Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Otakar Ježek

O funkcích goniometrických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 2, 87--101

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123164`

zvláště o *problemu konstruktivním*, při které příležitosti jasně na jevo vyjde, kterak nevědomé zaměňování základních prvků různých řad pojmových sobě příbuzných jest hlavní příčinou nesrovnalostí, jež dosud se vyskytují na *poli geometrickém vůbec a v geometrii deskriptivní* obzvláště. —

(Pokračování.)

O funkcích goniometrických.

Studujícím píše **Otakar Ježek**, assistent na č. technice.

V analysi definují se, jak známo, funkce $sin\, z$ a $cos\, z$ řadami:

$$\begin{aligned} sin\, z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots \\ cos\, z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

platnými pro libovolné, tedy obecně soujemné z. V případu, že z jest číslo reálné, kladné nebo záporné, dokazuje se pak totožnost funkcí definovaných řadami (α) s funkcemi goniometrickými téhož jmena.

Sledující úvahy věnovány jsou analytické definici funkcí goniometrických, v podstatě různé od předcházející a poprve vytknuté prof. L. Seidlem v Mnichově.*)

I. Za tím účelem budiž napřed řešena úloha: „Stanovte druhou odmocninu soujemného čísla $A + Bi$ pouhým odmocňováním.“**) Nechť číslo vyhovující úloze naší jest tvaru: $A_1 + B_1 i$, pak platí rovnice

$$\sqrt{A + Bi} = A_1 + B_1 i \qquad (1)$$

---

*) Prof. *L. Seidel* přednášel dne 9. listopadu 1867 v kr. akademii věd v Mnichově: „Ueber eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des elliptischen Integrales erster Art durch unendliche Produkte.“ Přednáška tato v zasedacích zprávách uveřejněna není; úvahy zde podané čerpány jsou ze spisu prof. *R. Lipschitze*: „Grundlagen der Analysis.“ II. díl str. 75. a sledující.

**) Patrně lze tuto úlohu též řešiti formulí Moivre'ovou; spůsobu toho však nemožno zde užiti, jelikož funkce $sin\, z$ a $cos\, z$ za neznámé předpokládáme.

aneb, což totéž jest:

$$A + Bi = (A_1 + B_1 i)^2. \qquad (1')$$

Provedeme-li v rovnici (1′) mocnění a oddělíme-li část reálnou od čistě imaginárné, obdržíme:

$$A_1{}^2 - B_1{}^2 = A \qquad (2)$$

$$2A_1B_1 = B. \qquad (2')$$

Opětným povýšením těchto rovnic na druhou mocnost a utvořením jich součtu plyne:

$$A_1{}^2 + B_1{}^2 = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad (3)$$

kterážto rovnice i co do znamení správna jest, jelikož po levé straně součet kladných čísel se vyskytuje.

Řešením rovnic (2) a (3) dle A_1 a B_1 obdržíme:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \pm\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \\ B_1 &= \pm\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Když $B \gtrless 0$, tu hodnoty A_1 a B_1 nemohou, jak z rovnice (4) vysvítá, nikdy zmizeti, jelikož

$$\sqrt{A^2 + B^2} > A.$$

Přihlédneme-li konečně ku rovnici (2′), tu jest patrno, že ve výsledku $A_1 + B_1 i$ nemohou se hodnoty plynoucí z rovnic (4), vzhledem ku znamení, libovolně kombinovati, ale že naopak volbou jednoho čísla druhé svým znamením úplně stanoveno jest. Musíme tedy rozeznávati dva případy.

1. Nechť $B > 0$, tu obdržíme:

$$A_1 + B_1 i$$

$$= \pm\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}. \qquad (5)$$

2. Nechť $B < 0$, pak jest výsledek:

$$A_1 + B_1 i$$

$$= \pm\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \mp i\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}. \qquad (5')$$

II. Budiž nyní modul soujemného čísla $A + Bi$ jednice, t. j.

$$A^2 + B^2 = 1. \qquad (6)$$

Tím přejdou rovnice (5) a (5′) v následující:

$$A_1 + B_1 i = \pm\sqrt{\frac{1+A}{2}} \pm i\varepsilon\sqrt{\frac{1-A}{2}} \tag{7}$$

značí-li ε znamení čísla B.

