Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 4, 187--190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123170

ÚLOHY.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 8.*)

Úlohu tuto možná vyjádřiti kongruencí

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

která představuje *poučku Wilsonovu*, již lze odůvodniti takto:

Jest-li N kvadratickým zbytkem podle p, takže

$$N \equiv h^2 \pmod{p}, \qquad (1)$$

možná z $(p-1)$ rozličných k p příslušících zbytků

$$1, 2, 3, \ldots, p-1 \qquad (2)$$

složiti dvojice činitelů, které podlé modulu p dají tentýž zbytek co N. Počet takovýchto dvojic jest $\frac{1}{2}(p-3)$, poněvadž N jest kvadratickým zbytkem podlé p a tudíž z předešlé řady (2) dvojice jedna co součin nedá tentýž zbytek co N, nýbrž každý činitel této dvojice představuje sám se sebou dvojici stejné vlastnosti. (Dirichletova poučka).

Nazveme-li první dvojice

$$\varrho_1 \varrho_2, \varrho_3 \varrho_4, \ldots, \varrho_{p-4} \varrho_{p-3},$$

bude

$$\varrho_1 \ \varrho_2 \equiv N \pmod{p},$$
$$\varrho_3 \ \varrho_4 \equiv N \pmod{p},$$
$$\vdots$$
$$\varrho_{p-4} \varrho_{p-3} \equiv N \pmod{p},$$

*) Úlohou touto měla pozornost obrácena býti k neurčité analytice, která se u nás příliš zanedbává; poněvadž dosud žádné řešení nedošlo a není naděje, že by nějaké bylo zasláno, podávám řešení příslušné sám. Red.

a tudíž, znásobíme-li tyto kongruence,

$$\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\ldots\varrho_{p-3}\equiv N^{\frac{p-3}{2}}\,(\mathrm{mod}\,p)\,. \qquad (3)$$

Poslední dvojice skládá se pak z činitelů h a $p-h$, takže tu jest

$$\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\ldots\varrho_{p-3}\,h\,(p-h)=1\cdot2\cdot3\ldots(p-1)=(p-1)!$$

aneb vyloučíme-li z této a z (3) rovnice ϱ,

$$\frac{(p-1)!}{h\,(p-h)}\equiv N^{\frac{p-3}{2}}\,(\mathrm{mod}\,p).$$

Z (1) jde pak

$$h^2\equiv N\,(\mathrm{mod}\,p),$$

násobením obou kongruencí tudíž

$$\frac{(p-1)!\,h}{p-h}\equiv N^{\frac{p-1}{2}}\,(\mathrm{mod}\,p)$$

aneb

$$(p-1)!\,h\equiv p\,N^{\frac{p-1}{2}}-h\,N^{\frac{p-1}{2}}\,(\mathrm{mod}\,p),$$

a zkrátíme-li podlé známých pravidel,

$$(p-1)!\equiv -N^{\frac{p-1}{2}}\,(\mathrm{mod}\,p).$$

Položíme-li konečně $N=+1$, poněvadž $+1$ jest kvadratickým zbytkem všech prvočísel, obdržíme

$$(p-1)!\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,p)$$

aneb vyjádříme-li obyčejným spůsobem tuto vzájemnost,

$$\frac{(p-1)!+1}{p}=m,$$

kdež značí m číslo celistvé; a tím úkol předložený jest řešen.

Úloha 51.*)

Ve vzdálenosti 500 od koule poloměru 1 nachází se hmotný bod; obě tělesa počnou se v stejném okamžiku stejnoměrně pohybovati a sice bod rychlostí v stále k středu koule směřující, koule pak rychlostí v' směrem přímky stojící kolmo na původním spojení středu s daným bodem. Kde a kdy setká se bod s koulí, jest-li $v=2v'$? a jakou dráhu popisuje tu bod, jest-li $v=v'$?

Úloha 52.

Vedeme-li s bodu P ku přímce MN tři přímky

$$PQ_1=l_1,\ PQ_2=l_2,\ PQ_3=l_3,$$

*) Na str. 143. má státi 49. a 50. místo 46. a 47. úloha.

jež uzavírají s danou přímkou MN úhly

$$\sphericalangle PQ_1 M = \varphi_1, \quad \sphericalangle PQ_2 M = \varphi_2, \quad \sphericalangle PQ_3 M = \varphi_3,$$

a nazveme-li r_1, r_2, r_3 poloměry kruhů opsaných trojúhelníkům PQ_2Q_3, PQ_3Q_1, PQ_1Q_2, platí o těchto veličinách vzájemnost

$$\frac{l_1 l_2}{r_3 l_3 sin\varphi_3} = \frac{l_2 l_3}{r_1 l_1 sin\varphi_1} = \frac{l_3 l_1}{r_2 l_2 sin\varphi_2} = 2.$$

Jaký tu důkaz?

(Prof. *Fr. Müller.*)

II. Z fysiky.

Řešení úlohy 10.

(Podává redaktor těchto listů.)

Proběhne-li hmotný bod v stejném čase t oblouk křivky s a tětivu příslušnou délky r, kteráž uzavírá se svislým směrem úhel ϱ, budeme míti v prvním případě ze vzorce

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gr\cos\varrho},$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{r\cos\varrho}}\, d\varrho, \text{ kdež } r' = \frac{dr}{d\varrho},$$

v druhém případě pak

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\varrho}};$$

porovnáme-li tyto výrazy a derivujeme-li pak rovnici povstalou podlé ϱ, obdržíme snadno po krátké redukci

$$2r' \sin\varrho \cos\varrho = r(\cos^2\varrho - \sin^2\varrho)$$

a tudíž

$$\frac{r'}{r} = \frac{\cos 2\varrho}{\sin 2\varrho}$$

aneb integrujeme-li,

$$r^2 = a^2 \sin 2\varrho,$$

což jest polární rovnice lemniskaty.

Úloha 44.

Na kouli poloměru 20 má se postaviti do stabilní rovnováhy nestejnorodá koule poloměru 2; jaké meze nesmí překročiti těžisko menší koule, aby se podmínce této vyhovělo?

Úloha 45.

U sireny Cagniardovy jest 25 otvorů, kolečko, na něž se šroubem pohyb přenáší, čítá 100 a druhé 30 zubů; má se vypočítati, mnoho-li bude každá ručička ukazovati, vzniká-li kombinační ton mezi $\bar{e}$ a E a trvá li pozorování $1^1/_2$ minuty.

(*Starý.*)

III. Hádanky.

4.

Jaké křivky rovinné může analyticky souřadnicemi pravoúhelnými vyjadřovati rovnice

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

5.

Jaké za stejných podmínek rovnice

$$\begin{vmatrix} a & b-c \\ b+c & a \end{vmatrix} = 0$$

6.

Jaké za stejných podmínek rovnice

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ o & b \end{vmatrix} = 0.$$
