Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 278--288

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123234

ÚLOHY.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 13.

(Podává dr. *F. J. Studnička.**)

Poněvadž tu obě paraboly homologickými body na sebe připadají, bude

$$x^2+y^2=r^2,$$

tedy i

$$x+yy'=r\frac{dr}{dx},$$

což když dosadíme do známých rovnic**)

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2,$$

$$\xi-x+(\eta-y)\,y'+r\frac{dr}{dx}=0,$$

vede k jednodušším rovnicím

$$\xi^2+\eta^2-2x\xi-2y\eta=0, \qquad (1)$$

$$\xi+\eta y'=0; \qquad (2)$$

vyloučíme-li tedy z těchto rovnic a z rovnice příslušné trochoidy, zde tedy z rovnice cissoidy

$$\eta^2=\frac{\xi^2}{2a-\xi}$$

veličiny ξ a η, obdržíme differenciální rovnici hledané půdice.

---

*) Úloha tato nebyla dosud řešena, ač již v 1. sešitu I. ročníku byla předložena; aby se nevedla dále, podal jsem tuto řešení sám.

**) Viz *Studnička* „Základové vyšší mathematiky.“ Díl III. pag. 83. vzorec (36) a (37).

Z rovnice (1) a (2) jde obyčejným řešením

$$\xi = -\frac{2y'(y - xy')}{1 + y'^2},$$

$$\eta = \frac{2(y - xy')}{1 + y'^2}$$

načež dosazením těchto hodnot do rovnice (3) obdržíme po krátké redukci

$$a + yy' - xy'^2 = 0, \tag{4}$$

Abychom určili integrál této rovnice, derivujme napřed podlé x, načež obdržíme

$$\frac{dy'}{dx}(y - 2xy') = 0$$

a tudíž buď

$$\frac{dy'}{dx} = 0,$$

z čehož jde $\qquad y' = C,$

neb $\quad y - 2xy' = 0, \;$ z čehož jde $y' = \frac{y}{2x}$.

Dosadíme-li první hodnotu za y' do rovnice (4), bude

$$a + Cy - C^2x = 0$$

rovnice přímky, jejíž obálkou jest hledaná půdice; derivujeme-li tedy podlé C, bude

$$y - 2Cx = 0$$

a vyloučíme-li z obou těchto rovnic proměnný parametr C, povstane

$$y^2 = -4ax$$

co rovnice obálky, kteráž tu patrně jest obyčejnou *parabolou*, jak v úloze této bylo vytknuto.

Dosadíme-li druhou hodnotu za y' do rovnice (4), obdržíme patrně tentýž výsledek, z čehož zároveň jde na jevo, že při úlohách druhu tohoto se obdrží řešení co *jednotlivý* integrál bez integrování, jakž *Magnus* již poznamenal.

Řešení úlohy 41.

(Podal *B. Bečka*, abiturient v Písku.)

Hodnota neznámé veličiny jest tu soujemná a sice

$$x = \frac{1}{2} + \frac{i}{12}\, arctg\, \sqrt{7}\,.$$

(Tutéž úlohu řešil *A. Hanzlovský*, žák VIII. tř. g. v Písku.)

Řešení úlohy 38.
(Podal *Aug. Hanzlovský.*)

Dvacátý člen řady jest tu

$$29120\, x^{12}\, u^3.$$

(Tutéž úlohu řešil *B. Bečka.*)

Řešení úlohy 39.
(Podal *B. Bečka.*)

Placeno tu ze sta 19·424.
(Tutéž úlohu řešil *A. Hanzlovský.*)

Řešení úlohy 43.
(Podal *A. Sucharda*, technik.)

Předložená funkce poskytuje

maximum pro $x = 0,\ y = \frac{a}{2}$,

minimum „ $x = \pm a,\ y = -\frac{3}{2} a$.

Křivka touto rovnicí vyjádřená poskytuje *dvojné* body *tři*, v nichž tečny uzavírají s osou úseček úhly, jichž trigonometrické tangenty vyjádřeny čísly $\pm\sqrt{\frac{4}{3}},\ \pm\sqrt{\frac{4}{3}},\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; body tyto jsou:

$$x = +a,\ -a,\ o,$$
$$y = o,\ o,\ a.$$

(Tutéž úlohu řešil *B. Bečka*, a *V. Hübner*, technik.)