Supponujme dále, že

$$A \geqq 0,\ B > 0, \tag{I}$$

volíce zároveň v rovnici (7) jen horní znamení, pak obdržíme:

$$A_1 + B_1 i = \sqrt{\frac{1+A}{2}} + i\sqrt{\frac{1-A}{2}}. \tag{7'}$$

Z rovnic (3) a (7′) vysvítá ihned správnost výroků

$$A_1^2 + B_1^2 = 1,\ A_1 > 0,\ B_1 > 0. \tag{8}$$

Lze tedy postup vytknutý libovolně opakovati, čímž vznikne řada rovnic:

$$\begin{aligned} A_2 + B_2 i &= \sqrt{\frac{1+A_1}{2}} + i\sqrt{\frac{1-A_1}{2}} \\ A_3 + B_3 i &= \sqrt{\frac{1+A_2}{2}} + i\sqrt{\frac{1-A_2}{2}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n + B_n i &= \sqrt{\frac{1+A_{n-1}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-A_{n-1}}{2}}. \end{aligned} \tag{7''}$$

Při tom jest $(k-1)$ní z těchto rovnic výsledkem řešení úlohy:

$$\sqrt{A_{k-1} + iB_{k-1}} = A_k + B_k i;$$

čísla A_k a B_k jsou pak vázána relacemi:

$$A_k^2 + B_k^2 = 1,\ A_k > 0,\ B_k > 0. \tag{8'}$$

Dokážeme nyní snadno následující věty:

1. *Posloupnost reálných, kladných čísel $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ blíží se při stále rostoucím n hodnotě jedna, kdežto řada reálných čísel $B, B_1, B_2, \ldots, B_n$ k nule konverguje,* t. j.

$$\lim A_n = 1, \quad \lim B_n = 0.$$

2. *Výraz $2^n(1 - A_n)$ blíží se pro stále rostoucí n hodnotě* 0, *kdežto výraz $2^n B_n$ současně určité hodnotě se blíží,* t. j.

$$\lim 2^n(1 - A_n) = 0, \quad \lim 2^n B_n = \alpha.$$

Důkaz. Utvoříme-li oba podíly $\frac{B}{A}, \frac{2B_1}{A_1}$, pak snadno dokážeme správnost nerovnosti

$$\frac{B}{A} > \frac{2B_1}{A_1} > 2B_1 > B. \tag{9}$$

Neb dle rovnice (6) jest

$$\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{1-A^2}}{A},$$

dle rovnice (7')

$$\frac{2B_1}{A_1}=2\frac{\sqrt{1-A}}{\sqrt{1+A}}=2\frac{\sqrt{1-A^2}}{1+A}.$$

Jelikož ale

$$\frac{\sqrt{1-A^2}}{A}>\frac{2\sqrt{1-A^2}}{1+A}$$

aneb zkrátíme-li

$$\frac{1}{A}>\frac{2}{1+A},^{*)}$$

bude také

$$\frac{B}{A}>\frac{2B_1}{A_1}.$$

Když však $A=0$, kterýžto případ též připouštíme, tu nerovnost tato odpadá.

Obdobně platí nerovnost

$$\frac{2B_1}{A_1}>2B_1$$

z důvodu, že dle rov. (8) $1>A_1>0$.

Konečně jest dle rov. (7')

$$2B_1=2\sqrt{\frac{1-A}{2}},$$

dle rovnice (6)

$$B=\sqrt{1-A^2}=\sqrt{1-A}.\sqrt{1+A},$$

a tedy $2B_1>B$. Tím jest nerovnost (9) dokázána.

