Bohumil Bydžovský

Užití principu promítání v teorii geometrických příbuzností

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 11--18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123261

národní kultury, na prvém místě. Jeho zásadou, nikoli slavnostně proklamovanou, ale účinně provozovanou, bylo a jest: S největší blahovůlí vycházeti vstříc každému, u koho jest dobrá vůle vědecky pracovati. — Kdežto u některých profesorů bývalé fakulty filosofické projevovala se úzkoprsá touha po exklusivnosti a monopolu, u něho právě naopak byla snaha otevříti všechny brány vědění a vysokých škol jak studentům, tak i každému, kdo se chtěl dále vědecky vzdělávati. Je nás mnoho, kteří jsme mu v té věci povinni velikými díky. Hlavní a nejvyšší účel, který při tom sledoval, byl ten, aby matematické vědění a matematický způsob myšlení, přesnost, logická kázeň a neúchylnost co nejvíce pronikly do celé naší národní vzdělanosti. Není pochyby o tom, že pythagorejská myšlenka o číselné podstatě všeho jsoucna úžasným novodobým a nejnovějším rozmachem věd matematických a technických doznává každodenního potvrzování. Osudy národů budou čím dále tím více podmíněny tím, jak se v národech ujme kultura matematická. Národ náš postižen byl mdlobou na počátku 17. století, tedy právě v době, kdy počaly se klásti základy novodobého vědění, matematického a fysikálního, a dosud cítíme neblahé toho následky. Zaříditi školství vysoké, střední i obecné tak, aby bez nejmenší újmy opravdovému vzdělání humanitnímu dokonalá kultura matematická přivedla národ náš do jedné řady s nejpokročilejšími národy světa, k tomuto vysokému cíli míří didaktické názory Sobotkovy.

*

Les idées de M. Sobotka sur l'enseignement.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur rappelle la proposition du prof. J. Sobotka ayant pour but de compléter l'enseignement mathématique secondaire, en géométrie aussi bien qu'en arithmétique, par des exercices pratiques. De cette proposition s'est occupé le congrès international de Cambridge. Contrairement à un formalisme exclusif, les idées sur l'enseignement de M. Sobotka sont caractérisées par un réalisme réservé.

Užití principu promítání v teorii geometrických příbuzností.

Napsal *B. Bydžovský.*

Principu promítání z prostorů vyšších do prostorů nižších lze užíti vhodně m. j. i pro teorii geometrických příbuzností.[1]) K tomuto druhu aplikací uvedeného principu náleží předložený příspěvek,

[1]) V. referát *C. Segre-ův* v Enz. d. math. Wissenschaften, III 2, seš. 7. (1920).

jenž je založen na myšlénce definovati promítání přímo jednoznačnou příbuzností v příslušném prostoru.

I.

Základem všech dalších úvah je tato věta:

Budiž dána v prostoru P_n n-rozměrném algebraická varieta V_{n-1} $(n-1)$ rozměrná (nadplocha) st. m-ho s bodem $(m-1)$násobným, a lineární prostor P_{n-1} $(n-1)$-rozměrný. Zobrazení dané variety, které získáme tím, že promítáme body variety z jejího $(m-1)$-násobného bodu na tento lineární prostor, lze pokládati za výsledek Cremonovy transformace daného prostoru, v níž body sobě odpovídající leží na paprscích vedených bodem $(m-1)$-násobným.

Abychom tuto větu dokázali, zvolme bod $(m-1)$-násobný za souřadný vrchol 0_1 $(1, 0, \ldots, 0)$, prostor P_{n-1} za souřadný prostor

$$x_1 = 0.$$

Varieta V_{n-1}, mající $(m-1)$-násobný bod 0_1, má rovnici

$$x_1 f_{m-1} (x_2, \ldots, x_{n+1}) + f_m (x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \quad (1)$$

kde f_{m-1}, f_m jsou formy stupňů udaných indexem.

