Huyghensův princip v teorii vedení tepla.

Jan Potoček, Brno.

(Došlo 12. února 1936.)

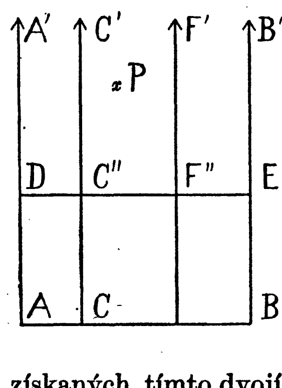
Uvažujme o této klasické úloze: Nalézti rozdělení teploty v rovné tyči nekonečně malého průřezu, tepelně isolované, je-li dáno rozdělení teploty v čase $t = 0$ a je-li předepsáno, jak se mění teplota na koncích tyče. To znamená řešiti Fourierovu rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad 0 < z < h, \; t > 0 \tag{1}$$

s podmínkami

$$v(z, 0) = f(z), \; v(0, t) = \varphi_1(t), \; v(h, t) = \varphi_2(t). \tag{2}$$

Je tedy dána funkce v na okrajích nekonečně dlouhého pruhu $A'ABB'$ (viz obr.) a hledáme její hodnotu v libovolném bodě P uvnitř pruhu. Vypočteme-li však rozdělení teploty v okamžiku $t_1 > 0$, t. j. známe-li hodnoty funkce v na úsečce $\overline{DE}$, můžeme počítati její hodnotu v bodě P z dat na obvodu pruhu $A'DEB'$.



Srovnáním výsledků získaných tímto dvojím postupem obdržíme součtovou poučku (adiční teorém) pro Greenovu funkci, jež patří k dané úloze. O tomto užití Huyghensova principu v úloze o teple zmínil se Hadamard ve svých přednáškách konaných v Praze r. 1928[1]) a poznamenal, že existuje ještě jeden adiční teorém, ke kterému se dojde, určí-li se časový průběh teploty v bodě C tyče a počítá-li se hodnota funkce v v bodě P z hodnot na okraji pruhu $C'CBB'$. Jsou tedy dvě poučky pro Greenovu funkci.

V tomto článku, za jehož námět děkuji panu prof. Hostinskému, odvozuji analytické vyjádření obou pouček, jež dává podle Hadamarda užití Huyghensova principu. Jsou to poučky označené (I) a (II).[2])

Dále ukazuji, že poučka (II) plyne z poučky (I) jako její přímý důsledek. Podává zde tedy Huyghensův princip vlastně jen jednu poučku.

Rovnice (I) a (II) vyjadřují vztahy mezi dvěma Greenovými funkcemi, příslušnými sice téže Cauchyově úloze, ale dvěma intervalům různé délky. Adiční teorémy obsahující jen jednu funkci [vzorce (9) a (12)] plynou z nich jako jejich zvláštní případ. Rovněž jako zvláštní případ se z nich dostanou některé poučky pro funkce theta, odvozené G. Doetschem.[3])

Řešení rovnice (1) s podmínkami (2) [předpokládejme, že funkce $f(x)$, $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ jsou spojité], jest vyjádřeno vzorcem[4])

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \int_0^h u(h; z, \zeta, t)\, f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta + \\ & + \varkappa \int_0^t \varphi_1(\tau) \left\{\frac{\partial u(h; z, \zeta, t-\tau)}{\partial \zeta}\right\}_{\zeta=0} \mathrm{d}\tau - \\ & - \varkappa \int_0^t \varphi_2(\tau) \left\{\frac{\partial u(h; z, \zeta, t-\tau)}{\partial \zeta}\right\}_{\zeta=h} \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Greenova funkce $u(h; z, \zeta, t-\tau)$ vyhovuje adjungované rovnici

---

[1]) J. Hadamard: Huyghensův princip. Časopis pro pěst. mat. a fys. 58 (1929), 346—366; viz str. 360.

[2]) Viz moje sdělení „O funkčních rovnicích, které se vyskytují v nauce o vedení tepla“, Zprávy o II. sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha 1934; Časopis pro pěst. mat. a fys. 64 (1935), 237—238.