Utvoříme-li nyní ze dvou za sebou jdoucích čísel A_1+B_1i, $A_2+B_2i, \ldots, A_{n-1}+B_{n-1}i$, A_n+B_ni obdobné výrazy $\frac{2B_2}{A_2}$, $2B_2$, $\frac{2B_3}{A_3}$, $2B_3, \ldots, \frac{2B_{n-1}}{A_{n-1}}$, $2B_{n-1}$, $\frac{2B_n}{A_n}$, $2B_n$, tu platí, jelikož A_1 vždy od nuly různé jest, další nerovnosti:

---

*) Nerovnost tato platí z důvodu, že $1>A>0$ dle (I).

$$\frac{B_1}{A_1} > \frac{2B_2}{A_2} > 2B_2 > B_1$$
$$\frac{B_2}{A_2} > \frac{2B_3}{A_3} > 2A_3 > 2B_2 \qquad (9')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} > \frac{2B_n}{A_n} > 2B_n > 2B_{n-1}.$$

Násobením první nerovnosti číslem 2, druhé 4, . . , $(n-1)$ní číslem 2^n spojí se pak nerovnosti (9) a (9′) v řadu:

$$\frac{B}{A} > \frac{2B_1}{A_1} > \frac{4B_2}{A_2} > \ldots\ldots > \frac{2^n B_n}{A_n} > 2^n B_n > \ldots.$$
$$\ldots. > 4B_2 > 2B_1 > B. \qquad (10)$$

Pro libovolně rostoucí n roste též 2^n nad veškeré meze, t. j. pro $lim\, n = \infty$ platí $lim\, 2^n = \infty$.

Jelikož dále $2^n B_n$ jest menší $\frac{B}{A}$, v případu, když $A = 0$, jistě menší $\frac{B_1}{A_1}$, jest patrno, že bude $lim\, B_n = 0$.

Vzhledem ku rovnici (6) musí $lim\, A_n = 1$.

Tím důkaz věty 1. podán.

Srovnejme nyní výrazy

$$\frac{2^n B_n}{A_n} > 2^n B_n. \qquad \text{(II)}$$

Dle rovnice právě dokázané blíží se A_n s rostoucím n jednotce, bude tedy rozdíl obou výrazů (II) pro rostoucí n libovolně malý, t. j. výraz $2^n B_n$ konverguje k určité hodnotě, kterouž označme α, tak že platí rovnice

$$lim\, 2^n B_n = \alpha. \qquad (11)$$

Stanovme z rovnice (8′) hodnotu B_n^2 a násobme pak obě strany 2^n, tu obdržíme:

$$2^n B_n^{\,2} = 2^n (1 - A_n^{\,2})$$

aneb
$$2^n B_n \,.\, B_n = 2^n (1 - A)(1 + A),$$

kterýž výraz také psáti lze

$$2^n(1 - A_n) = \frac{2^n B_n}{1 + A_n} \,.\, B_n. \qquad \text{(III)}$$

Pro libovolně rostoucí n blíží se faktor $1 + A_n$ na pravé straně rovnice (III) hodnotě 2, faktor $2^n B_n$ hodnotě α B_n nule; z toho plyne nutně, že

$$\lim 2^n(1 - A_n) = 0\,. \tag{12}$$

Tím jest též druhá věta stvrzena.

Definujme nyní sinus α a cosinus α rovnicemi:

$$\sin\alpha = B\,,\quad \cos\alpha = A\,, \tag{13}$$

kde α jest hodnota stanovená rovnicí (11).

Zbývá nyní uvažovati oba krajní případy, kde buď $A = 1$, $B = 0$ aneb $A = 0$, $B = 1$.

Nechť 1) $A = 1$, $B = 0$, pak patrně budou veškerá čísla $A_k = 1$, $B_k = 0$, a tedy $\lim 2^n B_n = 0$, tak že obdržíme relace:

$$\cos 0 = 1\,,\ \sin 0 = 0\,. \tag{IV}$$

Nechť 2) $A = 0$, $B = 1$.