Řešení rovnice 45.
(Zaslal *Bohumil Bečka.*)

Zavedeme-li označení

$$2\beta = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{19}{27}}}$$

$$2\gamma = \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{19}{27}}} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{29}{27}}}\right)\sqrt{3},$$

budou kořeny příslušné rovnice

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + \alpha - 1 = 0,$$

jak snadno se podle známých pravidel vypočte,

$$\alpha_1 = 1 + 2\beta,$$
$$\alpha_2 = 1 - \beta + i\gamma,$$
$$\alpha_3 = 1 - \beta - i\gamma,$$

načež integrál předložené rovnice differenciální zkrácené jest

$$y = (C_1 \cos\gamma x + C_2 \sin\gamma x)\, e^{(1-\beta)x} + C_3\, e^{(1+2\beta)x};$$

abychom určili doplněk, zaveďme do úplné rovnice

$$y = A e^x,$$

načež obdržíme pro neurčitý koefficient hodnotu

$$A = -\frac{1}{2},$$

takže doplněk k integrálu předešlému jest

$$-\frac{1}{2} e^x,$$

což se i variací stálých obdrží.

(Tutéž úlohu řešil *K. Brož*, filosof.)

Řešení úlohy 48.

(Podává *Al. Strnad*, assistent na české polytechnice.)

Rovnice křivky K^{2n+1} v soustavě dané bude zníti

$$\sum_{r=0}^{2n+1} A_r x^{2n-r+1} y^r = A x^n y^n,$$

parametr u bodu (x, y) dán jest pak rovnicí

$$u = \frac{y}{x}.$$

Vyjádříme-li naopak souřadnice x a y parametrem u, obdržíme

$$x = \frac{A u^n}{\sum\limits_{r=0}^{2n+1} A_r u^r}, \quad y = \frac{A u^{n+1}}{\sum\limits_{r=0}^{2n+1} A_r u^r}.$$

Přímka $ax + by + 1 = 0$ protíná danou křivku ve $2n+1$ bodech, jichž parametry $u_1, u_2 \ldots u_{2n+1}$ jsou kořeny rovnice

$$a A u^n + b A u^{n+1} + \sum_{r=0}^{2n+1} A_r u^r = 0.$$

Píšeme-li tuto ve tvaru rozvinutém

$$A_{2n+1} u^{2n+1} + A_{2n} u^{2n} + \ldots (bA + A_{n+1}) u^{n+1} + (aA + A_n) u^n + \ldots$$
$$\ldots + A_1 u + A_0 = 0,$$

poznáme, že dle známých vlastností součinitelů v rovnicích vyšších stupňů jest

$$\Sigma(u)_1 = -\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} = c_1,$$

$$\Sigma(u)_2 = \frac{A_{2n-1}}{A_{2n+1}} = c_2,$$

$$\vdots$$

$$\Sigma(u)_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{A_{n+2}}{A_{2n+1}} = c_{n-1},$$

$$\Sigma(u)_{n+2} = (-1)^{n+2}\frac{A_{n-1}}{A_{2n+1}} = c_{n+2},$$

$$\vdots$$

$$\Sigma(u)_{2n+1} = -\frac{A_0}{A_{2n+1}} = c_{2n+1},$$

kdež $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}, c_{n+2}, \ldots c_{2n+1}$ jsou patrně veličiny od polohy přímky neodvislé. Členy $\Sigma(u)_n$ a $\Sigma(u)_{n+1}$ činí patrně výminku, neboť jest

$$\Sigma(u)_n = (-1)^n \frac{bA + A_{n+1}}{A_{2n+1}}$$

$$\Sigma(u)_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{aA + A_n}{A_{2n+1}}.$$

Řešení úlohy 49. *)

(Zaslal *M. Fischer*, žák VII. třídy gymn. v Jindřichovu Hradci.)

Výhoda ona bude obnášeti zlatých

$$S = 1000\ [1{\cdot}03^2 + 1{\cdot}03^4 + \ldots + 1{\cdot}03^{50}]$$

aneb sečteme-li tuto řadu,

$$S = 1000\frac{1{\cdot}03^{52} - 1{\cdot}03^2}{1{\cdot}03^2 - 1} = 58948 \text{ zl. } 86^1/_2,$$

jichž hodnota nynější podlé známého vzorce jest

$$K = \frac{S}{1{\cdot}03^{50}} = 13446 \text{ zl. } 62 \text{ kr.}$$

*) Na str. 143 má státi „Úloha 49. a 50. místo 46. a 47.

(Tutéž úlohu řešili: *J. Prieher*, žák VIII. tř. česk. gymn. v Českých Budějovicích, *Fr. Šafránek*, žák VIII. tř. real. gymn. v Táboře.)

Úloha 53.

Znásobíme-li první tři členy arithmetické řady, jejíž $d = \frac{3}{2}$, obdržíme $113^3/_4$; jak velký jest první člen?

Úloha 54.

Měří-li plocha trojúhelníku 24 □′, poloměr kruhu vepsaného 2′ opsaného 5′ jak velký jest obvod jeho?

Úloha 55.

Kdy jest v Praze astronomický soumrak nejkratší a jak dlouho tu trvá?