[3]) G. Doetsch: Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschrift 40 (1935), 613—628.

[4]) Viz na př. H. S. Carslaw, Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids, London 1921, p. 172.

v proměnných τ, ζ,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{4}$$

s podmínkami

$$\begin{gathered} u(h; z, 0, t) = u(h; z, h, t) = 0, \\ \lim_{\substack{t=\tau \\ z \neq \zeta}} u(h; z, \zeta, t - \tau) = 0, \\ \lim_{t=\tau} \int_0^h u(h; z, \zeta, t - \tau)\, \mathrm{d}\zeta = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Vyjádřeme Huyghensův princip, berouce pro souměrnost za pomocnou oblast pruh $C'C''F''F'$ položený uvnitř původní ovlasti $A'ABB'$.

Buď (a, b) interval položený uvnitř intervalu $(0, h)$ a položme $z - a = x$, $\zeta - a = \xi$. $(a < x,\ \xi < b)$. Zavedeme-li Greenovu funkci $u(b - a;\ x, \xi, t - \tau)$, můžeme vyjádřiti funkci $v(z, t_1 + t_2)$ pro každé z v intervalu (a, b) vzorcem:

$$\begin{aligned} v(a + x, t_1 + t_2) &= \int_0^{b-a} u(b - a;\ x, \xi, t_2)\, v(a + \xi, t_1)\, \mathrm{d}\xi + \\ &+ \varkappa \int_0^{t_2} v(a, t_1 + \tau) \left\{ \frac{\partial u(b - a;\ x, \xi, t_2 - \tau)}{\partial \xi} \right\}_{\xi=0} \mathrm{d}\tau - \\ &- \varkappa \int_0^{t_2} v(b, t_1 + \tau) \left\{ \frac{\partial u(b - a;\ x, \xi, t_2 - \tau)}{\partial \xi} \right\}_{\xi=b-a} \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Nahraďme hodnoty funkce v příslušnými výrazy, vzatými z rovnice (3) a položme v rovnici, kterou takto dostaneme, postupně $f(z) = 1$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$ a $f(z) = 0$, $\varphi_2(t) = 0$, $\varphi_1(t) = 1$. Vyjdou tyto dva vztahy:

(I)
$$\begin{aligned} u(h;\ & a + x, z, t_1 + t_2) = \\ &= \int_0^{b-a} u(b - a;\ x, \xi, t_2)\ u(h;\ a + \xi, z, t_1)\, \mathrm{d}\xi + \\ &+ \varkappa \int_0^{t_2} \left\{ \frac{\partial u(b - a;\ x, \xi, t_2 - \tau)}{\partial \xi} \right\}_{\xi=0} u(h;\ a, z, t_1 + \tau)\, \mathrm{d}\tau - \end{aligned}$$

$$-\varkappa\int_0^{t_2}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,x,\,\xi,\,t_2-\tau)}{\partial\xi}\right\}_{\xi=b-a} u(h;\,b,\,z,\,t_1+\tau\,)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\text{(II)}\qquad \int_0^{t_1+t_2}\left\{\frac{\partial u(h;\,a+x,\,\zeta,\,t_1+t_2-\tau)}{\partial\zeta}\right\}_{\zeta=0}\mathrm{d}\tau=$$

$$=\int_0^{b-a}\int_0^{t_1} u(b-a;\,x,\,\xi,\,t_2)\left\{\frac{\partial u(h;\,a+\xi,\,z,\,t_1-\tau)}{\partial z}\right\}_{z=0}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\;+$$

$$+\varkappa\int_0^{t_2}\int_0^{t_1+\tau}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,x,\,\xi,\,t_2-\tau)}{\partial\xi}\right\}_{\xi=0}\left\{\frac{\partial u(h;\,a,\,z,\,t_1+\tau-\sigma)}{\partial z}\right\}_{z=0}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\;-$$

$$-\varkappa\int_0^{t_2}\int_0^{t_1+\tau}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,x,\,\xi,\,t_2-\tau)}{\partial\xi}\right\}_{\xi=b-a}\left\{\frac{\partial u(h;\,b,\,z,\,t_1+\tau-\sigma)}{\partial z}\right\}_{z=0}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau.$$