V tomto případu obdržíme pro $\lim 2^n B_n$ jistou největší hodnotu, již značme $\frac{\omega}{2}$, čímž vzniknou relace:

$$\cos\frac{\omega}{2} = 0\quad \sin\frac{\omega}{2} = 1\,. \tag{V}$$

III. Z definujících rovnic (13) funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ snadno vyvoditi lze veškeré jejich vlastnosti. Vyjádřením rovnice (6) pomocí (13) shledáme ihned, že:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

Nechť nyní $C + Di$ jest číslo soujemné, o němž platí

$$C \geqq 0\,,\quad D > 0\,,\quad C^2 + D^2 = 1\,. \tag{13'}$$

Utvořivše hodnoty C_n a D_n týmž postupem z C a D, jako odvozeny byly hodnoty A_n a B_n z A a B, můžeme definovati

$$\cos\beta = C\,,\ \sin\beta = D\,, \tag{13''}$$

při čemž $\lim\ 2^n D_n = \beta$, $\lim\ 2^n(1 - C_n) = 0$ pro $\lim n = \infty$.

Znásobením soujemných čísel $A + Bi$, $C + Di$ obdržíme

$$(A + Bi)\,(C + Di) = (AC - BD) + i(BC + AD) = P + Qi, \tag{14}$$

kde klademe:

$$P = AC - BD\,,\quad Q = BC + DA\,, \tag{VI}$$

supponujíce:

$$AC - BD > 0\,. \tag{VII}$$

Pro soujemné číslo $P + Qi$, definované rovnicemi (VI), o němž platí patrně relace

$$P > 0,\quad Q > 0,\quad P^2 + Q^2 = 1\,, \tag{VIII}$$

lze odvoditi řadu jednoznačných rovnic:

$$P_1 + Q_1 i = \sqrt{\frac{1+P}{2}} + i\sqrt{\frac{1-P}{2}},$$
$$P_2 + Q_2 i = \sqrt{\frac{1+P_1}{2}} + i\sqrt{\frac{1-P_1}{2}}, \qquad (15)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n + Q_n i = \sqrt{\frac{1+P_{n-1}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-P_{n-1}}{2}},$$

z nichž opět k-tá jest řešením rovnice

$$\sqrt{P_k + Q_k i} = P_{k-1} + Q_{k-1} i,$$

kde platí

$$P_k^2 + Q_k^2 = 1, \quad P_k > 0, \quad Q_k > 0. \qquad \text{(VIII')}$$

Z rovnic:

$$(P_1 + Q_1 i)^2 = P + Qi$$
$$(A_1 + B_1 i)^2 = A + Bi \qquad (16)^*)$$
$$(C_1 + D_1 i)^2 = C + Di,$$

kde A_1, B_1, C_1, D_1, P_1 a Q_1 jsou veličiny známým způsobem odvozené, soudíme, že:

$$P_1 + Q_1 i = \pm (A_1 + B_1 i)(C_1 + D_1 i)$$
$$= \pm [(A_1 C_1 - B_1 D_1) + i(A_1 D_1 + B_1 C_1)]. \qquad (17)$$

O znamení pravé strany rovnice (17) rozhodneme takto: Víme, že na levé straně rovnice (17) jsou $P_1 > 0$, $Q_1 > 0$, což z rovnice (VIII'), pro případ že $k = 1$, ihned vysvítá. Dokázáno bylo, že platí:

$$\frac{B}{A} > \frac{2B_1}{A_1}$$

a obdobně jest

$$\frac{D}{C} > \frac{2D_1}{C_1}.$$

Znásobíme-li obě nerovnosti, obdržíme:

$$1 > \frac{BD}{AC} > \frac{4B_1 D_1}{C_1 A_1},$$

jelikož $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$ jsou kladné ryzé zlomky.

Odečtením jednice bude:

$$0 > \frac{BD}{AC} - 1 > \frac{4B_1 D_1}{C_1 A_1} - 1,$$

---

*) Správnost rovnic (16) vysvítá poznámkou, že jsou jen jiným výrazem úlohy na počátku řešené: Stanoviti $\sqrt{A + Bi}$ pouhým odmocňováním.

a tedy: $$0 < 1 - \frac{BD}{AC} < 1 - \frac{4B_1D_1}{C_1A_1},$$
z čehož pak jde:
$$0 < \frac{A_1\,C_1 - 4B_1\,D_1}{C_1\,A_1},$$
tím spíše tedy bude
$$0 < A_1\,C_1 - 4\,B_1\,D_1$$
a konečně
$$0 < A_1\,C_1 - B_1\,D_1.$$
Jelikož dále výraz $A_1D_1 + B_1\,C_1$ jistě kladný jest, můžeme v rovnici (17) na pravé straně jen kladné znamení připustiti.