Budiž $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ bod variety V_{n-1}, $P' (0, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$ jeho průmět z bodu 0_1 na P_{n-1}. Pak platí zřejmě

$$x_2, : \ldots : x_{n+1} = x'_2 : \ldots x'_{n+1}$$

a rovnice (1) dává

$$x_1 f_{m-1} (x'_2 \ldots, x'_{n+1}) + f_m (x'_2, \ldots, x'_{n+1}) = 0, \quad (2)$$

čímž je určena souřadnice x_1 bodu, v němž varietu protne spojnice bodů 0_1, P'. Uvažujme příbuznost danou rovnicemi:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} = \frac{-f'_m + x'_1 g'_{m-1}}{f'_{m-1} + x'_1 g'_{m-2}} : x'_2 : \ldots : x'_{n+1}, \quad (3)$$

kde g_{m-1}, g_{m-2} jsou formy stupňů udaných indexy, a čárkování znamená, že tyto výrazy obsahují proměnné čárkované. Touto racionální transformací přejde prostor $x'_1 = 0$ skutečně ve varietu V_{n-1}, jejímž je průmětem, neboť pro $x'_1 = 0$ vedou rovnice (3) k rovnici (2) a pak k rovnici (1). Aby tato racionální transformace byla oboustranně jednoznačná, musí býti možno řešiti rovnice (3) racionálně podle x'_i, což se redukuje na požadavek, aby bylo možno řešiti racionálně podle x'_1 rovnici

$$\varrho x_1 = \frac{-f'_m + x'_1 g'_{m-1}}{f_{m-1} + x_1 g_{m-2}}. \quad (4)$$

K tomu je nutno a stačí, aby zlomek na pravé straně obsahoval x'_1 v 1. stupni, čili, aby mnohočleny g_{m-1}, g_{m-2} neobsahovaly proměnné x_1. Řešením rovnice (4) obdržíme, když dosazujeme ihned $x'_i = \varrho x_i$, pro $i = 2, \ldots, n-1$:

$$x'_1 = \varrho \frac{-f_m - x_1 f_{m-1}}{x_1 g_{m-2} - g_{m-1}}. \tag{5}$$

Vyslovíme ještě požadavek, aby příbuznost byla involutorní. Aby to nastalo, musí zlomky ve vzorcích (4) a (5) býti formálně stejné; z toho plyne

$$g_{m-1} = -f_{m-1};$$

naproti tomu je forma g_{m-2} zcela libovolná.

Je tedy konečně promítnutí variety V_{n-1} na lineární prostor P_{n-1} obsaženo v involutorní Cremonově příbuznosti dané rovnicemi:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} = -\frac{f'_m + x'_1 f'_{m-1}}{f'_{m-1} + x_1 g_{m-2}} : x'_2 : \ldots : x'_{n+1}. \tag{6}$$

Tím je zároveň dokázána obecná věta výše uvedená.

Z dokázané věty plyne tento jednoduchý princip pro odvozování příbuzností a jejich grup v lineárním prostoru P_{n-1}: budiž T nějaká (Cremonova) transformace prostoru P_n, jíž se reprodukuje varieta V_{n-1}, a nazveme C Cremonovu příbuznost právě odvozenou. Pak transformací

$$T' = CTC$$

(pamatujme, že $C^{-1} = C$) reprodukuje se prostor P_{n-1}. Ježto T' je zpravidla složitější než T, můžeme tak z jednodušších příbuzností prostoru vyššího obdržeti složitější příbuznosti prostoru nižšího. Je-li G grupa transformací T, je $G' = CGC$ grupa transformací v prostoru P_{n-1}.

II.