Dosadíme-li do (II) $t_1 = 0$, $t_2 = t$, dostaneme vzorec jednodušší

$$\text{(IIa)}\qquad \left\{\frac{\partial u(h;\,a+x,\,\zeta,\,t-\sigma)}{\partial\zeta}\right\}_{\zeta=0}=$$

$$=\varkappa\int_0^{t}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,x,\,\xi,\,t-\tau)}{\partial\xi}\right\}_{\xi=0}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,a,\,z,\,\tau-\sigma)}{\partial z}\right\}_{z=0}\mathrm{d}\tau\;-$$

$$-\varkappa\int_0^{t}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,x,\,\xi,\,t-\tau)}{\partial\xi}\right\}_{\xi=b-a}\left\{\frac{\partial u(b-a;\,b,\,z,\,\tau-\sigma)}{\partial z}\right\}_{z=0}\mathrm{d}\tau.$$

Vzorec (I) a (II) po př. (IIa) vyjadřují vztahy mezi dvěma Greenovými funkcemi, příslušnými témuž Cauchyovu problému danému rovnicí (1) a podmínkami (2), ale dvěma intervalům různé délky. Tyto dva vzorce právě jsou analytickým vyjádřením dvou adičních theorémů, které měl Hadamard ve své přednášce na mysli.

Vzorci (II) můžeme dáti přehlednější tvar. Rovnice (3) psává se pro $f(z) = 0$ také takto (viz na př. Carslaw, l. c., str. 69):

$$v(z,\,t)=\int_0^{t}\varphi_1(\tau)\,\frac{\partial\Phi_1(h;\,x,\,t-\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\;+$$

$$+\int_0^{t}\varphi_2(\tau)\,\frac{\partial\Phi_2(h;\,x,\,t-\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau.$$

Funkce Φ_1 resp. Φ_2 souvisí s u vztahy:

$$
\begin{aligned}
\varkappa \left\{ \frac{\partial u(h;\, x, \zeta, t)}{\partial \zeta} \right\}_{\zeta=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(h;\, x, t) \\
-\varkappa \left\{ \frac{\partial u(h;\, x, \zeta, t)}{\partial \zeta} \right\}_{\zeta=h} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2(h;\, x, t),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

a znamenají rozdělení teploty v tyči v okamžiku t, je-li počáteční teplota tyče rovna nule (až na koncový bod) a jsou-li konce tyče udržovány na teplotách 1 v bodě $z = 0$, 0 v bodě $z = h$, resp. 0 v bodě $z = 0$, 1 v bodě $z = h$. Odtud plynou rovnosti

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(h;\, 0, t) &= \Phi_2(h;\, h, t) = 1, \\
\Phi_1(h;\, h, t) &= \Phi_2(h;\, 0, t) = 0, \\
\Phi_1(h;\, z, 0) &= \Phi_2(h;\, z, 0) = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

a zřejmý vztah

$$
\Phi_2(h;\, z, t) = \Phi_1(h;\, h - z, t).
$$

Nahradíme ve vzorci (II) derivace u derivacemi funkcí Φ_1 a Φ_2 podle (7) a provedeme integraci; dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(h;\, a + x, t_1 + t_2) = &\int_0^{b-a} u(b - a;\, x, \xi, t_2)\, \Phi_1(h;\, a + \xi, t_1)\, \mathrm{d}\xi + \\
&+ \int_0^{t_2} \frac{\partial \Phi_1(b - a;\, x, \tau)}{\partial \tau} \Phi_1(h;\, a, t_1 + t_2 - \tau)\, \mathrm{d}\tau + \\
&+ \int_0^{t_2} \frac{\partial \Phi_2\, (b - a;\, x, \tau)}{\partial \tau} \Phi_1(h;\, b, t_1 + t_2 - \tau)\, \mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
\tag{II'}
$$

nebo pro zvl. případ $t_1 = 0$, $t_2 = t$.