Utvoříme-li tedy řadu rovnic:
$$\begin{aligned} P_2 + Q_2i &= (A_1 + B_1i)\,(C_1 + D_1i) \\ P_3 + Q_3i &= (A_2 + B_2i)\,(C_2 + D_2i) \\ &\dots\dots\dots \\ P_n + Q_ni &= (A_{n-1}\,B_{n-1}i)\,(C_{n-1} + D_{n-1}i), \end{aligned} \qquad (18)$$
shledáme ihned jich správnost, jestliže úsudky právě vytknuté opakujeme.

Položme tedy
$$lim\,2^nQ_n = \sigma,\ lim\,2^n\,(1 - P_n) = 0 \text{ pro } lim\,n = \infty \qquad (IX)$$
a definujme opět:
$$cos\,\sigma = P,\ sin\,\sigma = Q. \qquad (19)$$
Dosadíme-li do rovnice (14) hodnoty, z rovnic (13), (13″) a (19) plynoucí, obdržíme:
$$\begin{aligned} cos\,\sigma + i\,sin\,\sigma = (&cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta) \\ &+ i\,(cos\,\beta\,sin\,\alpha + sin\,\beta\,cos\,\alpha) \end{aligned}$$
a oddělením reálné části od imaginárné
$$\begin{aligned} cos\,\sigma &= cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta \\ sin\,\sigma &= cos\,\beta\,sin\,\alpha + sin\,\beta\,cos\,\alpha\,, \end{aligned} \qquad (20)$$
kteréžto rovnice patrně podávají addiční theorem funkcí našich, jest-li že dokážeme: $\sigma = \alpha + \beta$.

Ale z rovnic (11) a (12) jde, jestliže první znásobíme imaginárnou jednotkou, druhou zápornou jednotkou a sečteme:
$$lim\,2^n\,(A_n + i\,B_n - 1) = i\alpha. \qquad (21)$$
Týmž spůsobem obdržíme z příslušných rovnic:
$$lim\,2^n\,(C_n + iD_n - 1) = i\beta \qquad (21')$$
$$lim\,2^n\,(P_n + iQ_n - 1) = i\sigma. \qquad (21'')$$
Znásobíme-li rovnice (21) a (21′), bude

$$\lim 2^n [(A_n + iB_n)(C_n + iD_n) - (A_n + iB_n) - (C_n + i D_n) + 1]$$
$$= \lim \frac{-\alpha\beta}{2^n}. \quad (22)$$

Přičtouce konečně rovnice (21) a (21′) k rovnici (22), obdržíme

$$\lim 2^n [(A_n + iB_n)(C_n + iD_n) - 1] = \lim \left(i\alpha + i\beta - \frac{\alpha\beta}{2^n}\right),$$

aneb vzhledem ku rovnici (18):

$$\lim 2^n (P_n + iQ_n - 1) = \lim \left(i\alpha + i\beta - \frac{\alpha\beta}{2^n}\right). \quad (23)$$

Levá strana se však dle rovnice (21″) rovná $i\sigma$, na pravé straně pak bude pro $\lim n = \infty$

$$\lim \left(i\alpha + i\beta - \frac{\alpha\beta}{2^n}\right) = i\alpha + i\beta,$$

tak že rovnice (23) přejde v následující:

$$i\sigma = i\alpha + i\beta \quad (23')$$

aneb, zkrátíme-li imaginárnou jednotkou:

$$\sigma = \alpha + \beta, \quad (23'')$$

čímž důkaz addičního theoremu podán jest.

Subtrakční theorem obdržíme řešením úlohy:

„Stanovte podíl soujemných čísel $A + Bi$, $C + Di$ o modulu jedna."

