

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Emil Schönbaum

Přirozený lidský rozum a matematika

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 3, 361--368

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123227>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1911

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Přirozený lidský rozum a matematika.

Dr. E. Schoenbaum.

Slavný filosof a matematik Pascal napsal jednou proslulému matematikovi Fermatovi o svém příteli panu de Méré: „*Má mnoho rozumu, ale není matematik*; a to jest, jak víte, veliká chyba.“

Podnět k poznámce té dala Pascalovi tato záležitost. Pan de Méré zabýval se horlivě teorií her a svými otázkami a úlohami dal Pascalovi mnoho podnětů, aby založil a pěstoval počet pravděpodobnosti. Tak přispěl pan de Méré nepřímou k založení tohoto zajímavého oboru matematiky. Mezi jiným žádal jednou Pascala, aby mu vysvětlil nesprávnost, k níž dle jeho názoru vede arithmetika: Sázíme-li jednu proti jedné, že ve čtyřech vrzích kostkou vyjde aspoň jednou strana označená šesti body, jsme ve výhodě proti spoluhráči. *) Sázíme-li však jednu proti jedné, že ve 24 vrzích se dvěma kostkami vyjde aspoň jednou *paš*, t. j. dvě šestky, jsme *podle theorie v nevýhodě* proti spoluhráči. **) A přece jest v první úloze 6 možných a v druhé 36 možných případů a 6 má se ku 36 jako 4 ku 24.

*) Pravděpodobnost, že při *jednom* vrhu *nevyjde* šestka, jest $\frac{5}{6}$, že při *n* vrzích *nevyjde* šestka ani jednou $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, tedy, že při *n* vrzích vyjde šestka *aspoň* jednou, jest pravděpodobnost

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Pro $n = 4$ jest $p = 0.5178$; jest tedy sázka výhodná.

**) Pravděpodobnost, že při *jednom* vrhu dvěma kostkami *nevyjde* paš, jest $\frac{35}{36}$, neboť jest 36 všech možných spojení stěn kostek a paš jest

Pascal podotýká ve svém dopise Fermatovi: „Vidíte, nad čím se pohoršoval, takže se opovážil říci, že věty arithmetiky nejsou platny a že aritmetika si odporuje.“

Pan de Méré soudil tedy, že počet vrhů, potřebný k docílení rovnosti sázky, jest úměrný počtu všech možných případů. Kdyby se ho byl tázal někdo, proč tak soudí, byl by jistě odpověděl: „*Na základě zdravého rozumu lidského.*“ Ve skutečnosti spočívá úsudek pana de Méré na nesprávné analogii a přirozenému rozumu dostává se opravy jednoduchou matematickou úvahou.

V případě pana de Méré jednalo se o prostou úlohu počtu pravděpodobnosti, v němž se podobné nesprávné úsudky zdravého rozumu obzvláště často s matematickým uvažováním utkávají. Ve velikém klasickém díle Laplaceově *Théorie analytique des probabilités*, z něhož jest vyňat též vypravovaný právě případ historický, jsou četné doklady podobných omylů. Takovým dokladem jest ku př. veliký úspěch lotterií a vůbec počínání lidí, jde-li o sázku nebo hru. Nevyšlo-li ku př. dlouho určité číslo v lotterii, sází se na ně v domnění, že číslo takové musí býti v nejbližších tazích spíše taženo, než jiné. Ale úvaha taková jest nesprávná, neboť „kostka ani mince nemá paměti“.

I jinak řídíme se ve svém jednání často úsudky t. zv. zdravého nebo přirozeného lidského rozumu. Formálně vyhovují úsudky takové pravidlům logiky. Věcně však jsou často založeny na nesprávné analogii, neúplné indukci, nebo na nesprávných premisách, jsou proto nesprávné, a teprve odborná úvaha může ukázati často jich závadnost.

Duch lidský jest podroben omylům právě tak, jako zrak, a jako jest možno zrak korigovati jiným smyslem, právě tak můžeme kontrolovati a opravití omyl přirozeného rozumu vědeckou úvahou.

možný na jediný způsob. Pravděpodobnost, že v n vrzích nevyjde ani jednu paš, jest dle toho $\left(\frac{35}{36}\right)^n$ a pravděpodobnost kontrévního zjevu, že při n vrzích vyjde paš *aspoň jednou*:

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Pro $n = 24$ vypočítává se $p = 0.4914$. Jest tedy sázka *nevýhodná*.