Užijeme předchozího obecného výsledku nejprve na případ, kdy daná varieta V_{n-1} je kvadratická. Pak f_m je forma kvadratická, pišme ji f_2; podobně $f_{m-1} = f_1$; g_{m-2} je konstanta, označme ji k. Cremonova příbuznost C je pak dána rovnicemi:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} = -\frac{f'_2 + x'_1 f'_1}{f'_1 + kx'_1} : x'_2 : \ldots : x'_{n+1}. \tag{7}$$

Je to obyčejná kvadratická inverse. Pišme ji ve tvaru

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} = -(f'_2 + x'_1 f'_1) : x'_2 (f'_1 + kx'_1) : \ldots : x'_{n+1} (f'_1 + kx'_1).$$

Hlavnímu bodu O_1 $(1, 0, \ldots 0)$ odpovídá zřejmě lineární prostor (hlavní) o rovnici

$$f_1 + kx_1 = 0.$$

Pro samodružné body inverse platí rovnice

$$x_1 = -\frac{f_2 + x_1 f_1}{f_1 + kx_1};$$

geometrické místo těchto samodružných bodů, totiž základní kvadrika inverse, má tudíž rovnici

$$kx_1^2 + 2x_1 f_1 + f_2 = 0.$$

Kužel promítající z bodu 0_1 průsek hlavního lineárního prostoru s touto kvadrikou má rovnici

$$f_1^2 - kf_2 = 0,$$

jak se snadno zjistí. To je tedy rovnice hlavního kužele kvadratického, jehož každé povrchové přímce odpovídá bod hlavního lineárního prostoru. Rovině $x_1 = 0$ odpovídá ovšem kvadratická varieta Q o rovnici:

$$f_2 + x_1 f_1 = 0.$$

Je-li K kolineace, jíž se reprodukuje kvadratická varieta Q — tyto kolineace jsou známy, v pozn. 1. — a I inverse právě nalezená, je

$$T = IKI$$

Cremonova transformace daného prostoru, obecně st. 4ého. Lineární prostor P_{n-1} se jí reprodukuje. Lineárnímu prostoru P_{n-2} obsaženému v P_{n-1} odpovídá inversí I kvadratická varieta ležící na Q; té odpovídá kolineací K opět taková varieta, jež promítnutím z bodu O_1 — t. j. opětným užitím inverse I — přejde opět ve varietu kvadratickou. Transformací T přejde tedy lineární prostor P_{n-2} a každý nižší prostor lineární obsažený v prostoru P_{n-1} v kvadratickou varietu tohoto prostoru, t. j. transformace T omezená na P_{n-1} je kvadratická (Cremonova) transformace tohoto prostoru.

Tímto způsobem vede tudíž každá grupa kolineací kvadratické variety ke grupě kvadratických transformací Cremonových lineárního prostoru o stejné dimensi.

To je jednoduchý prostředek k hledání a také ke studiu grup kvadratických transformací.

III.

Známa je zajímavá grupa 32 kolineací G_{32}, jíž se reprodukuje prostorová kvartika eliptická C_4. Každá kvadratická plocha jí položená reprodukuje se invariantní podgrupou G_8 této grupy; tato podgrupa obsahuje vedle identity tři středové a čtyři dvojosé involuce.[2]) Promítneme-li jednu tuto plochu z některého jejího bodu do roviny, promítne se prostorová kvartika v kvartiku rovinnou eliptickou o dvou dvojnásobných bodech; zároveň obdržíme v rovině, jak ihned plyne z obecného výsledku předch. odst., grupu G_8' kvadratických transformací Cremonových, jimiž se rovinná kvartika

[2]) Viz o tom na př. mou práci: „Grupa kolineací prost. křivky bikvadr. atd.“, Rozpravy Č. Akademie XVII (1908), č. 18.

eliptická reprodukuje. To je snad nejjednodušší důkaz věty známé,[3]) že obecná eliptická kvartika v rovině se reprodukuje sedmi kvadratickými transformacemi, jež s identitou tvoří grupu. Zároveň je snadno možno, odvoditi ze známých a velmi jednoduchých vlastností kolineací grupy G_8 vlastnosti příbuzností grupy G'_8; m. j. je z tohoto odvození ihned patrno, proč obě grupy G_8, G'_8 jsou isomorfní.

