Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 3, 148--160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123196

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 1.

(Podává *Cel. Sommer*, technik.)

O trojúhelníkových úhlech platí

$$sin\,2\alpha + sin\,2\beta + sin\,2\gamma = 4\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,,$$

$$sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma = 4\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\,cos\,\frac{\gamma}{2}\,;$$

použijeme-li tedy vzorce

$$sin\,\mu = 2\,sin\,\frac{\mu}{2}\,cos\,\frac{\mu}{2}\,,$$

obdržíme z prvního snadno

$$\frac{2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha + 2\,sin\,\beta\,cos\,\beta + 2\,sin\,\gamma\,cos\,\gamma}{sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma} = 4$$

$$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\beta\,sin\,\gamma} + \frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma\,sin\,\alpha} + \frac{cos\,\gamma}{sin\,\alpha\,sin\,\beta} = 2,$$

a podobně druhého

$$\frac{sin\,\frac{\alpha}{2}}{cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\gamma}{2}} + \frac{sin\,\frac{\beta}{2}}{cos\,\frac{\gamma}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{sin\,\frac{\gamma}{2}}{cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}} = 2,$$

z čehož vyplývá stejnina v úloze vytknutá.

(Tutéž úlohu řešil spůsobem opačným *Vojt. Kocourek*, žák VII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

Řešení úlohy 2.

podali ještě v čas žáci VII. gym. *Al, Wolf* v Budějovicích a *Fr. Sýkora* v Praze (ústav Maade-ho).

Řešení úlohy 4.

(Podává *V. Kocourek*).

Položíme-li ve vzorci

$$-l(1-x) = l\,\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

$$x = \frac{1}{2},$$

obdržíme stejninu v úloze vytknoutou.

(Podává *B. Sixta*, technik).

Jest-li všeobecněji

$$S = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots$$

bude pro $x = 2y$

$$S = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots$$

a tudíž, derivujeme-li podle y,

$$\frac{dS}{dy} = 1 + y + y^2 + \ldots + \frac{1}{1-y},$$

z čehož se obdrží integrováním

$$S = C - l(1-y) = C + l\,\frac{2}{1-x},$$

aneb poněvadž se obdrží pro $x = o$ jest; $S = o$ a tudíž i $C = o$,

$$S = l\,\frac{2}{2-x};$$

učiníme-li tu $x = 1$, zjednáme si konečně vzorec hledaný.

Řešení úlohy 5.

(Podává *Al. Strnad*, technik.)

Použijeme-li místo Krampova označení funkcí Γ, při čemž platí

$$z^{n,1} = (z+1)(z+2)\ldots(z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

a položíme-li dále

$$\frac{1}{z^{n+1,1}} + \frac{1}{(z+1)^{n+1,1}} + \frac{1}{(z+2)^{n+1,1}} + \ldots = R$$

zjednáme si především

$$R = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} + \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+n+2)} + \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z+n+3)} + \ldots,$$

což dle známého pravidla

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\,\Gamma(a)$$

přetvoří se snadno v

$$R = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)}\left[1 + \frac{z}{z+n+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{z(z+1)}{(z+n+1)(z+n+2)} + \ldots\right].$$

Jmenujeme-li řadu v závorkách obsaženou S, použijme, abychom součet její ustanovili, známého vzorce

$$\int_0^1 x^m (1-x)^{p-1}\, dx = \frac{m}{m+p}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{p-1}\, dx$$

a položme zároveň

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n\, dx = I,$$

načež podle něho postupně obdržíme

$$\int_0^1 x^z\,(1-x)^n\, dx = \frac{z}{z+n+1}\, I,$$

$$\int_0^1 x^{z+1}(1-x)^n\, dx = \frac{z\,(z+1)}{(z+n+1)(z+n+2)}\, I,$$

$$\begin{matrix} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{matrix}$$

a sečteme-li na obou stranách,

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n (1+x+x^2+\ldots)\, dx = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{n-1}\, dx = SI,$$

čili dle známého *) označení krátce

$$IS = B\,(z, n).$$

Poněvadž ale podle předcházejícího

$$I = B\,(z, n+1),$$

obdržíme, spojíme-li poslední dvě rovnice,

$$S = \frac{B\,(z, n)}{B\,(z, n+1)}$$

a za tou příčinou konečně

$$R = \frac{\Gamma(z)\, B\,(z, n)}{\Gamma(z+n+1)\, B\,(z, n+1)}.$$

Nahradíme-li pak ve výrazu posledním funkci B funkcí Γ dle vzorce

---

*) Srovnej *Studnička* „Základové vyšší mathematiky“ Díl II. pag. 92.

