Převedením 200 hlasů ztrácí však již A vítězství, ačkoli výsledek jest pro něho příznivější než bez převodu:

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{6}{7} + \frac{1}{8} < 1.$$

Konečně převedením 221 hlasů pro A nemění se vůbec výsledek původní, neboť jest v tomto případě

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{321}{371} + \frac{79}{779} = 0{\cdot}8652 + 0{\cdot}1014 = 0{\cdot}9666.$$

Kdyby konečně přešlo více než 221 voličů kandidáta A z II. do I. třídy, zhoršila by se tím jen jeho posice.

Z rovnice $x^2 - x(a_2 - a_1) - (a_1 s_2 + a_2 s_1 - s_1 s_2) = 0$, která v našem příkladě se redukuje na

$$x^2 - 200x + 5000 = 0$$

plynou dva reálné positivní kořeny $s_{1,2} = 29,\ 171.$

Převedením 29 nebo 171 hlasů docílí se tedy rovnosti obou poměrů pro A a B. Převedením libovolného počtu hlasů mezi 29 a 171 získá se konečně vítězství pro A.

O vnitřní souvislosti některých úloh Apolloniova problému.

Napsal **Ant. Jeřábek.**

Nejobecnější případ *Apolloniova* *) *problému* lze specialisovati buď *změnou velikosti* neb *změnou polohy daných kružnic.*

Účelnou změnu velikosti provedeme tím, že za jednu kružnici položíme *nekonečně malou,* pouhý *bod,* neměníce polohy středů daných kružnic; *změnu polohy* pak *účelně* vykonáme tak, že *pošineme* dané kružnice, neměníce velikosti jejich, až *probíhají všecky jediným bodem.*

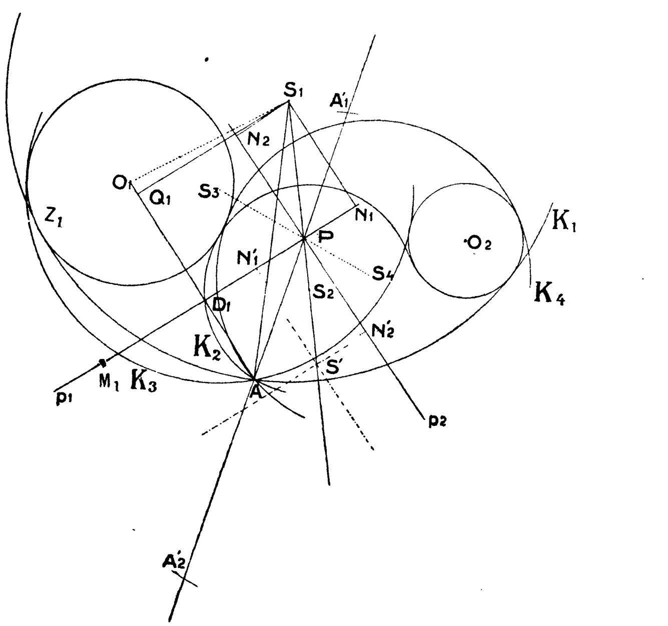
*) *Apollonius* z Pergy v Pamfylii, (nar. 247 př. Kr.), jeden ze čtyř velikých mathematiků starověku (vedle Eukleida, Archimeda a Diofanta), sepsal *osm* knih o kuželosečkách.

Tím způsobem získáme *dvě* úlohy (I. a IV.), z nichž *první* bude vhodným příkladem, že lze s výhodou užíti *imaginárných bodů* k řešení geometrických úloh; *druhá* pak *úloha obrácená,* pojata byvši jako *první,* objeví nám *svým obratem* některé geometrické vztahy, že bude východiskem nových příbuzných úloh, jimiž teprv *pravý* její *poměr k obecné úloze* se objasní.

Následující stať *v základě* svém se opírá o *methodu podobnosti,* nehledíc ke *stručnosti*; ale za to majíc zřetel ku *vnitřní souvislosti* zjednává *jiné hledisko* pro věty odjinud známé.

I.

Úloha I. *Sestrojiti střed kružnice, která procházejíc daným bodem A, dotýká se dvou kružnic o daných středech O_1, O_2 a poloměrech* r_1, r_2 (obr. 1.).



Obr. 1.

Budiž S střed hledané kružnice K; $SA = \varrho$; $O_1A = d_1$, $O_2A = d_2$; dále P *chordálný* střed kružnic O_1, O_2 a bodu A

(jakožto kružnice nekonečně malé), při čemž $\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$ jest chordálou $\begin{Bmatrix} \text{kružnice } O_1 \text{ a bodu } A \\ \text{„} \quad O_2 \text{ „} \quad \text{„} \quad A \end{Bmatrix}$.

Spustíme li $SQ_1 \perp O_1A$, $SN_1 \perp p_1$, jest $Q_1D_1 = SN_1$ a $SO_1 = \varrho \pm r_1$.