Prostorovou kvartikou eliptickou lze položiti šest ploch kvadratických t. zv. Voss-ových,[4]) z nichž každá se reprodukuje určitou podgrupou 16-ho stupně G_{16} grupy G_{32}. Promítneme-li jednu tuto plochu z jejího bodu na rovinu, obdržíme, opět v souhlase s obecným výsledkem předch. odst., v rovině grupu 16 kvadratických transformací, jíž se příslušná rovinná kvartika reprodukuje. Není to ovšem kvartika eliptická obecná, jak zde nemohu podrobněji vykládati.

Tím je jednak jednoduše nalezena grupa 16 kvadratických transformací v rovině, hlavně však lze velmi snadno studovati její složení podle známého složení grupy G_{16} s ní isomorfní; na př. vyplývá z tohoto srovnání ihned, že tato nová grupa vznikne z grupy G'_8 již uvedené adjunkcí kvaternárně cyklické transformace kvadratické.

Lze však tímto způsobem obdržeti a studovati grupy mnohem širší. Vraťme se k prostoru n-rozměrnému. Píšeme-li rovnici kvadratické variety tohoto prostoru ve tvaru

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0,$$

vidíme ihned, že tato varieta se reprodukuje (již dávno známou) grupou $2^n . (n+1)!$ kolineací,[5]) kterou obdržíme, když v soustavě

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}$$

měníme všemi možnými způsoby znaménka a mimo to všemi možnými způsoby permutujeme indexy. Tato grupa obsahuje podgrupu st. 2^n (změny znamének), podgrupu st. $(n+1)!$ (permutace indexů); obsahuje také cyklické grupy st. $(n+1)$-ho, které obdržíme, když některou permutaci indexů cyklicky permutujeme, neměníce znamének. Jestliže k podgrupě st. 2^n adjungujeme jednu tuto cyklickou kolineaci, obdržíme další podgrupu st. $2^n (n+1)$, atd.

Z obecné věty předchozího odst. plyne tudíž: V prostoru n-rozměrném existuje grupa kvadratických transformací Cremonových st. $2^{n+1} . (n+2)!$ Tato grupa obsahuje podgrupu st. 2^{n+1}, podgrupu st. $(n+2)!$, podgrupy cyklické st. $(n+2)$-ho, podgrupy st. $(n+2) . 2^{n+1}$, atd.

[3]) V. na př. mou práci: „Kvadratické transformace obecné rov. křivky bikvadr.“, Rozpravy Č. Akademie., XXIX, č. 17 (1920).

[4]) V. pozn. 2.

[5]) Geometricky ji studoval na př. *Barrau* v „Nieuw Archif voor Wiskunde“ 1908, str. 185.

Tím je tedy na př. v rovině nalezena grupa $2^3 . 4! = 192$ kvadratických transformací, jež má podgrupy: st. *8*-ho, což je podgrupa G'_8 dříve připomenutá; st. *24*-ho; st. *32*-ho, o níž se snadno shledá, že je isomorfní s grupou kolineací G_{32} rovněž již připomenutou, atd.

IV.

Principu promítání lze užíti také obráceně, t. j. ke studiu příbuzností v prostorech vyšších na základě příbuzností v prostorech nižších. Ukáži to na teorii prostorové kvintiky rodu *2*, t. j. rodu nejvyššího možného. Zvolme na prostorové křivce K_5 st. *5*-ho libovolný obyčejný bod O za střed inverse, libovolnou rovinu, jež jím neprochází, za hlavní rovinu této inverse. Tuto rovinu protne křivka v pěti bodech, jimiž položme kuželosečku, kterou vezmeme za hlavní kuželosečku inverse (každému jejímu bodu odpovídá jeho spojnice s bodem O). Inversí o těchto hlavních elementech přejde daná křivka v křivku stupně