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

obdržíme, zároveň používajíce vzorce

$$\Gamma(n+1)=\Gamma(n),$$

$$R=\frac{\Gamma(z)}{n\,\Gamma(z+n)}.$$

Avšak dle první stejniny jest

$$\frac{\Gamma(z)}{n\,\Gamma(z+n)}=\frac{1}{z^{n,1}}=R,$$

čímž úkol předložený jest řešen.

Poznámka redakce. Použijeme-li stejniny

$$a_1=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\ldots$$

a položíme-li

$$a_k=\frac{1}{(z+k-1)(z+k)\ldots(z+k+n-2)},$$

tedy $$a_{k+1}=\frac{1}{(z+k)(z+k+1)\ldots(z+k+n-1)},$$

obdržíme snadno

$$a_1=\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}=\frac{1}{z^{n,1}},$$

$$a_k-a_{k+1}=\frac{n}{z(z+k-1)(z+k)\ldots(z+k+n-1)}=\frac{n}{(z+k-1)^{n+1,1}},$$

z čehož je pro $k=1,2,3\ldots$

$$a_1-a_2=\frac{n}{z^{n+1,1}},$$

$$a_2-a_3=\frac{n}{(z+1)^{n+1,1}},$$

$$a_3-a_4=\frac{n}{(z+2)^{n+1,1}},$$

$$\vdots$$

načež dosazením těchto hodnot do první stejniny povstane vzorec v úloze předložený.

Řešení úlohy 6.

(Podává *Ed. Weyr.*)

Aby se předložená úloha řešila, postačí znáti poučku tuto:

„Jsou-li pp', qq', rr' body, z nichž kuželosečka tři po sobě jdoucí strany ab, bc, ca trojúhelníka abc protíná, jest vždy

$$\frac{ap}{bp}\cdot\frac{ap'}{bp'}\cdot\frac{bq}{cq}\cdot\frac{bq'}{cq'}\cdot\frac{cr}{ar}\cdot\frac{cr'}{ar'}=1$$

a naopak.“

Důkaz této poučky *) jest velmi jednoduchý, neboť jest dle známé věty její platnost pro kruh patrna a mimo to není nesnadno dokázati, že levá strana napsané rovnice se promítáním nikterak nemění. **) Znajíce tuto větu, jest správnost naší úlohy patrna; neboť z podobností trojúhelníků vzniklých vedením tří rovnoběžek vysvitá, že oněch 6 průsečíků skutečně vyhovuje oné podmíněné rovnici.

Takto dokázanou větu můžeme též snadno rozšířiti. Protneme-li totiž strany ab, bc, ca libovolnou přímkou v bodech 1, 2, 3 a spojíme-li tyto body s libovolným bodem o, obdržíme 3 nové přímky protínající strany trojúhelníku ještě v 6 bodech; body tyto jsou v kuželosečce.

Dle poučky *Menelaovy* jest totiž

$$\frac{a1}{b1}\cdot\frac{b2}{c2}\cdot\frac{c3}{a3}=1.$$

Protne-li pak 01 strany $\overline{bc}$ a $\overline{ca}$ v bodech q resp. r

„ „ 02 „ $\overline{ab}$ a $\overline{ca}$ „ p „ r'

„ „ 03 „ $\overline{ab}$ a $\overline{bo}$ „ p' „ q',

bude patrně vždy dle poučky Menelaovy:

$$\frac{a1}{b1}\cdot\frac{bq}{cq}\cdot\frac{cr}{ar}=1,$$

$$\frac{ap}{bp}\cdot\frac{b2}{c2}\cdot\frac{cr'}{ar'}=1,$$

$$\frac{ap'}{bp'}\cdot\frac{bq'}{cq'}\cdot\frac{c3}{a3}=1.$$

---

*) *Poncelet* poukazuje ve svém „*Traité despropr. proj.* etc.“ k důležitosti tohoto theorému, tvrdě, že lze na jeho základě snadno vyvoditi ostatní charakteristické vlastnosti všech kuželoseček. Viz. pag 18, díl I., 2. vydání.

**) Viz „Základové vyšší geometrie, Živa 1871“ str. 16, kdež postačí použíti relace $\frac{\gamma}{\gamma}=\frac{ta}{tb}\cdot\frac{tb'}{ta'}$.