II. Z fysiky.

Rešení úlohy 12.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.* *)

Značí-li v rychlost bodu hmotného ve vzdálenosti r od středu přítažnosti síly F, bude tu především podle dané podmínky

$$v = \frac{\mu}{r^n},$$

načež podlé známého vzorce všeobecného

$$d(v^2) = -2 F dr$$

snadno si derivováním zjednáme

$$F = \frac{n \mu^2}{r^{2n+1}},$$

čímž určen zákon, jímž se síla přítažná F řídí.

Abychom určili dráhu, použijme známého vzorce

$$v^2 = \frac{\varkappa^2 dr^2}{r^4 d\beta^2} + \frac{\varkappa^2}{r^2} = \frac{\mu^2}{r^{2n}}, \qquad (1)$$

načež jednoduchým přeložením členů povstane

*) Poněvadž se nikdo nepokusil o řešení těchto úloh z I. roč. tohoto časopisu, provedl jsem je sám, aby se dále nevedly.

$$\frac{\mu^2 - \varkappa^2 r^{2n-2}}{\varkappa^2} = \frac{r^{2n-4}\,dr^2}{d\beta^2}$$

aneb odmocníme-li a položíme-li

$$r^{n-2}\,dr = \frac{dr^{n-1}}{n-1},$$

$$(n-1)\,d\beta = \frac{\varkappa\,dr^{n-1}}{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2 r^{2(n-1)}}},$$

z čehož jde integrováním

$$(n-1)\beta = arc\,sin\,\frac{\varkappa\,r^{n-1}}{\mu} - arc\,sin\,\frac{\varkappa\,a^{n-1}}{\mu},$$

značí-li a vzdálenost bodu pro $\beta = 0$.

Rovná-li se ve zvláštním případě $n = \frac{1}{2}$, obdržíme pomocí vzorce (1) rovnici *kuželosečky*, rovná-li se konečně $n = 1$, rovnici *exponenciální spirálky*, jakž snadno možno se přesvědčiti.

Řešení úlohy 13.

Jsouli a, x vzdálenosti od středu přítažnosti v době $T = 0$ a $T = t$, značí-li pak $\varkappa$ míru odporu, bude podlé známého pravidla

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^3} + \frac{\varkappa v^2}{x^3};$$

znásobíme-li na obou stranách $2\frac{dx}{dt}$, povstane

$$dv^2 = d\left(\frac{1}{x^2}\right)[\mu - \varkappa v^2],$$

aneb rozloučíme-li proměnné,

$$d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{dv^2}{\mu - \varkappa v^2},$$

z čehož jde integrováním

$$\frac{1}{x^2} = -\frac{l\,(\mu - \varkappa v^2)}{\varkappa} + C,$$

kdež C značí integrační stálou; poněvadž pro $x = a$ platı $v = 0$ bude zároveň

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{l\,\mu}{\varkappa} + C,$$

taktéž odečtením obou rovnic povstane

$$\varkappa\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right)=l\frac{\mu}{\mu-\varkappa v^2}$$

aneb

$$e^{-\varkappa\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right)}=1-\frac{\varkappa}{\mu}v^2,$$

z čehož konečně jde hledaný zákon

$$v^2=\frac{\mu}{\varkappa}\left[1-e^{-\varkappa\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right)}\right],$$

z něhož patrno, že pro $x=0$ platí $v=\frac{\mu}{\varkappa}$.

Řešení úlohy 14.

Euler provedl ve své mechanice (I. pag. 220) všeobecně úlohu tuto takto:

Značí-li a, x a F totéž co dříve a φ hutnost ústředí, ktaráž tu jest funkcí vzdálenosti x, bude podobně, jako při předešlé úloze,

$$v\frac{dv}{dx}=-F+\varphi v^2;$$

násobíme-li tedy na obou stranách integračním faktorem $2e^{-\int\varphi dx}$ obdržíme

$$d\left(v^2 e^{-2\int\varphi dx}\right)=-2e^{-\int\varphi dx}F\,dx,$$

z čehož jde integrováním

$$v^2 e^{-\int\varphi dx}=-2\int e^{-\int\varphi dx}F dx+C;$$

poněvadž pro $x=a$ jest $v=0$, bude

$$0=-A+C,$$

značí-li

$$A=/X^{x=a}$$

$$X=2\int_0^x e^{-2\int\varphi dy}F\,dx,$$

takže vyloučením integrační stálé C obdržíme konečně

$$v=e^{\int\varphi dx}\sqrt{A-X}=\frac{dx}{dt}$$

a z toho řešením podle t

$$dt = \frac{dx}{e^{\int \varphi dx} \sqrt{A - X}}.$$

Položíme-li tedy pro zjednodušení

$$\frac{dx}{e^{\int \varphi dx}} = \frac{dX}{P}, \qquad (1)$$

obdržíme pro určení času prostého pádu vzorec

$$t = \int_0^A \frac{dX}{P\sqrt{A - X}}.$$

Aby výraz na pravé straně nezávisel na původní vzdálenosti a neb v tomto případě na A, nutno, aby za integračním znamením byla veličina stupně 0-tého podle A, X a dX, z čehož jde, že P musí býti stejnoměrnou funkcí stupně $^1/_2$-tého, takže možná položiti