$$2 . 5 - 1 - 5 = 4\text{-ho}.$$

Daná K_5 protne hlavní kužel kvadratický v jeho vrcholu a v pěti bodech hlavní roviny; vedle toho tedy ještě ve třech bodech, jimž odpovídají body hlavní kuželosečky. Protne tedy křivka K'_4, ve kterou daná kvintika přejde, hlavní kuželosečku ve třech průsečících. Tato K'_4 může býti prostorová nebo rovinná. Je-li prostorová, je obecně eliptická a taková je tedy také K_5; ten případ nechme stranou (neběží při něm o promítnutí z prostoru do roviny). Uvažujme tedy případ, že křivka K'_4 je rovinná. Pak mohou nejvýše dva její body ležeti v hlavní kuželosečce, ty totiž, v níž její rovina protne tuto kuželosečku. Aby platily tyto dva její body za tři průsečíky, jak musí býti, musí jeden z nich býti dvojnásobný. (Případ, rovněž možný, že by křivka K'_4 měla bod trojnásobný, jenž by ležel na hlavní kuželosečce, necháme rovněž stranou, ježto vede ke křivce rodu *O*.) Spojnice tohoto bodu dvojnásobného s bodem O obsahuje tudíž ještě dva body křivky K_5; i prochází bodem O jedna trisekanta křivky. Rovině křivky K'_4 odpovídá v sestrojené inversi plocha kvadratická, na které K_5 leží; trisekanta je přímka této plochy. Roviny položené touto přímkou protínají křivku ještě ve dvou bodech, jichž spojnice jsou jedna soustava přímek plochy; z toho plyne, že druhá soustava přímek se skládá z trisekant křivky. (Všechny tyto vlastnosti hypereliptické kvintiky prostorové jsou známy; bylo jen třeba je připomenouti, při čemž jsem pokládal za zajímavé ukázati, jak snadno je lze odvoditi užitím kvadratické transformace.)

Daná K_5 je křivka rodu *2*, ježto byla racionální transformací převedena v křivku rovinnou čtvrtého st. s jedním bodem dvojnásobným. Ježto pak leží na ploše kvadratické, je výsledek kvadratické transformace, jíž jsme užili, týž, jako výsledek promítnutí K_5 z jejího bodu na rovinu, a lze tedy tento případ podřaditi obecným výsledkům dřívějším.

Nazveme D dvojnásobný bod křivky K'_4. Je známo,[6]) že křivka rovinná čtvrtého st. s jedním bodem dvojnásobným se reprodukuje inversí, jejíž střed je tento bod; budiž k základní kuželosečka inverse. Lze snadno sestrojiti kvadratickou transformaci prostoru, ve které je tato rovinná inverse obsažena. Promítněme z bodu O kuželosečku k kuželem K; bodem D jako středem inverse a kuželem K jako základní plochou inverse je prostorová inverse určena; jí se křivka K'_4 reprodukuje. Nazveme tuto inversi J; inverse, jíž je nahraženo promítnutí, budiž I. **Pak křivka K_5 se reprodukuje příbuzností IJI.**

Abychom určili stupeň této příbuznosti (Cremonovy), zvolme libovolnou rovinu v prostoru a zkoumejme plochu, ve kterou se transformuje touto příbuzností. Inversí J přejde rovina v plochu kvadratickou Q procházející bodem O a obsahující hlavní kuželosečku inverse I. Na této kuželosečce, jak víme, leží také bod D. Inversí J přejde Q v plochu st. třetího, ježto Q obsahuje hlavní bod D, jemuž odpovídá hlavní rovina, totiž jeho polární rovina vzhledem ke kuželi K. Hlavní kužel inverse J je složen ze dvou rovin, totiž tečných rovin z bodu D ke kuželi K. Přímky tohoto kužele, podél nichž se tyto dvě roviny dotýkají kužele, jsou hlavní její kuželosečka (procházející ovšem bodem O). Zmíněná plocha třetího st. obsahuje tyto dvě přímky; ježto mimo to Q prochází bodem O, obsahuje plocha 3-ho st. také spojnici DO, t. j. na této ploše leží tři přímky neležící v rovině; je tedy bod O dvojnásobný bod této plochy kubické. Užitím inverse I přejde tato plocha v plochu stupně