Protože D_1A se rovná tečně s bodu D_1 ke kružnici O_1 vedené, jest $D_1A^2 = O_1D_1^2 - r_1^2$, neboli

$$(d_1 - O_1D_1)^2 = O_1D_1^2 - r_1^2.$$

Odtud vychází

$$d_1^2 + r_1^2 = 2d_1 \,.\, O_1D_1. \tag{1}$$

Mimo to jest ve $\triangle SO_1A$

$$\varrho^2 = (\varrho \pm r_1)^2 + d_1^2 - 2d_1 \,.\, O_1Q_1. \tag{2}$$

Sečteme-li (1) a (2), vyplyne

$$d_1 \,.\, Q_1D_1 = \pm r_1\varrho,$$

z čehož

$$\frac{SN_1}{\varrho} = \frac{r_1}{d_1}. \tag{3}$$

Obdobně vychází též

$$\frac{SN_2}{\varrho} = \frac{r_2}{d_2} \tag{4}$$

a položíme li

$$\frac{d_2r_1}{d_1} = q, \quad \frac{SN_2}{SN_1} = \frac{r_2}{q}. \tag{5}$$

Odtud vyplývá sestrojení:

Prodlužme AO_1 do C, aby $O_1C = r_1$, a veďme $CE \parallel O_2A$ (E na prodloužené středné O_2O_1); i jest $CE = q$. — Veďme rovnoběžky ku chordálám p_1 a p_2 ve vzdálenostech q a r_2, průsečík jejich S' spojme s P; a tím určen jest dle (5) *směr paprsku PS.* Přetněme pak s bodu S' paprsek AP délkou d_2 v bodě A'_1, ($S'A'_1 = d_2$), veďme $AS_1 \parallel S'A'_1$ (S_1 na paprsku PS); i jest S_1 *hledaným středem.*

Důkaz. Učiňme $S'N'_1 \perp p_1$ a $S'N'_2 \perp p_2$. Potom jest

$$\frac{S'N'_2}{S_1N_2} = \frac{PS'}{PS_1} = \frac{S'A'_1}{S_1A};$$

odtud záměnou vnitřních členů

$$\frac{S'N'_2}{S'A'_1} = \frac{S_1N_2}{S_1A},$$

avšak

$$S'N'_2 = r_2 \quad \text{a} \quad S'A'_1 = d_2,$$

tedy

$$\frac{S_1N_2}{\varrho} = \frac{r_2}{d_2},$$

čímž podmínce (4) a tím také i (3) zároveň jest vyhověno.

Dle sestrojení totiž

$$S_1N_1 : S_1N_2 = q : r_2,$$

tedy

$$\frac{S_1N_1}{S_1A} : \frac{S_1N_2}{S_1A} = q : r_2,$$

a také

$$\frac{S_1N_1}{\varrho} : \frac{r_2}{d_2} = \frac{d_2r_1}{d_1} : r_2,$$

neboli

$$\frac{S_1N_1}{\varrho} = \frac{r_1}{d_1}.$$

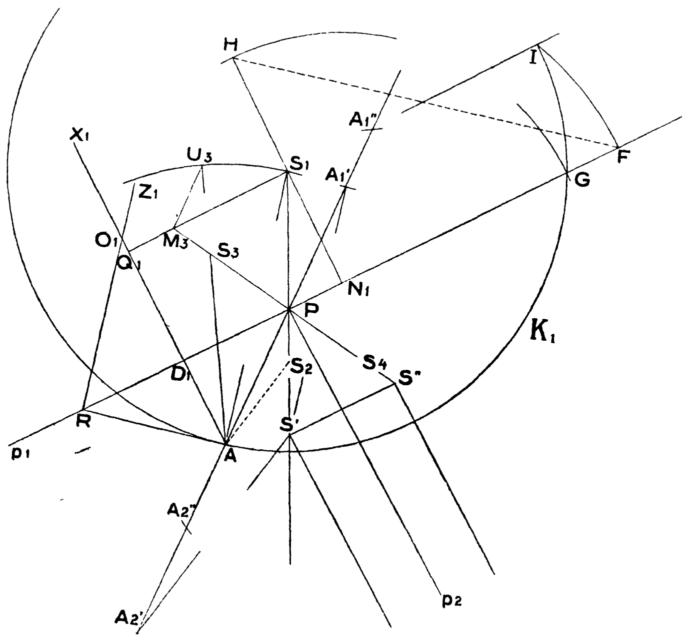
Protože opsaný oblouk protne paprsek PA ve dvou bodech A'_1 a A'_2, obdržíme na paprsku PS' ještě *druhý střed* S_2 ($AS_2 \,||\, A'_2S'$).

Další *dva středy* (obr. 2.) S_3 a S_4 získáme, vedeme-li též na *druhé straně chordály* p_2 druhou rovnoběžku až ku S'' (t. j. ku průsečíku s přímkou $S'S''$, vedenou již dříve *rovnoběžně k chordále* p_1 ve vzdálenosti q) a vyhledáme-li podobně S_3 a S_4 na paprsku PS'' ($S''A''_1 = S''A''_2 = d_2$; $AS_3 \,||\, S''A''_1$, $AS_4 \,||\, A''_2S''$).

Celkem obdržíme *čtyři* kružnice K_1, K_2, K_3, K_4, jejichž poloměry jsou $S_1A = \varrho_1$, $S_2A = \varrho_2$, $S_3A = \varrho_3$, $S_4A = \varrho_4$.

Poznámka. V uvedeném řešení tvoří hledané kružnice *dvě dvojice* (obr. 1. a 2.) (K_1K_2) a (K_3K_4), z nichž *první* má *své středy* na PS', *druhá* na PS''.

Každá tato dvojice dotýká se jak kružnice O_1 tak O_2 způsobem *stejným* *); na př. *druhá* dotýká se $\left\{\begin{array}{c} O_1 \\ O_2 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \textit{vně a uvnitř} \\ \textit{vně a uvnitř} \end{array}\right\}$. Jiné však sdružení na př. $(K_2 K_3)$ dotýká se $\left\{\begin{array}{c} O_1 \\ O_2 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c} \textit{vně a uvnitř} \\ \textit{vně a vně} \end{array}\right\}$ t. j. $\left\{\begin{array}{c} \textit{nesouhlasně} \\ \textit{souhlasně} \end{array}\right\}$, tedy způsobem *nestejným.*



Obr. 2.