Důkaz budiž zde jen naznačen a vedl by se asi tímto spůsobem:

Nechť jest $P + Qi$ číslem vyhovujícím úloze naší t. j. nechť

$$\frac{A + Bi}{C + Di} = P + Qi, \quad (24)$$

kde zatím předpokládáme

$$P > 0, \quad Q > 0, \quad P^2 + Q^2 = 1, \quad (25)$$

pak musí

$$A + Bi = (C + Di)(P + Qi). \quad (24')$$

Vynásobením a oddělením části reálné od ryze imaginárné obdržíme lineárné rovnice:

$$CP - DQ = A, \quad DP + CQ = B,$$

z nichž plyne:

$$P = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}; \quad Q = \frac{CB - AD}{C^2 + D^2}, \quad (26)$$

a tedy vzhledem ku relaci (13′):

$$P = AC + BD; \quad Q = CB - AD. \qquad (26')$$

Supponujme, že

$$CB - AD > 0,$$

pak veličiny P a Q, stanovené rovnicemi (26′), vyhovují podmínečným relacím (25).

Ze známých již rovnic (16) soudíme opět jako dříve:

$$P_1 + Q_1 i = \frac{A_1 + B_1 i}{C_1 + D_1 i}$$

a obdobně

$$P_2 + O_2 i = \frac{A_2 + B_2 i}{C_2 + D_2 i} \qquad (27)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n + Q_n i = \frac{A_n + B_n i}{C_n + D_n i}.$$

Definujme nyní: $\cos\sigma = P$, $\sin\sigma = Q$, pak obdobně jako dříve soudíme, že $\alpha = \beta + \sigma$ t. j. $\sigma = \alpha - \beta$.

Dosadíme-li tedy do rovnic (26′) příslušné hodnoty, obdržíme:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (26'')$$

čímž theorem subtrakční stvrzen jest.

Pro případ, že $\alpha = 0$, t. j. $\lim 2^n B_n = 0$, a tedy $B = 0$, $A = 1$, obdržíme z formulí (26″) sledující:

$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta,$$

t. j. „funkce $\sin\alpha$ jest funkce lichá, $\cos\alpha$ sudá.“

Položme do rovnic (20) $\alpha = \frac{\omega}{2}$, $\beta = \frac{\omega}{2}$, tu obdržíme:

$$\cos\omega = \cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2} = -1, \qquad \sin\omega = 2\sin\frac{\omega}{2} = 0.$$

Dosaďme dále do těchže rovnic $\alpha = n\omega$, $\beta = \omega$, pak bude:

$$\cos(n\omega + \omega) = \cos(n+1)\omega = \cos n\omega\cos\omega - \sin n\omega\sin\omega$$
$$= -\cos n\omega$$
$$\sin(n\omega + \omega) = \sin(n+1)\omega = \sin n\omega\cos\omega + \sin\omega\cos n\omega$$
$$= -\sin n\omega$$

a tedy úsudkem z n na $(n+1)$:

$$\cos(n\omega) = (-1)^n, \quad \cos(-n\omega) = (-1)^n,$$
$$\sin(n\omega) = 0, \quad \sin(-n\omega) = 0.$$

Vložíme-li konečně do těchže rovnic: $\beta = \pm n\omega$, dostaneme:

$$cos\,(\alpha \pm n\omega) = cos\,\alpha\,cos\,(\pm n\omega) - sin\,\alpha\,sin\,(\pm n\omega) = (-1)^n\,cos\,\alpha$$
$$sin\,(\alpha \pm n\omega) = sin\,\alpha\,cos\,(\pm n\omega) + sin\,(\pm n\omega)\,cos\,\alpha = (-1)^n\,sin\,\alpha.$$

Z těchto rovnic pak plynou pro $n = 2k$ následující:

$$cos\,(\alpha + 2k\omega) = cos\,\alpha, \quad sin\,(\alpha + 2k\omega) = sin\,\alpha,$$

z nichž soudíme, že 2ω jest periodou čili modulem funkcí $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, námi definovaných.

Pomocí addičního theoremu shledáme dále, že pro funkce $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, definované rov. (13), platí formule

$$(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)^m = cos\,m\alpha + i\,sin\,m\alpha$$

$$\sqrt[m]{cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha} = cos\,\frac{\alpha + 2k\omega}{m} + i\,sin\,\frac{\alpha + 2k\omega}{m},$$

kde za k klademe m za sebou jdoucích, kladných neb záporných čísel.