$$2 \,.\, 3 - 2 = 4\text{-ho}.$$

Tím je dokázáno, že transformace IJI je stupně čtvrtého.

Touto transformací se daná K_5 reprodukuje, a to tak, že si odpovídají body lineárního systému g^1_2, který na ní, jakožto křivce hypereliptické, leží. Tento systém je na křivce vytínán jednou soustavou přímek kvadriky, na níž křivka leží. I můžeme vysloviti tento výsledek:

Na hypereliptické kvintice prostorové existuje jednojednoznačná korespondence, způsobená na ní jednou soustavou přímek kvadriky, která jí prochází. Tato korespondence je obsažena (nekonečně mnoha způsoby) v involutorní Cremonově transformaci stupně čtvrtého.

*

[6]) *Roberts*, Proc. London Math. Soc. 25. (1894), str. 151.

Sur l'application du principe de la projection à la théorie des correspondances géométriques.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette application est fondée sur le théorème suivant:

Étant donné dans un espace E_n à n dimensions une variété algébrique V_{n-1} à $(n-1)$ dimensions de l'ordre m, ayant un point $(m-1)$-uple, et un espace linéaire E_{n-1} (à $n-1$ dimensions), on peut considérer la représentation de la variété donnée, qu'on obtient en la projetant de son point multiple sur l'espace E_{n-1}, comme le résultat d'une transformation Cremonienne C de l'espace donné.

Si, maintenant, on connaît un groupe G de transformations (Cremoniennes) dans l'espace E_n reproduisant V_{n-1}, on en déduit un groupe $G' = CGC$ dans l'espace E_{n-1}. On peut, ainsi, étudier, en partant des transformations simples — par ex. linéaires — d'un espace, des transformations plus compliquées d'un espace à un moindre nombre de dimensions.

Si V_{n-1} est, en particulier, une quadrique, et si G est un groupe d'homographies reproduisant cette quadrique, on obtient ainsi un groupe de transformations quadratiques dans E_{n-1}. Plusieurs exemples de ces groupes sont donnés.

On peut appliquer aussi la méthode inverse; l'auteur arrive par là à une proposition concernant la correspodance sur la quintique gauche hyperelliptique.

O jedné třídě ploch zborcených.

Eduard Čech.

1. Diferenciální systém

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dz}{dx}+q(x)y+\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx}z=o,\\ &\frac{d^2z}{dx^2}+p_2(x)\frac{dy}{dx}+\left[q(x)+\frac{1}{4}\right]z+\frac{1}{2}\frac{dp_2}{dx}y=o \end{aligned}$$

definuje až na kolineace zborcenou plochu Π. Je-li totiž

$$\overset{(1)}{y},\ \overset{(1)}{z};\ \overset{(2)}{y},\ \overset{(2)}{z};\ \overset{(3)}{y},\ \overset{(3)}{z};\ \overset{(4)}{y},\ \overset{(4)}{z}$$

fundamentální systém řešení systému (1), považujme $(\overset{(1)}{y}, \overset{(2)}{y}, \overset{(3)}{y}, \overset{(4)}{y})$ za homogení souřadnice bodu P_y a $(\overset{(1)}{z}, \overset{(2)}{z}, \overset{(3)}{z}, \overset{(4)}{z})$ za homogení souřadnice bodu P_z. Přímka P_yP_z je pak tvořící přímkou plochy Π.