Důsledek I. (obr. 2.).

Pozorujeme-li rovnoběžky

$$AS_1 \parallel S'A'_1, \quad AS_2 \parallel A'_2S', \quad AS_3 \parallel S''A''_1, \quad AS_4 \parallel A''_2S'',$$

snadno dokážeme větu:

Chordálný střed P kružnic O_1, O_2 a bodu A je středem podobnosti dvojic (K_1K_2) a (K_3K_4).

---

*) t. j. buď obou *souhlasné* neb obou *nesouhlasné.*

Protože $\sphericalangle PAS_1 = \sphericalangle PA'_1S'$, $\sphericalangle PAS_2 = \sphericalangle PA'_2S'$ a $\sphericalangle PA'_1S' = \sphericalangle PA'_2S'$ $(S'A'_1 = S'A'_2)$, jest $\sphericalangle PAS_1 = \sphericalangle PAS_2$, *neboli AP jest symmetrálou úhlu A* *) *ve trojúhelníku S_1AS_2.*

Odtud vychází

$$PS_1 : PS_2 = AS_1 : AS_2,$$

$$PS_1 : PS_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$

a obdobně též

$$PS_3 : PS_4 = \varrho_3 : \varrho_4,$$

což bylo dokázati.

Důsledek II. (obr. 2.).

Protíná-li kružnice, opsaná poloměrem AS_1 kolem bodu A, ramena úhlu S_3AS_4 v bodech U_3 a U_4, a vedeme-li z těchto bodů rovnoběžky s PA až k průsečíkům se střednou S_3S_4 $(U_3M_3 \,||\, PA;\ U_4M_4 \,||\, PA)$ (v obr. 2. jest toliko U_3M_3 vyznačena), můžeme dokázati:

Spojnice $\left\{\begin{matrix} S_1M_3 \\ S_1M_4 \end{matrix}\right\}$ *jest rovnoběžna s* $\left\{\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\}$ *t. j. s chordálou* $\left\{\begin{matrix} \textit{kružnice } O_1 \textit{ a bodu } A \\ \text{„} \quad O_2 \text{ „} \quad \text{„} \quad A \end{matrix}\right\}$.

Dokážeme na př., že

$$S_1M_3 \,||\, p_1.$$

Protože

$$AS_1 \,||\, S'A'_1 \quad \text{jest} \quad PS' : A'_1S' = PS_1 : S_1A;$$

a ježto

$$AS_3 \,||\, S''A''_1, \quad \text{též} \quad PS_3 : PS'' = AS_3 : S''A''_1;$$

konečně

$$M_3U_3 \,||\, AP, \quad \text{a tedy} \quad AS_3 : PS_3 = AU_3 : PM_3.$$

Uvážíme-li, že $S'A'_1 = S''A''_1$ a $AU_3 = S_1A$ (dle sestrojení), vyplyne nám z těchto *tří* úměr znásobením stejnolehlých členů:

$$PS' : PS'' = PS_1 : PM_3,$$

a tedy také

$$S_1M_3 \,||\, S''S'.$$

Protože však $S''S'$ sestrojeno bylo rovnoběžně s p_1, jest i $S_1M_3 \,||\, p_1$.

---

*) *vnitřního*, jindy *vnějšího* (když P leží *vně* S_1S_2).

II.

Obecná úloha Apolloniova.

Úloha II. *Sestrojiti kružnici, která se dotýká tří kružnic o daných středech* O_1, O_2, O_3 *a poloměrech* r_1, r_2, r_3.

Řešení poskytuje *osm kružnic* $K_1, K_2, \ldots, K_8$ o poloměrech $\varrho_1\ \varrho_2, \ldots, \varrho_8$, jež vesměs mohou se lišiti *způsobem dotyku* (*u* uvnitř, *v* vně).

Označíme-li hledané kružnice *trojím udavatelem* (dle toho, jak se dotýkají daných kružnic O_1, O_2, O_3 *v tomto naznačeném pořádku*), vzniknou *čtyři dvojice* a to:

1. (K_1K_2) vyskýtá se v případech (K_{uuu}, K_{vvv}), (K_{uuu}, K'_{uuu}), (K_{vvv}, K'_{vvv});
2. (K_3K_4) „ „ „ (K_{uuv}, K_{vvu}), (K_{uuv}, K'_{uuv}), (K_{vvu}, K'_{vvu});
3. (K_5K_6) „ „ „ (K_{uvu}, K_{vuv}), (K_{uvu}, K'_{uvu}), (K_{vuv}, K'_{vuv});
4. (K_7K_8) „ „ „ (K_{uvv}, K_{vuu}), (K_{uvv}, K'_{uvv}), (K_{vuu}, K'_{vuu}).

O platnosti těchto dvojic přesvědčíme se úvahou touto:

Nahradíme-li v úloze I. *bod A třetí kružnicí* O_3, bude *hledaná* kružnice K moci se dotýkati této *třetí* kružnice O_3 buď *uvnitř* nebo *vně*; i vzejdou nám v obrazci 1. z tamních kružnic

$$K_1,\ K_2,$$
$$K_3,\ K_4$$

hledané kružnice v tomto pořádku:

$$K_{uuu} \text{ a } K_{uuv}, \qquad K_{vvu} \text{ a } K_{vvv},$$
$$K_{uvu} \text{ a } K_{uvv}, \qquad K_{vuu} \text{ a } K_{vuv}.$$

Nyní jen třeba spojiti v každém z obou těchto řádků *vnější* členy ve *dvojice*, rovněž tak *vnitřní členy*, abychom získali *první* skupiny hořejších dvojic.