$$P = \frac{1}{\beta} \sqrt{X},$$

kdež značí β veličinu stálou. Na to obdržíme z rovnice (1)

$$\beta \frac{dX}{\sqrt{X}} = e^{-\int \varphi dx} dx,$$

aneb poněvadž X a x stanou se současně 0,

$$2\beta \sqrt{X} = \int_0^x e^{-\int \varphi dx} dx;$$

dosadíme-li pak do rovnice této za X pravou hodnotu a zmocníme-li obdržíme dále

$$8\beta^2 \int_0^x e^{-2\int \varphi dx} F dx = \left\{ \int_0^x e^{-\int \varphi dx} dx \right\}^2,$$

z čehož jde differencováním a řešením podle F

$$F = \frac{1}{4\beta^2} e^{\int \varphi dx} \int_0^x e^{-\int \varphi dx} dx.$$

Jak patrno jest všeobecný výraz tento, jímž vyjádřena jest síla přítažná F, velmi složitý i v našem případě zvláštním; velké zjednodušení povstane pro

$$\varphi = \beta,$$

jelikož tu pak pro ústředí stejnorodé se obdrží

$$F = \frac{1}{4\beta^3}\left(e^{\beta x} - 1\right).$$

Řešení úlohy 15.

Značí-li p kolmici spuštěnou s polu na tečnu vedenou k bodu dráhy, v němž se těleso právě nalezá, platí všeobecně

$$pv = k, \qquad (1)$$

$$F = \frac{k^2\,dp}{p^3\,dr}. \qquad (2)$$

Jest-li tedy rovnice spirálky logarithmické

$$a \log r = \vartheta,$$

bude, jak o této křivce známo,

$$tang\,\beta = a,$$

kdež β jest veličina stálá, ana značí úhel, jejž uzavírá tečna s průvodičem; pročež jest tu zároveň

$$p = r \sin\beta = \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}}.$$

takže pomocí této hodnoty ze vzorce (2) obdržíme

$$F = \frac{k^2(1+a^2)}{a^2 r^3}.$$

Abychom odstranili k, považme, že pro

$$r = r_0 \text{ jest } v = v_0,$$

načež ze vzorce (1) obdržíme snadno

$$k = \frac{a r_0 v_0}{\sqrt{1+a^2}}$$

a tudíž ze vzorce předposledního pro sílu přítažnou výraz

$$F = \frac{r_0^{\,2} v_0^{\,2}}{r^3}.$$

Abychom určili rychlost v, použijme vzorce (1) a dosaďme do něho za k a p známé již hodnoty; obdržímeť tu

$$v = \frac{r_0 v_0}{r},$$

jakž *Newton* již ustanovil v klassickém spisu svém „Principia" (lib. I. prop. 9.)

Řešení úlohy 27.

(Zaslal *Sallabašev*, technik.)

V prvním případu nutno míti 60·45, v druhém 4·37 sil koňských.

Řešení úlohy 42. (44.)

(Podal *K. Neumann*, žák VII. třídy v. real. škol v Praze.)

Hledaný tu poměr jest 1 : 2·5958.

(Tutéž úlohu řesili: *Kozel Jan*, *Adámek Ant.*, *Černý Fr.* žáci VII. tř. v. r. škol v Praze, *V. Hübner*, technik, *V. Králíček*, žák VII. třídy gymn. v Budějovicích.)

Řešení úlohy 43. (45.)

(Podal *B. Čámský*, žák VI. tř. v. r. škol v Praze.)

K úkonu naznačenému třeba 9·259 kg.

(Tutéž úlohu řešili: *T. Lehovec*, *Jos. Heide*, *Jos. Bayer*, *Fr. Šlapák*, *F. Husák*, *V. Kohout*, *A Špirk*, žáci VI. třídy v. real. škol v Praze.)

Úloha 48.*)

Na rovníku jest $g = 9{\cdot}78061^{m}$; jak velké by bylo, kdyby se země neotáčela.

Úloha 49.

Jak velký jest exponent lomu (lomitel) hmoty, má-li koule z ní vyrobená ohnisko ve vzdálenosti m-krát tak velké, jako jest délka poloměru jejího?

Úloha 50.

Má se určiti poloha těžiska pro sektor parabolický, jehož krajní průvodičové uzavírají s osou úhly α a β.

---

*) Na str. 144. má státi „Úloha 44.“ místo 42. a pod. dále.