Násobíme-li a vyloučíme-li součin $\frac{a1}{b1} \cdot \frac{b2}{c2} \cdot \frac{c3}{a3} = 1$, obdržíme rovnici dokazující právě udanou poučku.

(Jiný způsob řešení podáme budoucně.)

Řešení úlohy 7.

(Podává *K. Zahradník.*)

Prodloužíme-li protilehlé dvě strany čtyrúhelníku $ABCD$ *), na př. $AB = a$, $CD = c$, až se protnou v bodu E a označíme-li délky $BE = x$, $CE = y$, obdržíme dva podobné trojúhelníky ADE a BCE, o nichž platí

$$\frac{ADE}{BCE} = \frac{d^2}{b^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c+y}{x} = \frac{a+x}{y}, \tag{2}$$

načež plyne z rovnice (1)

$$\frac{ADE-BCE}{BCE} = \frac{ABCD}{BCE} = \frac{d^2-b^2}{b^2}, \tag{3}$$

a z rovnice (2)

$$x = b\frac{ad+bc}{d^2-b^2}, y = b\frac{ab+cd}{d^2-b^2}. \tag{4}$$

Poněvadž o ploše trojúhelníku platí

$$16\,\overline{BCE}^2 = (x+y+b)(x+y-b)(x-y+b)(-x+y+b)$$

a v tomto případě pomocí vzorců (4) snadno se sestaví

$$x+y+b = b\frac{a+c+d-b}{d-b},$$

$$x+y-b = b\frac{a+b+c-d}{d-b},$$

$$x-y+b = b\frac{-a+b+c+d}{d+b},$$

$$-x+y+b = b\frac{a+b-c+d}{d+b},$$

obdržíme, znásobivše tyto 4 rovnice,

$$\overline{BCE}^2 = \frac{b^4}{(d^2-b^2)^2}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

zavedeme-li zároveň označení

*) Výkres si laskavý čtenář snadno sám učiní.

$$2s = a + b + c + d.$$

Vyloučíme-li tedy z rovnice (3) a (5) BCE, zjednáme si konečně pro plochu trojúhelníku vzorec

$$ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

jakž v úloze jest udáno. *)

Řešení úlohy 9.

(Podává *F. Till*, technik.)

Vedeme-li k bodu M**) paraboly tečnu a spustíme-li s nějakého bodu jejího T kolmou TP na průvodič MF a kolmou TS na přímku $MN \perp$ stojící na ředitelce, bude

$$\triangle\, TSM \cong TPM$$

a tudíž $SM = PM$;

poněvadž ale $NM = MF$,

jest $PF = NS = TR.$

Na základě této relace možná vysloviti pravidlo, podle něhož má se vésti tečna, takto:

S daného bodu spustí se kolmá na ředitelku, touto kolmicí co poloměrem opíše se z ohniska kruh a k němu vedou se tečny s daného bodu; bodem dotyčným jdoucí poloměry prodlouží se až k parabole, kdež naznačují body dotyčné.

(Tutéž úlohu řešil spůsobem analytickým *Štejnar*, technik a *Fr. Sýkora*.)

Řešení úlohy 10.

(Podává *Jan Flieder*, technik.)

Za míru křivosti nějaké křivky má se obrácená hodnota poloměru křivosti R, tedy

---

*) Vzorec tento znal již *Brahmegupta*, mathematik indický, jehož činnost připadá mezi VI. a VII. st. po Kr. Později uvádí jej *Bhascara Acharya* ze XII. st. o čtyrúhelníku libovolném. Též *Snellius* (1591 až 1626) připisuje si tento vzorec v kommentáru ku spisu Ludolfa van Ceulena „De problematibus miscellancis.“ Dvoje řešení podal *Filip Naude* v „Miscell. Berol. t. III. 1723, načež *Euler* (1707—1783) nový geometrický důkaz podal v „N. comm. Ac. Petrop. t. I. 1747 až 1748; tamtéž v t. x. 1792 uveřejnil i *Fuss* nový důkaz a od té doby objevuje se vzorec tento dosti zhusta i v lepších knihách učebních.

**) Příslušný výkres snadno si každý sestrojí, při čemž se jen připomíná, že máme na zřete-li bod, jest úsečka i pořadnice jest posit. a menší nežli u bodu M.