Všude tam, kde jde o *vztahy veličin*, jest potřebna úvaha mathematická. Spoléhání se na mohutnost zdravého rozumu lidského, který prohlédá vztahy veličinné přímo, bez nástrojů analyzy, vede často k velikým omylům.

Zajímavý příklad podobného omylu, k němuž vede úvaha „na základě zdravého rozumu“, a jehož důsledky byly by velmi nepřijemny, ukazuje projednávání volební opravy v jistém státě evropském. Příklad jest též proto zajímavý, že ukazuje, jak jest schopnost mathematicky mysliti potřebna i v oborech, kde bychom toho nehledali.

K vůli zjednodušení myslíme si, že mají býti zřízeny dle poplatností daňové dvě třídy voličů, z nichž první třída obsahuje voliče o vysoké poplatnosti a druhá voliče s nižším berním censem. Kandidáti jsou společni oběma třídám. V každé třídě určí se procento hlasů odevzdaných každému kandidátu, tato procenta se pro téhož kandidáta sečtou, a pro koho vychází větší součet, jest zvolen. Předpokládejme na příklad, že jsou dva kandidáti *A* a *B*. Pro *A* budiž odevzdáno v I. třídě 100 hlasů, pro *B* v téže třídě 50 hlasů; v II. třídě pro *A* 300 hlasů, pro *B* 700 hlasů. Jest pak výsledek volby:

$$\text{Pro } A \quad \frac{100}{150} + \frac{300}{1000} = 0.9667,$$

$$\text{Pro } B \quad \frac{50}{150} + \frac{700}{1000} = 1.0333.$$

Jest tedy *B* zvolen.

Nás zajímá však následující ustanovení této volební reformy, jak byla navržena v Prusku: Úřad řídící volbu má právo vyloučiti dle daných poměrů určité kategorie voličů z II. sboru, do něhož vlastně patří, a přeložiti je do třídy první. Úvaha, na základě kteréž bylo toto ustanovení do návrhu zákona vsunuto, jest asi tato: Prvá třída, která obsahuje vysoké poplatníky, má voličů málo, druhá třída mnoho. Hlas v prvé třídě, odevzdaný pro určitého kandidáta, má tedy větší váhu než hlas v třídě druhé odevzdaný pro téhož kandidáta. Přesune-li úřad dozorcí dostatečně veliký počet hlasů, které by byly odevzdány v II. třídě pro některého kandidáta, do třídy I., kde se váha jich zvýší,

může změnit poměr původně nepříznivý tomuto kandidátovi a dopomoci mu tak k vítězství. Tato úvaha byla též vskutku příčinou, že ono ustanovení bylo pojato do návrhu. Ony kategorie voličů, které možno přesunovati z II. třídy do první, jsou státní pensisté, inteligentní vrstvy voličstva, vyšší úředníci a jiní.

Při sestavování tohoto paragrafu opíral se tvůrce zákona o svrchu zmíněnou úvahu přirozeného rozumu lidského, že přenesením hlasů se váha jich ve prospěch kandidáta úřadu příjmemného zvýší, po případě znásobí a tak získá se mu vítězství. Ve skutečnosti jest však úvaha ta, jak ukázal *Bortkiewicz* *), *naprosto nesprávná* a přesunutí hlasů z II. třídy do I. může kandidátovi ublížiti; k vítězství dopomoci může mu však jen za zcela určitých číselných podmínek.

Malý příklad to ukáže nejlépe.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
I.	300	200	400	200
II.	300	700	200	700

Obě schemata ukazují poměr hlasů původně a pak po přenesení 100 hlasů kandidáta *A* z II. třídy do první. Dle prvního schematu vychází pro *A* číslo $\frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$, pro *B* číslo $\frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{11}{10}$. Po převedení 100 hlasů z II. třídy do I. pro *A* poměr $\frac{4}{6} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$ pro *B* $\frac{2}{6} + \frac{7}{9} = \frac{10}{9}$. *Převedením 100 hlasů se tedy situace kandidáta A zhorší; ještě více se zhorší poměr pro A převedením 200 hlasů a konečně, kdyby všichni voliči kandidáta A byli z druhé třídy komandování do první, byl by výsledek pro A nejhůrší: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.*

V tomto případě docílil by tvůrce ustanovení *pravého opaku toho, co zamýšlel*. Ukazuje se opět, jak vratkou jest úvaha přirozeného rozumu a jak nutno jest doplnění arithmetickým rozborom. A rozbor ten jest velmi snadný **).

