^2 = r^2 s^2 \pi^2 = r^2 \pi \,.\, s^2 \pi = pK,$$

obdržíme tento vztah mezi týmiž plochami

$$P = \sqrt{pK}.$$

2. Kutálející se přímý kužel komolý opisuje svým pláštěm P mezikruží o ploše M. Znamenají-li ϱ_1 a ϱ_2 poloměry tohoto mezikruží, R a r poloměry kužele a D rozdíl obou půdic, pak $s = \varrho_1 - \varrho_2$ stranu pláště této komole, jest

$$M = (\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi,$$
$$D = (R + r)(R - r)\,\pi,$$
$$P = (R + r)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi.$$

Součinem obou prvních rovnic nabudeme

$$DM = (R + r)(R - r)(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi^2.$$

Pohybem kužele odůvodněna jest úměra

$$2\varrho_1\pi : 2\varrho_2\pi = 2R\pi : 2r\pi$$

čili

$$\varrho_1 : \varrho_2 = R : r,$$

tedy také

$$(\varrho_1 + \varrho_2) : (\varrho_1 - \varrho_2) = (R + r) : (R - r),$$

z níž následuje