Že někdy mohou *oba členy dvojice* míti *stejné* udavatele, n. př. (K_{vvv}, K'_{vvv}), vysvitne z následujícího. Dejme tomu, že *třetí daná* kružnice O_3 leží celá *mezi společnými vnějšími tečnami* obou ostatních daných kružnic O_1, O_2 *a těmito kružnicemi*, pak jest K_{uuu} *nemožná*; ale za to vedle K_{vvv} vyskytne se ještě druhá K'_{vvv}. —

α) *Hledané* kružnice *v každé dvojici* buď *mají dva* body *společné* (po případě splývající), nebo *nemají bodu společného*. Zavedeme-li body *imaginárné*, můžeme říci, že *obě kružnice vždy ve dvou* bodech se protínají a to buď *reálných* neb *imaginárných*.

Protínají-li se však (obr. 3. *a.*) — po přijaté této definici — *hledané* kružnice $K_I K_{II}$ *) v bodech A, A' (ať reálných, ať imaginárných), jest P jakožto *jejich střed podobnosti* (dle důsledku I.) nejen *chordálným středem kružnic* O_1, O_2 a *bodu* A, ale také *kružnic* O_1, O_3 a *bodu* A, myslíme-li si, že O_2 pošinuto bylo do polohy O_3 **).

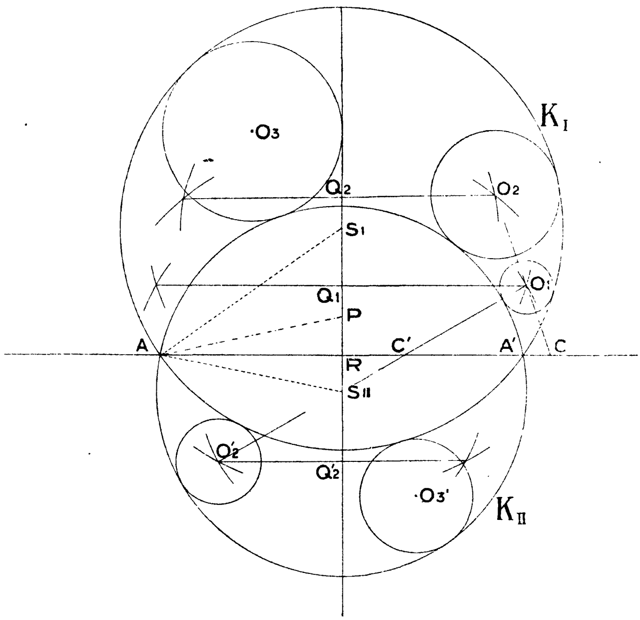
---

*) Jsou-li dány kružnice $\left\{\begin{matrix} O_1, O_2, O_3, \\ O_1, O_2, O'_3, \\ O_1, O'_2, O_3, \\ O_1, O'_2, O'_3, \end{matrix}\right\}$, zastupuje ($K_I K_{II}$) dvojici $\left\{\begin{matrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \\ K_5 & K_6 \\ K_7 & K_8 \end{matrix}\right\}$ a to případem $\left\{\begin{matrix} K_{uuu}, & K_{vvv} \\ K_{uuv}, & K_{vvu} \\ K_{uvu}, & K_{vuv} \\ K_{uvv}, & K_{vuu} \end{matrix}\right\}$.

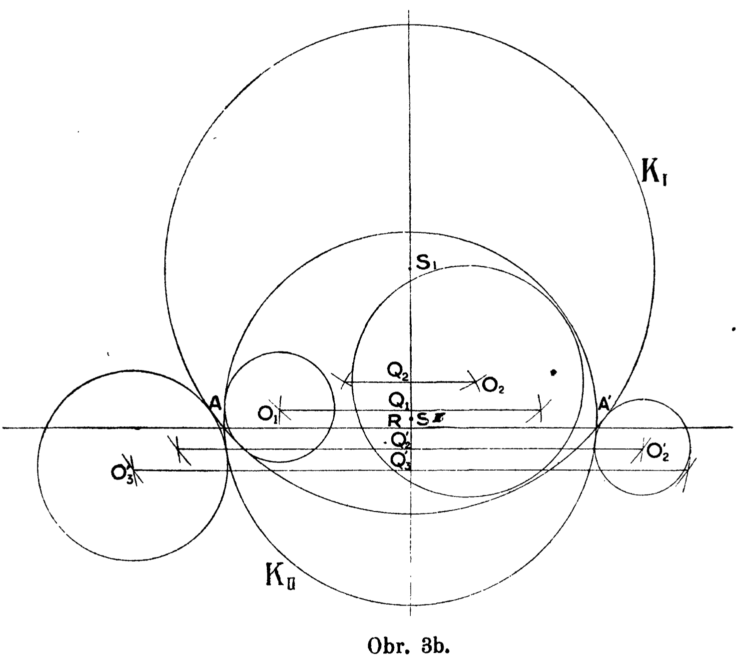
**) Abychom obdobně mohli souditi při dvojici $\left\{\begin{matrix} K_3 & K_4 \\ K_5 & K_6 \\ K_7 & K_8 \end{matrix}\right\}$, vzali bychom za důvod, že P jest nejen *chordálným středem*

$\left\{\begin{matrix} \text{kružnic } O_1, O'_3 \text{ a bodu } A \\ \text{„ } O_1, O'_2 \text{ „ „ } A \\ \text{„ } O_1, O'_2 \text{ „ „ } A \end{matrix}\right\}$ ale také $\left\{\begin{matrix} \text{kružnic } O_2, O'_3 \text{ a bodu } A \\ \text{„ } O_3, O'_2 \text{ „ „ } A \\ \text{„ } O_1, O'_3 \text{ „ „ } A \end{matrix}\right\}$,

pošinouce v mysli $\left\{\begin{matrix} O_1 \\ O_1 \\ O'_2 \end{matrix}\right\}$ do polohy $\left\{\begin{matrix} O_2 \\ O_3 \\ O'_3 \end{matrix}\right\}$. (Srov. s obr. 3*a*) a udavateli hledaných kružnic.)