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(h;\, a + x, t) = &\int_0^{t} \frac{\partial \Phi_1(b - a;\, x, \tau)}{\partial \tau} \Phi_1(h;\, a, t - \tau)\, \mathrm{d}\tau + \\
&+ \int_0^{t} \frac{\partial \Phi_2(b - a;\, x, \tau)}{\partial \tau} \Phi_1(h;\, b, t - \tau)\, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{II'a}
$$

Vzorce (II') resp. (IIa') jsou v podstatě totožné se vzorci (II), resp. (IIa).

Vztah (II') — stejně vztah (II) — dá se odvodit také přímo ze vztahu (I). Derivujme obě strany rovnice (I) podle z a hodnotu pro $z = 0$ integrujme podle t_1 od nuly do t_1. Dostaneme po úpravě pomocí vztahů (8):

$$\Phi_1(h;\ x + a, t_1 + t_2) = \int_0^{b-a} u(b - a;\ x, \xi, t_2)\, \Phi_1(h;\ a + \xi, t_1)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{t_2} \frac{\partial \Phi_1(b - a;\ x, \tau)}{\partial \tau}\, \Phi_1(h;\ a, t_1 + t_2 - \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_2} \frac{\partial \Phi_2(b - a;\ x, \tau)}{\partial \tau}\, \Phi_1(h;\ b, t_1 + t_2 - \tau)\, d\tau -$$

$$- \Phi_1(h;\ x + a, t_2) + \int_0^{t_2} \frac{\partial \Phi_1(b - a;\ x, \tau)}{\partial \tau}\, \Phi_1(h;\ a, t_2 - \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_2} \frac{\partial \Phi_2(b - a;\ x, \tau)}{\partial \tau}\, \Phi_1(h;\ b, t_2 - \tau)\, d\tau.$$

Levá strana a prvé tři členy na pravé straně dají rovnici (II′), ukážeme-li, že poslední tři členy [jež anulovány dají (IIa′)] mají za součet nulu. Položme v rovnici (I) $t_1 = 0$, derivujme podle z a hodnotu pro $z = 0$ integrujme podle t_2 od nuly do t_2. Po úpravě vyjde vskutku rovnice (IIa′) pro $t = t_2$, neboli součet posledních 3 členů předešlé rovnice roven nule.

Poskytuje tedy užití Huyghensova principu v uvedené úloze o šíření tepla v podstatě pouze jednu součtovou poučku pro příslušnou Greenovu funkci, a to poučku (I).

Pokusme se nyní odvodit z pouček (I) a (II)) součtové poučky pro jedinou funkci.

Položme ve vzorci (I) $a = 0$, $b = h$. Funkce u je, jak známo, souměrná v proměnných z, ζ [viz níže vzorec (13)], takže platí-li (5), platí také

$$u(h;\ 0, z, t) = u(h;\ h, z, t) = 0.$$

Dostaneme tedy

$$u(h;\ x, z, t_1 + t_2) = \int_0^{h} u(h;\ x, \xi, t_2)\ u(h;\ \xi, z, t_1)\, d\xi, \tag{9}$$

což je známá rovnice Smoluchowského.

Provedeme-li totéž ve vzorci (II), dostaneme se zřetelem na (8):

$$\Phi_1(h; x, t_1 + t_2) = \Phi_1(h; x, t_2) + \int_0^h u(h; x, \xi, t_2)\, \Phi_1(h; \xi, t_1)\, \mathrm{d}\xi, \quad (10)$$

kde se však vyskytuje mimo funkci Φ_1 ještě funkce u.