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

podmínka pro maximum neb minimum jest pak

$$D_x\left(\frac{1}{R}\right) = 0$$

aneb

$$(1 + y'^2)\, y''' = 3y'y''^2.$$

Z rovnice křivky jde ale

$$y' = \frac{2}{3} + \frac{3x^2}{a^2},\; y'' = \frac{6x}{a^2},\; y''' = \frac{6}{a^2},$$

čímž se poslední podmínka promění v

$$405x^4 + 72a^2x^2 - 13a^4 = 0,$$

kterážto rovnice má reálné kořeny

$$x = \pm\frac{a}{3};$$

k těmto dvěma úsečkám náleží pak co pořadnice

$$y = \pm\frac{19}{8}a.$$

Body křivky, jichž křivost může býti největší neb nejmenší, jsou tedy

$$M_1\left(\frac{9}{3}, \frac{7a}{27}\right),\; M_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{7a}{27}\right).$$

Který případ tu nastává, rozhodne označení $D_x^2\left(\frac{1}{R}\right)$; dosadíme-li do tohoto výrazu příslušné hodnoty, poznáme, že jest positivní, za kteroužto příčinou platí *minimum*. Absolutní délka poloměru R jest tu $a\sqrt{2}$.

(Tytéž výsledky obdržel *J. Chvála*, technik.)

Řešení úlohy 11.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Vyjádříme-li délku poloměru křivosti, tangenty a subtangenty známými vzorci, bude dle úlohy

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} : a = \frac{y}{y'}(1 + y'^2)^{1/2} : \frac{y}{y'},$$

z čehož se obdrží co differenciální rovnice hledané křivky

$$1 + y'^2 = ay'' = a\frac{dy'}{dx};$$

integrujeme-li, obdržíme především

$$x = A + a \operatorname{arc} tg\, y',$$

z čehož obrácením povstane

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg \frac{x - A}{a},$$

načež opětným integrováním se obdrží

$$y = B - a\, l \cos \frac{x - A}{a}$$

aneb

$$e^{\frac{y - B}{a}} \cos \frac{x - A}{a} = 1$$

co konečné rovnice hledané křivky, kteráž tu sluje *stejněpnutá řetěznice.*

(Tutéž úlohu správně řešil *K. Zahradník, J. Flieder* a *J. Chvála*, technikové.)

Řešení úlohy 12.

(Podává *J. Veber*, technik.)

Soustava parabol ustanovena tu rovnicí

$$y^2 = 2p\, x,$$

v níž p jest proměnný parametr, za kteroužto příčinou bude differenciální rovnice hledané trajektorie

$$1 + \frac{y}{2x} \frac{dy}{dx} = o,$$

z níž jde integrováním

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = A,$$

kterážto rovnice značí elipsy homothetické, jichž poměr poloos značí

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Tutéž úlohu řešili technikové *J. Chvála, J. Flieder, Jos. Neumann, A. Strnad* a *Fr. Till.*)

Poznámka. Jinak pojal soustavu parabol daných *K. Zahradník;* rovnice její jest

$$(y - a)^2 = 2px,$$

kdež a značí parametr proměnný, načež se obdrží co differenciální rovnice hledané trajektorie

$$1+\sqrt{\frac{p}{2}}\,\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}=0,$$

z níž jde integrováním

$$(y-c)^2=\frac{8}{27p}x^3,$$

což jest rovnice paraboly semikubické čili Neilovy, která se nám též evolutou paraboly obecné býti jeví.

Řešení úlohy 14.

(Podává *Jos. Neumann*, technik.)

Rovnici předložené možná dáti tvar

$$\frac{y^{IV}}{y'''}=\frac{y''}{y'},$$

načež se integrováním obdrží

$$y'''-c_1y'=0,$$

kterážto zkrácená lineární rovnice se stálými koëfficienty má integrál

$$y=C_2+C_3\,e^{x\sqrt{c_1}}+C_4\,e^{-x\sqrt{c_1}}$$

(Tutéž úlohu řešili správně technikové *A. Strnad*, *Fr. Podhajský*, *J. Flieder* a *B. Sixta.*) *)

Úloha 22.

Mají se zvoliti čtyry závaží tak, aby se jimi dalo vážiti od 1 až do 40.

Úloha 23.

Dělíme-li nějaké číslo 3, 5 a 7, obdržíme co zbytek a, b a b; které číslo jest to?

Úloha 24.

Má se řetězovým zlomkem vyjádřiti poměr mezi délkou strany pravidelného sedmiúhelníku a poloměru opsaného kruhu.

Úloha 25.

Dva vrcholy trojúhelníku jsou body pevné, třetí probíhá přímku; jaké jest geometrické místo těžiska a průsečíku výšek proměnlivého trojúhelníku tohoto?