K_I
·O3
Q2
O2
S1
O1
Q1
P
A
C'
A'
C
R
SII
O'2
Q'2
·O3'
K_II

Obr. 3a.


K_I
S1
Q2
O2
Q1
A
O1
R
A'
Q'2
Q'3
O'3
O'2
K_II

Obr. 3b.

Z toho vyplývá, že *P jest chordálným středem všech tří daných kružnic* O_1, O_2, O_3.

Bedlivějším přihlédnutím k věci nabýváme *výsledku*:

A. *Chordálný střed tří daných kružnic* (v obecné Apolloniově úloze) je *středem podobnosti kterékoli dvojice hledaných kružnic* ***) a to $\left\{\begin{matrix}\textit{vnitřním}\\ \textit{vnějším}\end{matrix}\right\}$, mají-li *oba* členy dvojice *udavatele* $\left\{\begin{matrix}\textit{různé}\\ \textit{stejné}\end{matrix}\right\}$.

Důsledek věty *A: Kružnice Π, (opsaná kolem chordálného středu daných kružnic P) a tyto kružnice kolmo sekoucí, jest geom. místem pro společné body (A, A') kterékoli hledané dvojice.*

Vzhledem ku větě A (obr. 4.) *prochází spojnice bodů* T'_i a T''_i, v nichž na př. *první ze tří daných kružnic* některé *hledané dvojice* K_I K_{II} se dotýká, *chordálným středem daných* kružnic P jakožto $\left\{\begin{matrix}\text{vnitřním}\\ \text{vnějším}\end{matrix}\right\}$ *středem podobnosti této dvojice,* a to dle toho, poskytuje-li *řešení oba její udavatele* $\left\{\begin{matrix}\text{různé}\\ \text{stejné}\end{matrix}\right\}$.

***) Budiž $\left\{\begin{matrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{matrix}\right\}$ *chordála bodu A a kružnice* $\left\{\begin{matrix}O_1\\ O_2\\ O_3\end{matrix}\right\}$. Značí-li l_1, l_2, l_3 *kolmice* s bodu A jakožto *počátku soustavy pravoúhlých souřadnic* na ty *chordály* spuštěné, jsou *rovnice chordál:*

$$p_1 \equiv x - l_1 = 0, \quad p_2 \equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - l_2 = 0,$$

$p_3 \equiv x \cos\beta + y \sin\beta - l_3 = 0$. (píšeme-li $\widehat{x l_1} = 0$, $\widehat{x l_2} = \alpha$, $\widehat{x l_3} = \beta$).

Eliminací x, y obdržíme *analytickou podmínku,* že *P jest chordálným středem bodu A* a kružnic O_1, O_2, O_3 (že totiž p_1, p_2, p_3 se protínají v jediném bodě P):

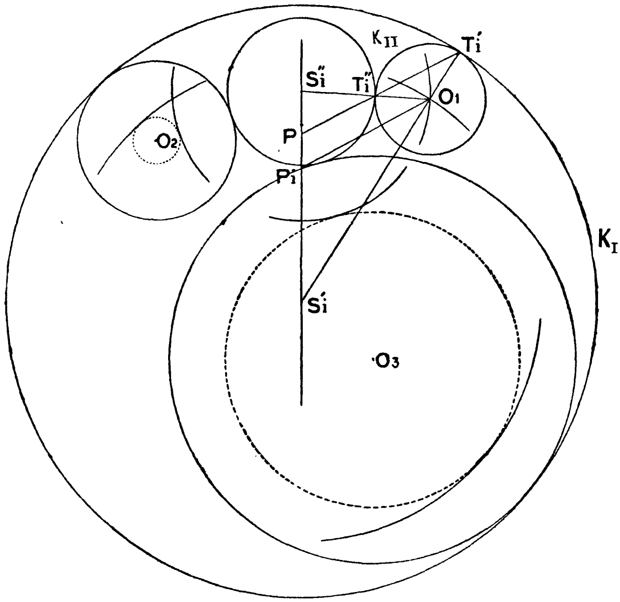
$$l_1 \sin(\beta - \alpha) - l_2 \sin\beta + l_3 \sin\alpha = 0.$$

Pošineme-li soustavu pravoúhlých souřadnic rovnoběžně z bodu A do S, bude též podmínkou věty A:

$$n_1 \sin(\beta - \alpha) - n_2 \sin\beta + n_3 \sin\alpha = 0,$$

protože místo kolmic l_1, l_2, l_3 nastoupí potom kolmice n_1, n_2, n_3, s počátku S na chordály spuštěné, v rovnicích chordál.

Je-li P_i *chordálný střed* kružnic (s danými) *soustředných*, jichž *poloměry* vztažmo se rovnají 0, $(r_2 \pm r_1)$, $(r_3 \pm r_1)$, sluší *důsledně* P_iO_1 pokládati za přímku ku PT'_i *obdobnou*, při čemž *obdobná dvojice* [1]) má *tytéž* středy jako K_I K_{II}.



Obr. 4.