Vzorec (IIa′) dal by zřejmě identitu. Položme v něm tedy jen $b = h$. Dostaneme

$$\Phi_1(h; a + x, t) = \int_0^t \frac{\partial \Phi_1(h - a; x, \tau)}{\partial \tau} \cdot \Phi_1(h; a, t - \tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

nebo, derivujeme-li obě strany podle t,

$$\frac{\partial \Phi_1(h; a + x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \Phi_1(h - a; x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \Phi_1(h; a, t - \tau)}{\partial t}\, \mathrm{d}\tau, \quad (11)$$

což je funkční rovnice pro funkci $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$. Necháme-li v ní růsti délkový interval přes všechny meze, obdržíme známý vzorec

$$\frac{\partial \Phi(a + x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \Phi(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \Phi(a, t - \tau)}{\partial t}\, \mathrm{d}\tau,$$

kde

$$\Phi(z, t) = \lim_{h \to \infty} \Phi_1(h; z, t).$$

Funkce zde zavedené jsou dány vzorci:

$$u(h; z, \zeta, t - \tau) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \frac{n^2\pi^2}{h^2}(t-\tau)} \sin \frac{n\pi z}{h} \sin \frac{n\pi\zeta}{h} = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2h} \left[\vartheta_3\left(\frac{z - \zeta}{2h} \pi, e^{-\varkappa \frac{\pi^2}{h}(t-\tau)} \right) - \vartheta_3\left(\frac{z + \zeta}{2h} \pi, e^{-\varkappa \frac{\pi^2}{h}(t-\tau)} \right) \right],$$

kde ϑ_3 je eliptická funkce

$$\vartheta_3(x, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nx.$$

$$\Phi_1(h; z, t) = 1 - \frac{z}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \frac{n^2\pi^2}{h^2} t} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{h},$$

$$\Phi(z, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} \mathrm{d}\zeta.$$

Užije-li se v rovnicích (I), (II) vyjádření funkce u eliptickými funkcemi, dojde se k poučkám pro tyto funkce (viz G. Doetsch l. c.).

Poznámka. Huyghensova principu lze užíti i tehdy, není-li vodivost, po př. — běží-li o difusi — koeficient difuse konstantní, nebo působí-li v případě difuse vnější síly, na čase nezávislé. Pak totiž nastoupí místo (1) rovnice typu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(z)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + B(z)\frac{\partial v}{\partial z} + C(z)\,v, \tag{14}$$

jejíž řešení je dáno za některých jednoduchých omezení pro koeficienty opět vzorcem (3), v němž se však nahradí $\varkappa$ v třetím resp. čtvrtém členu výrazy $A(0)$ resp. $A(h)$; místo (4) nastoupí

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} = A(\zeta)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - B(\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(\zeta)u.$$

Pro Greenovu funkci u dostaneme opět (za předpokladu, že je určena jednoznačně) vzorce (I) a (II), jen s tím rozdílem, že místo $\varkappa$ v 3. resp. 4. členu píšeme $A(0)$ resp. $A(b-a)$.

*

Application du principe de Huyghens à la théorie de la chaleur.

(Extrait de l'article précédent.)

M. Hadamard a signalé dans ses conférences sur le principe de Huyghens à Prague 1928[1]) l'existence des deux théorèmes d'addition pour la fonction de Green $u(h; z, \zeta, t-\tau)$ relative au problème de Cauchy donné par les équations (1), (2).

Nous avons établi dans les formules (I) et (II)*) la forme analytique de ces deux théorèmes d'addition et nous montrons que la formule (II) n'est qu'une conséquence de la formule (I).

Ces formules représentent deux relations qui ont lieu entre deux fonctions de Green relatives au même problème de Cauchy, mais aux deux intervalles de longueurs différentes. On en peut tirer quelques théorèmes spéciaux, à savoir des théorèmes (9) et (12) d'addition pour une seule fonction.

Ces formules contiennent aussi quelques unes des formules relatives aux fonctions elliptiques, qui ont été établies par M. Doetsch.[3])

Enfin, nous indiquons une généralisation des formules (I) (II) pour l'équation (14).

*) Nous en avons fait une communication au 2ième congrès de mathématiciens des pays Slaves, Prague 1934; voir C. R. de ce Congrès, p. 237 jusqu'à 238.