*) Jahrbuch für Nationalök. u. Statistik 1910.

***) Podávám jej jinak a jednodušeji než Bortkiewicz na uvedeném místě.

Budiž tedy počet všech voličů třídy I. s_1 , třídy II. s_2 , počet hlasů pro A v třídě I. a_1 , v třídě II. a_2 , pro B analogicky b_1 , b_2 , takže jest

$$a_1 + b_1 = s_1, \quad a_2 + b_2 = s_2.$$

Předpokládejme dále k vůli zjednodušení, že

$$s_1 < s_2, \quad a_1 > b_1, \quad a_2 < b_2.$$

Aby A byl volen hned poprvé, musí být

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} > 1$$

čili

$$\frac{a_1}{s_1} > \frac{s_2 - a_2}{s_2} = \frac{b_2}{s_2}.$$

Tažme se dále, za jaké podmínky může být převedením nějakého počtu hlasů z třídy II. do I. dosaženo výsledku pro A příznivějšího. Budiž c počet hlasů převedených ve prospěch A z třídy II. do I. Pak jest podmínka ta dána nerovností:

$$\frac{a_1 + c}{s_1 + c} + \frac{a_2 - c}{s_2 - c} > \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}. \quad (1)$$

Neboť po převedení c hlasů jest počet hlasů v třídě I. pro A svěřčících $a_1 + c$, počet všech hlasů $s_1 + c$; v třídě II. pro A $a_2 - c$, všech pak $s_2 - c$. Nerovnost (1) píše se též:

$$\frac{a_1 + c}{s_1 + c} - \frac{a_1}{s_1} > \frac{a_2}{s_2} - \frac{a_2 - c}{s_2 - c},$$

čili

$$\frac{c(s_1 - a_1)}{s_1(s_1 + c)} > \frac{c(s_2 - a_2)}{s_2(s_2 - c)}.$$

Je-li $c > 0$, jest patrně podmínka ta

$$\frac{b_1}{s_1(s_1 + c)} > \frac{b_2}{s_2(s_2 - c)},$$

čili

$$\frac{b_1 s_2^2 - b_2 s_1^2}{b_1 s_2 + b_2 s_1} > c. \quad (2)$$

Tím spíše musí býti (při $c > 0$) tedy

$$b_1 s_2^2 - b_2 s_1^2 > 0,$$

čili

$$\frac{b_1}{s_1^2} > \frac{b_2}{s_2^2}. \quad (3)$$

To jest tedy *nutná* podmínka, má-li přesunutím nějakého počtu hlasů z II. třídy do I. býti docíleno vůbec příznivějšího výsledku pro A . Není-li splněna, má přesunutí za následek zhoršení nebo v nejlepším případě udržení poměru hlasů pro A . Podmínka ta však není *dostačující*. Nutnou a dostačující podmínku obdržíme, uvážíme-li, že musí býti c dle svého významu aspoň 1. Podmínka ta jest pak

$$b_1 s_2 (s_2 - 1) > b_2 s_1 (s_1 + 1),$$

jakož plyne ihned z nerovnosti (2), nahradíme-li v ní c číslem 1*).

Nerovnost 2 dává též odpověď na otázku, jaký počet hlasů musí býti převeden z II. do I., aby se původní poměr hlasů obou kandidátův A i B nezměnil. Počet ten dán jest výrazem

$$c = \frac{b_1 s_2^2 - b_2 s_1^2}{b_1 s_2 - b_2 s_1}.$$

Konečně jest možno zodpovědět též otázku následující: Je-li splněna nerovnost (2), jaká podmínka jest pak ještě nutná, aby převedením všech hlasů odevzdaných v II. tř. pro A do třídy první bylo dosaženo výsledku pro A příznivějšího.