Ale pak $PT'_i \parallel P_iO_1$, protože *obě tyto* přímky jsou vlastně *prodlouženými tětivami soustředných kružnic* (o poloměrech r_1 a 0), *příslušejícími* ku *společnému středovému úhlu* $T'_iO_1T''_i$. Mimo to P a P_i jakožto *středy podobnosti dvojic*, jež mají *tytéž středy* S'_i a S''_i, leží na *středné* $S'_iS''_i$. [2])

---

[1]) V obrazci jest to dvojice, která procházejíc bodem O_1 dotýká se modifikovaných kružnic, kolem O_2 a O_3 poloměry $(r_2 - r_1)$ a $(r_3 - r_1)$ opsaných.

[2]) Srov. Herrmann Thieme: Die Elemente der Geometrie na str. 161. (Plücker).

1. Sestrojení. Kromě *chordálného středu daných* kružnic P sestrojme ještě *chordálný střed* $\left\{\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix}\right\}$ *kružnic* (*s danými*) *soustředných*, jichž poloměry jsou $\left\{\begin{matrix} o, (r_2 - r_1), (r_3 - r_1) \\ o, (r_2 - r_1), (r_3 + r_1) \\ o, (r_2 + r_1), (r_3 - r_1) \\ o, (r_2 + r_1), (r_3 + r_1) \end{matrix}\right\}$.

Spojme P_i s O_1, veďme $PT'_i \parallel P_iO_1$, i obdržíme *dotyčné body* na *první dané* kružnici T'_i a T''_i.

Prodlužme $\left\{\begin{matrix} T'_iO_1 \\ T''_iO_1 \end{matrix}\right\}$ až k průsečíku s PP_i, jež zastupuje *střednou* hledané dvojice; i získáme *středy hledaných dvojic* (K_1K_2), (K_3K_4), (K_5K_6), (K_7K_8), když $i = 1, 2, 3, 4$.

β) Předpokládejme opět, že *hledané kružnice* kterékoli *dvojice se protínají* (ať v *reálných* ať *imaginárných bodech*). Pozorujeme-li jednotlivé případy *čtyř dvojic* (K_1K_2), (K_3K_4), (K_5K_6), (K_7K_8) shledáváme, jak již podotčeno, že v nich *oba členy* mají *udavatele* buď *a*) *různé* nebo *b*) *stejné*.

a) Pozorujme kružnice O_1, O_2 a O_1, O'_2 (obr. 3 *a*.) Poloměr O'_i budiž r'_i.

Mějme na zřeteli *geometrické místo* pro středy všech kružnic, jež *opsány jsouce poloměrem* r dotýkají se *kružnice K*.

Patrně leží střed $\left\{\begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O'_2 \end{matrix}\right\}$ na *průsečíku* tedy i na *chordále kružnic*, kolem S_I a S_{II} poloměry $\left\{\begin{matrix} (\varrho_1 - r_1) \text{ a } (\varrho_2 + r_1) \\ (\varrho_1 - r_2) \text{ a } (\varrho_2 + r_2) \\ (\varrho_1 + r'_2) \text{ a } (\varrho_2 - r'_2) \end{matrix}\right\}$ opsaných, protože se $\left\{\begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O'_2 \end{matrix}\right\}$ dotýká K_I $\left\{\begin{matrix} \text{uvnitř} \\ \text{uvnitř} \\ \text{vně} \end{matrix}\right\}$ a K_{II} $\left\{\begin{matrix} \text{vně} \\ \text{vně} \\ \text{uvnitř} \end{matrix}\right\}$.

Označíme-li

$S_1R = x$, $S_1S_{II} = s$, jest $AR^2 = \varrho_1^2 - x^2 = \varrho_2^2 - (x - s)^2$.

Odtud

$$2s . S_1R = \varrho_1^2 - \varrho_2^2 + s^2 \tag{6}$$

a důsledně potom

$$2s . S_1Q_1 = (\varrho_1 - r_1)^2 - (\varrho_2 + r_1)^2 + s^2 \tag{7}$$

$$2s . S_1Q_2 = (\varrho_1 - r_2)^2 - (\varrho_2 + r_2)^2 + s^2 \tag{8}$$

$$2s . S_1Q'_2 = (\varrho_1 + r'_2)^2 - (\varrho_2 - r'_2)^2 + s^2 \tag{9}$$

Odečteme-li posloupně (7), (8), (9) od (6), vychází

$$s . Q_1R = r_1 (\varrho_1 + \varrho_2), \qquad s . Q_2R = r_2 (\varrho_1 + \varrho_2),$$
$$s . Q'_2R = - r'_2 (\varrho_1 + \varrho_2),$$

odkud

$$Q_1R : Q_2R = r_1 : r_2, \quad \text{a tedy } O_1C : O_2C = r_1 : r_2 \tag{10}$$

a $$Q_1R : RQ'_2 = r_1 : r'_2, \quad \text{a tedy } O_1C' : C'O'_2 = r_1 : r'_2 \tag{11}$$

b) V tomto případě (obr. 3 *b*.) jest *dotyk* kružnice K_I s O_i a K_{II} s O_i *souhlasný*. Značí-li $\left\{ \begin{matrix} O_i \\ O'_i \end{matrix} \right\}$ kružnici, která se kružnic K_I a K_{II} dotýká $\left\{ \begin{matrix} \text{uvnitř} \\ \text{vně} \end{matrix} \right\}$, a má-li $\left\{ \begin{matrix} Q_i \\ Q'_i \end{matrix} \right\}$ obdobný význam jako v obrazci 3*a*), jest

$$s . Q_1R = r_1 (\varrho_1 - \varrho_2),$$
$$s . Q_2R = r_2 (\varrho_1 - \varrho_2),$$
$$s . Q'_2R = - r'_2 (\varrho_1 - \varrho_2),$$
$$s . Q'_3R = - r'_3 (\varrho_1 - \varrho_2); \text{ a tedy}$$

$$Q_1R : Q_2R = r_1 : r_2 \tag{12}$$

$$Q_1R : RQ'_2 = r_1 : r'_2 \tag{13}$$

$$Q'_2R : Q'_3R = r'_2 : r'_3 \tag{14}$$

Výsledek úměr (10) a (11) jakož i výsledek obdobných závěrů ze (12), (13), (14) lze vysloviti takto:

