Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Osiřelé myšlenky mathematické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 275--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123240

Osiřelé myšlenky mathematické.

(Zaslal *Anonymus* z Uher*), z němčiny volně přeložil dr. *F. Studnička.*)

I.

V trojúhelníku rovinném, jehož úhly jsou α, β, γ, platí poučka

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha.$$

O důkaz nechť pokusí se laskavý čtenář sám; poznamenáno budiž jenom, že východištěm jest stejnina

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma).$$

Z této poučky, kteráž pouhým počtem se snadno obdrží, plyne přímo *poučka Carnotova.*

Neb dělíme-li $\sin^2\beta$ a použijeme-li známé poučky sinusové

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

obdržíme bezprostředně

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{c^2}{b^2} - 2\frac{c}{b}\cos\alpha,$$

z čehož násobením veličinou b^2 plyne obyčejný tvar, jaký obyčejně poučce jmenované se dává.

II.

Abychom řešili trinomickou rovnici

$$x^{2n} + px^n = q,$$

uveďme ji na tvar

$$x^n(x^n + p) = q$$

a použijme pak známé stejniny

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

obdržíme tu bezprostředně

$$\left(x^n + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} = q,$$

z čehož jde, odmocníme-li a převedeme-li,

$$x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

*) Nejmenovaný přítel z Uher zaslal do časopisu řadu drobotin s uvedeným nadpisem, z nichž tuto několik v překladu jest položeno.

Pro $n = 1$ obdrží se tu vzorec pro řešení rovnic kvadratických.

III.

Známe-li jeden kořen rovnice stupně třetího

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

ustanovíme ostatní dva nejjednodušeji takto:

Jsou-li kořeny a, b, c, platí o nich, jak známo,

$$a + b + c = -P,$$
$$abc = -R,$$

z čehož jde, značí-li a kořen známý,

$$b + c = -(a + P),$$
$$bc = -\frac{R}{a};$$

znajíce pak součet a součin ostatních dvou, obdržíme velmi snadno

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = -\frac{a+P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+P}{2}\right)^2 + \frac{R}{a}}.$$

Pro $P = 0$ jest pak

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{R}{a}}.$$

IV.

V mnohých případech vede k rychlému ustanovení všech kořenů rovnice stupně čtvrtého poznámka tato:

Násobíme-li dva trinomické činitele

$$(x^2 + Qx + R)(x^2 + qx + r) = 0,$$

obdržíme, pořádajíce podlé mocnin neznámé x,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

kdež zavedeno označení

$$A = Q + q,$$
$$B = R + Qq + r,$$
$$C = Rq + rQ,$$
$$D = Rr.$$

Rozložíme-li známou veličinu D v činitele a uhodneme-li z nich příslušné r, obdržíme z předcházejících stejnin snadno

$$R = \frac{D}{r},$$

$$q = \frac{C - Ar}{R - r} = \frac{Cr - Ar^2}{D - r^2},$$

$$Q = A - q = \frac{AD - Cr}{D - r^2},$$

načež řešením dvou rovnic kvadratických

$$x^2 + Qr + R = 0,$$

$$x^2 + qx + r = 0$$

si zjednáme kořeny rovnice bikvadratické; budeť tu

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - R},$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}.$$

Vyjde-li ve zvláštním případě pro q buď neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ neb ∞, není r dobře voleno; musíť vyhoviti podmínce

$$R + Qq + r = B.$$

Příklad. Abychom řešili rovnici

$$x^4 - 14x^3 + 190x^2 - 678x + 1781 = 0,$$

rozložme poslední člen v $13 . 137$ a položme

$$r = 13, \text{ tedy } R = 137;$$

podlé toho bude tedy

$$q = \frac{-678 . -(-14 . 13)}{137 - 13} = -4, \; Q = -14 + 4 = -10,$$

a poněvadž tu se vyhovuje podmínce

$$13 + 40 + 137 = 190,$$

rozloží se předložená rovnice v

$$(x^2 - 10x + 137)(x^2 - 4x + 13) = 0,$$

kdež snadno ustanovíme co kořeny

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = 5 \pm 4\sqrt{-7},$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = 2 \pm 3\sqrt{-1}.$$