Patrně stačí, aby v nerovnosti (2) byla levá strana větší než $a_2 = s_2 - b_2$. Bude tedy hledaná podmínka:

$$\frac{b_1 s_2^2 - b_2 s_1^2}{b_1 s_2 + b_2 s_1} > s_2 - b_2.$$

Odstraněním jmenovatele levé strany a zkrácením zjednoduší se nerovnost na

$$s_1 (s_1 - b_2) < s_2 (b_1 - s_1)$$

anebo vzhledem na

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= s_1, & a_2 + b_2 &= s_2 \\ s_1 a_2 + a_1 s_2 &< s_1 s_2 - s_1^2 \end{aligned}$$

*) Bortkiewicz omezuje se na stanovení podmínky nutné (3).

a konečně

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} < 1 - \frac{s_1}{s_2}.$$

Konečně bylo by možno se tázati, za které podmínky může dosáhnouti A přesunutím nějakého počtu hlasů z třídy II. do I. vítězství nad B . Patrně musí býti v tomto případě nejprve splněna podmínka (2), neboť jinak by přesunutím hlasů z II. do I. poměr pro A se zhoršil. Je-li podmínka ta splněna, jest pak nutno, označíme-li hledaný počet hlasů x , aby bylo

$$\frac{a_1 + x}{s_1 + x} + \frac{a_2 - x}{s_2 - x} > 1,$$

čili, aby bylo:

$$x^2 - x(a_2 - a_1) - (a_1s_2 + a_2s_1 - s_1s_2) > 0. \quad (4)$$

Tato nerovnost vede k podmínce, jejíž úplný výraz jest příliš složitý.

Bude záhodno illustrovati jednoduché vývody předcházející číselným příkladem.

Budiž

$$a_1 = 100, \quad b_1 = 50, \quad s_1 = 150$$

$$a_2 = 300, \quad b_2 = 700, \quad s_2 = 1000.$$

Jest pak

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = 0.96667 < 1.$$

Podmínka (3) jest splněna. Jest totiž

$$\frac{b_1s_2^2 - b_2s_1^2}{b_1s_2 + b_2s_1} = \frac{6850}{31} = 221.$$

Převedením méně než 221 hlasů z třídy II. do I. pro kandidáta A svědčících docílí se výsledku příznivějšího pro A .

Vskutku jest při převedení 50 hlasů již

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{150}{200} + \frac{250}{950} = \frac{3}{4} + \frac{5}{19} > 1.$$

Také převedení 100 hlasů kandidáta A z II. do I. třídy dopomáhá tomuto k vítězství, neboť jest

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{200}{250} + \frac{200}{900} = \frac{46}{45} > 1.$$

Převedením 200 hlasů ztrácí však již A vítězství, ačkoli výsledek jest pro něho příznivější než bez převodu:

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{6}{7} + \frac{1}{8} < 1.$$

Konečně převedením 221 hlasů pro A nemění se vůbec výsledek původní, neboť jest v tomto případě

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{321}{371} + \frac{79}{779} = 0.8652 + 0.1014 = 0.9666.$$

Kdyby konečně přešlo více než 221 voličů kandidáta A z II. do I. třídy, zhoršila by se tím jen jeho políse.

Z rovnice $x^2 - x(a_2 - a_1) - (a_1s_2 + a_2s_1 - s_1s_2) = 0$, která v našem příkladě se redukuje na

$$x^2 - 200x + 5000 = 0$$

plynou dva reálné pozitivní kořeny $s_{1,2} = 29, 171$.

Převedením 29 nebo 171 hlasů docílí se tedy rovnosti obou poměrů pro A a B . Převedením libovolného počtu hlasů mezi 29 a 171 získá se konečně vítězství pro A .

O vnitřní souvislosti některých úloh Apolloniova problému.

Napsal Ant. Jeřábek.

Nejobecnější případ *Apolloniova* *) problému lze specializovati buď změnou velikosti neb změnou polohy daných kružnic.

Účelnou změnu velikosti provedeme tím, že za jednu kružnici položíme nekonečně malou, pouhý bod, neměníce polohy středů daných kružnic; změnu polohy pak účelně vykonáme tak, že pošineme dané kružnice, neměníce velikosti jejich, až probíhají všechny jediným bodem.

*) *Apollonius* z Pergy v Pamfylii, (nar. 247 př. Kr.), jeden ze čtyř velikých matematiků starověku (vedle Eukleida, Archimeda a Diofanta), sepsal osm knih o kuželosečkách.