B. *Chordála* AA' *hledané dvojice* K_IK_{II} jest geometrickým *místem* $\left\{ \begin{matrix} \textit{vnějších} \\ \textit{vnitřních} \end{matrix} \right\}$ *středů podobnosti daných kružnic, leží-li jejich středy na* $\left\{ \begin{matrix} \textit{téže} \\ \textit{protivné} \end{matrix} \right\}$ *straně chordály.* —

Jinak: *Chordála hledané dvojice $K_I K_{II}$ jest osou podobnosti daných kružnic.* [3])

Důsledek věty *B*: *Každá osa podobnosti daných kružnic jest geom. místem pro společné body jedné hledané dvojice.*

Výsledkův A a B nabyli jsme *rozšířením pojmu* „o průseku dvou kružnic“, připustivše *body imaginárné.* Výsledky tyto tvoří podstatu *řešení Gergonnova* [4]), jež se právě opírá o *chordálný střed tří daných kružnic a čtyři osy podobnosti (čtyři naše chordály* hledaných dvojic). *Jedna osa* obsahuje *tři vnější středy podobnosti* a ta přísluší dvojici $(K_1 K_2)$; každá pak ze *tří* ostatních obsahuje *dva vnitřní* a *jeden vnější střed*, náležejíc buď dvojici $(K_3 K_4)$, nebo $(K_5 K_6)$, nebo $(K_7 K_8)$.

Dalšího provedení pomíjíme; bylo ukázati, že od úlohy I. k *obecnému* úkolu vede také jiná cesta než známý postup *Vietův*[5]), kterým zvětší nebo zmenší se *dané* poloměry o *stejnou* délku.

γ) Spojíme-li *důsledky vět A* a *B*, snadno určíme *každé* ze *čtyř hledaných* dvojic *dva* body (ať *reálné* ať *imaginárné sdružené*) jako průsečíky příslušných *geometrických míst.*

---

[3]) Budiž $AO_1 = d_1$, $AO_2 = d_2$, $AO_3 = d_3$.

Analytickým výrazem věty *B* jest:

$$d_2 d_3 r_1 \sin(\beta - \alpha) - d_1 d_3 r_2 \sin\beta + d_1 d_2 r_3 \sin\alpha = 0.$$

Je-li totiž chordála $K_I K_{II}$ od l_1 odchýlena o úhel φ, jest dle *B*:

$$Q_1 R : Q_2 R : Q_3 R = r_1 : r_2 : r_3, \text{ neboli}$$

$$d_1 \sin\varphi : d_2 \sin(\alpha + \varphi) : d_3 \sin(\beta + \varphi) = r_1 : r_2 : r_3.$$

Z toho pak eliminací úhlu φ hořejší vztah vyplývá.

Dosadíme-li za $r_i = \dfrac{n_i d_i}{\varrho}$ dle (5.), vyplyne konečně zase

$$n_1 \sin(\beta - \alpha) - n_2 \sin\beta + n_3 \sin\alpha = 0,$$

odkud vnitřní souvislost vět *A* a *B* patrna. — Srov. ***).

[4]) *Gergonne*, Annales de math. pures et appliquées, t. VII.

[5]) *Vieta, ve spise »Apollonius Gallus«*, 1600.

I zbývá toliko při *každé* dvojici určiti ještě *třetí* bod [6]) řešením úlohy *jednodušší*:

„*Sestrojiti kružnici, která probíhajíc dvěma body* (A, A') (*ať reálnými, ať imaginárnými* [7])) *dotýká se dané kružnice* O_i.

2. Sestrojení. *Čtyři osy podobnosti* p_1, p_2, p_3, p_4 *daných* kružnic přetneme *kružnicí* Π, všecky ***tři dané*** kružnice *kolmo sekoucí,* opsavše ji kolem *jejich chordálného středu.*

Tak obdržíme *průsečíky*: $A_1 a A'_1$, $A_2 a A'_2$, $A_3 a A'_3$, $A_4 a A'_4$. S těmi konečně provedeme naznačenou *jednodušší* úlohu, i když jsou to body *imaginárné sdružené.*

Sestrojení opírá se potom hlavně o *chordálu* π_i *dané* kružnice O_i a kružnice Π. Kolem průsečíku $\left\{\begin{matrix} M_{i1} \\ M_{i2} \\ M_{i3} \\ M_{i4} \end{matrix}\right\}$ *chordály* π_i a *osy* $\left\{\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix}\right\}$ opíšeme kružnici, která *kolmo seče* O_i, čímž nabudeme *obou třetích* bodů pro *dvojici* $\left\{\begin{matrix} K_1K_2 \\ K_3K_4 \\ K_5K_6 \\ K_7K_8 \end{matrix}\right\}$.

Poznámka. Jedná-li se jen o *24 dotyčné body* v úloze *Apolloniově*, můžeme říci, že nalézají se po *osmi* společně na **kružnici** $\left\{\begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix}\right\}$ a na *kružnicích* **tuto** *kolmo sekoucích* a kolem $\left\{\begin{matrix} M_{11}, & M_{12}, & M_{13}, & M_{14} \\ M_{21}, & M_{22}, & M_{23}, & M_{24} \\ M_{31}, & M_{32}, & M_{33}, & M_{34} \end{matrix}\right\}$ *opsaných.*

---

[6]) Bod ten vyplyne sestrojením *dvojí,* čímž rázem *obě* kružnice při *každé* dvojici jsou určeny.