Úloha 26.

Nechť se řeší tato úloha pro ten případ, že třetí vrchol probíhá kružnici.

---

*) Řešení dalších úloh bude uveřejněno v sešitu IV.

Úloha 27.

Má se určiti hodnota neurčitého výrazu

$$\int^{\infty} \frac{x}{a+bx^2}\, l(\alpha + \beta e^x).$$

Úloha 28.

Má se ustanoviti součet nekonečné řady

$$1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^9}{9!} + \dots$$

Úloha 29.

Má se určiti obsah tělesa omezeného positivními částmi rovin souřadnicových a plochou, jejíž rovnice jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax^2 + by^2 + cz^2)^2.$$

Úloha 30.

Má se vyhledati křivka, o níž platí

$$R\, r_n = r^2,$$

značí-li r průvodiče, r_n průmět jeho na normálu a R poloměr křivosti.

II. Z fysiky.

Ještě v čas zaslali

řešení úlohy 1., 2., 3. a 4.

V. Kocourek a *Al. Wolf*, žáci VII. tř. č. gym. v Budějovicích a *Steiner*, technik;

řešení úlohy 5.

F. Steinar a *Fr. Sýkora*.

Řešení úlohy 6.

Délka válce musí býti menší nežli 3·72″.

(Správné řešení zaslal *Fr. Sýkora* a *F. Steinar*.)

Řešení úlohy 7.

zaslal v čas ještě *F. Sýkora*, *F. Stejnar* a *Al. Wolf.*

Řešení úlohy 8.

(Podává *Jaroslav Šimek*, žák VIII. tř. r. gym. Maadeho.)

Rychlost, kterou udělí kaule m sousední m', jest

$$a_1 = \frac{2ma}{m+m'},$$

a kterou udělí m' na to kouli m'', podobně

$$a_2 = \frac{2ma_1}{m' + m''},$$

z čehož jde, vyloučíme-li a_1,

$$a_2 = \frac{4\,mm'\,a}{(m + m')\,(m' + m'')}.$$

Aby bylo a_2 maximum, musí býti výraz

$$\left(\frac{m}{m'} + 1\right)(m' + m'')$$

minimum; derivujeme-li tedy podlé m', obdržíme

$$-\frac{m}{m'^2}(m' + m'') + \frac{m}{m'} + 1 = 0,$$

z čehož se obdrží podmínka

$$m = \sqrt{mm''};$$

hmota prostřední koule musí tedy býti geometrickým průměrem mezi hmotou první a poslední.

(Správně řešení zaslal též *F. Stejnar.*)

Řešení úlohy 16.

Výslednice $R. = 14{\cdot}176$ a úhly, jež uzavírá se směrem jednotlivých sil, $\alpha = 35^0\,47'$, $\beta = 66^0\,24'\,40''$, $\gamma = 64^0\,45'.54''\,5$

(Správné řešení zaslali *F. Čecháč*, žák VII. tř. r. gym. v Praze, *Fr. Sýkora*, *V Kocourek*, *A. Wolf*, *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

Řešení úlohy 18.

Poloměr zrcadla měří $^4/_3{}^m$.

(Správné řešení zaslal *V. Kocourek*, *A. Wolf*, *F. Sýkora*, *F. Čecháč*, *T. Havlíček*, *K. Jakubec*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích a *A. Sucharda*, ž. VI. tř. r. v K. Hoře.)

Úloha 22.

Kolem válce délky l a tlouštky $2r = 1^m$, zhotoveného z dřeva lípového hutnosti 0·6 má se těsně ovinouti zinkový povlak; jak tlustý musí býti, aby hutnost spojených hmot byla 3, značí-li hutnost zinku 7·19.

Úloha 23.

Kam se má na trojúhelníkovou desku postaviti závaží P, aby v rozích nesoucí dělníci nesli v poměru $p:q:r$.

Úloha 24.

V jakém úhlu musí se vrhnouti danou rychlostí v hmotný bod, aby parabola jeho dráhy měla plochu co možná největší.

Úloha 25.

Nit absolutně ohebná jest zavěšena ve dvou stejně vysoko položených bodech; jak musí se měniti od bodu k bodu průřez její, má-li v stavu rovnováhy míti tvar polokruhu. (Jedině přítažnost zemská působí tu na ni.)

Úloha 26.

V jaké době spadne hmotný bod s výšky a k středu přítažnosti, řídící se do vzdálenosti obráceným poměrem kubickým.