[7]) V příčině *imaginárných* bodů odkazujeme čtenáře ku článku prof. dra B. Bydžovského »O imaginárných bodech«. Časopis pro pěstování math. a fys. roč. XXXIX. str. 419., odst. 18. a předcházející.

III.

Prostý obrat úlohy I.

Úloha III. *Jsou dány body* S_1, S_2, S_3, S_4; *sestrojiti bod* A *a dvě kružnice* O_1, O_2 *tak, aby čtyři kružnice, kolem středů* S_1, S_2, S_3, S_4 *opsané, bodem* A *probíhaly a kružnic* O_1, O_2 *se dotýkaly.* —

Úloha poskytuje trojí řešení a to dle toho, kterak sdružíme dané středy ve dvojice:

$[(S_1S_2), (S_3S_4)]$, $[(S_1S_3), (S_2S_4)]$, $[(S_1S_4), (S_2S_3)]$.

1. Sestrojení. (obr. 2.) *užitím algebry.*

Předpokládejme na př. dvojice $[(S_1S_2), (S_3S_4)]$. — Spojme S_1 s S_2 a S_3 s S_4; i jest průsečík P *chordálným středem hledaných kružnic* O_1O_2 *a bodu* A; zároveň pak dle důsledku I. též *středem podobnosti kružnic* K_1, K_2 *opsaných* kolem S_1, S_2 a K_3, K_4 kolem S_3, S_4, *jež procházejí vesměs bodem* A. — Sestrojme tedy dvě kružnice jako geometrická místa všech bodů*), jejichž vzdálenosti ode středů S_1 a S_2 (S_3 a S_4) jsou v poměru $S_1P : S_2P$ ($S_3P : S_4P$); i jest *jeden* průsečík bod P a *druhý* bod A. Kolem A dle důsledku II. úlohy I., opišme kružnici poloměrem AS_1, která protne AS_3 v bodě U_3, veďme $U_3M_3 \parallel PA$ (M_3 na S_3S_4), spojme S_1 s M_3, bodem P veďme rovnoběžku ku S_1M_3, a tou určili jsme p_1, jež jest chordálou kružnice O_1 (dosud neznámé) a *známého* již bodu A. Spusťme $AD_1 \perp p_1$; i zbývá na prodloužené této kolmici AX_1 ustanoviti O_1. Za tím účelem učiňme $S_1N_1 \perp p_1$, i označme $S_1N_1 = n_1$. — Dle 1. jest

$$O_1D_1 = \frac{d_1^2 + r_1^2}{2d_1},$$

a tedy

$$D_1A_1 = \frac{d_1^2 - r_1^2}{2d_1}.$$

---

*) Sestrojme bod $\left\{\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix}\right\}$ harmonický k bodu P vzhledem k bodům $\left\{\begin{matrix} S_1, S_2 \\ S_3, S_4 \end{matrix}\right\}$ a na spojnici B_1B_2 spusťme s P kolmici; pata její jest bod A; neboť A lze pokládati za průsečík kružnic opsaných nad průměry PB_1 a PB_2.

Odtud

$$O_1D_1 : D_1A = (d_1^2 + r_1^2) : (d_1^2 - r_1^2)$$

a dle (3)

$$O_1D_1 : D_1A = (\varrho_1^2 + n_1^2) : (\varrho_1^2 - n_1^2) \tag{15}$$

Dle (15) sestrojíme O_1D_1 takto:

Prodloužíme M_3S_1 do I, sřízneme na p_1 úsečku $N_1F = N_1I$ a prodloužíme n_1 přes S_1, učiníme $N_1H = N_1G$ (G průsečík kružnice K_1 s p_1); vedeme potom $AR \parallel FH$ a $RZ_1 \perp AR$, i jest průsečík O_1 středem hledaným. —

Jest totiž

$$N_1G^2 = \varrho_1^2 - n_1^2 = N_1H^2 \tag{16}$$

a

$$N_1I^2 = \varrho_1^2 + n_1^2 = N_1F^2. \tag{17}$$

Protože však

$$\triangle ARO_1 \sim \triangle HN_1F,$$

jest

$$RO_1 : RA = N_1F : N_1H;$$

ale v pravoúhlém $\triangle ARO_1$ jest též

$$RO_1^2 : RA^2 = O_1D_1 : D_1A;$$

a proto

$$O_1D_1 : D_1A = N_1F^2 : N_1H^2. \tag{18}$$

Z (18) konečně dle (16) a (17)

$$O_1D_1 : D_1A = (\varrho_1^2 + n_1^2) : (\varrho_1^2 - n_1^2).$$

Obdobně vyhledáme bod O_2 dle úměry:

$$O_2D_2 : D_2A = (\varrho_1^2 + n_2^2) : (\varrho_1^2 - n_2^2).$$

2. Sestrojení (obr. 1.) *ryze geometrické.*

Když jsme byli sestrojili *kružnice* K_1, K_2, K_3, K_4 a *chordály* p_1, p_2, opišme kružnici, kteráž *majíc střed* na $\left\{\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\}$ v bodě $\left\{\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\}$ *a procházejíc bodem A kolmo seče* kružnici K_i; *průsečíkem* $\left\{\begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \end{matrix}\right\}$ určen jest *dotyčný bod* kružnice $\left\{\begin{matrix} O_1 \\ O_2 \end{matrix}\right\}$ *s kružnicí* K_i.

Důkaz plyne z pojmu *chordály* $\left\{\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\}$.

(Dokončení.)