Sledujme nyní průběh veličiny $\sigma = \alpha + \beta$, přináležející ku rovnici

$$P + Qi = (A + Bi)\,(C + Di),$$

za tou supposicí, že $A + Bi$ jest stálé, kdežto $C + Di$ se mění. Změna čísla toho není libovolná, jelikož, změníme-li C na C', musí nutně D' vyhovovat relaci:

$$C'^2 + D'^2 = 1. \qquad \text{(X)}$$

Patrně bude též veličina α příslušící ku soujemnému číslu $A + Bi$ stálá, kdežto veličina β z čísla $C + Di$ odvozená se mění, majíc pro $C = 1$, $D = 0$, jak známo, hodnotu 0. Snadno dokážeme správnost výroku:

$$A > P \quad \text{t. j.} \quad cos\,\alpha > cos\,(\alpha + \beta).$$

Neb

$$A - P = A - (AC + BD) = A\,(1 - C) + BD > 0;$$

jelikož ale zároveň platí relace (6) a (VIII), bude

$$B < Q \quad \text{t. j.} \quad sin\,\alpha < sin\,(\alpha + \beta).$$

Nechť nyní $Q' > Q$, pak vzhledem ku rovnici

$$P'^2 + Q'^2 = 1$$

bude $P' < P$. Víme dále, že

$$P = AC - BD,$$

a jelikož A a B jsou stálé veličiny, musí P' míti tvar:

$$P' = AC' - BD',$$

tedy

$$AC' - BD' < AC - BD,$$

kteréžto nerovnosti jen hodnoty $D' > D$, a tedy vzhledem ku relaci (X) $C' < C$, vyhověti mohou.

Patrně ale bude také

$$\lim 2^n D'_n > \lim 2^n D^n \text{ t. j. } \beta' > \beta,$$

následkem toho

$$\alpha + \beta' = \sigma' > \sigma.$$

Zvolíme-li tedy $A = 1$, $B = 0$ t. j. $\alpha = 0$ a roste-li Q od 0 do 1, pak σ roste z 0 do $\frac{\omega}{2}$, kdežto P z jednotky do nully ubývá. Tím ale stvrzena věta:

„Roste-li číslo Q, roste zároveň β a tedy i $\sigma = \alpha + \beta$, z čehož plyne, že, pakli hodnoty Q z 0 do 1 přibývá, hodnota σ od 0 do $\frac{\omega}{2}$ roste. Hodnoty P současně ubývá z jednotky do nully."

Béřeme-li ohled na definiční rovnice funkcí $\sin\sigma$ a $\cos\sigma$, lze větu právě vytčenou také takto vysloviti:

„Funkce $\sin\sigma$ roste od 0 do 1, když σ z 0 do $\frac{\omega}{2}$ se mění, kdežto současně $\cos\sigma$ z jednotky do nully ubývá." *)

Je-li nyní dáno určité číslo soujemné $A + Bi$ a dále číslo $C + Di$ té vlastnosti, že D jest libovolně malé tedy, $\lim D = 0$; pak dle relace (13') bude C číslo málo od jednotky různé, t. j. $\lim C = 1$. Hodnota $\lim 2^n D_n = \beta$ bude rovněž velmi malá, t. j. $\lim \beta = 0$. (XI)

Utvoříme-li pomocí čísla

$$P + Qi = (A + Bi)(C + Di)$$

příslušnou hodnotu

$$\lim 2^n Q_n = \sigma,$$

bude rozdíl $\sigma - \alpha = \beta$ vzhledem ku rovnici (XI) libovolně malý. Stanovme dále rozdíl:

$$P + Qi - (A + Bi) = (A + Bi)(C + Di) - (A + Bi)$$
$$= A(C - 1) - BDi[AD + B(C - 1)].$$

Srovnáním částí reálných a imaginárných plyne:

*) Větu opačnou, kde $Q' < Q$, týmž spůsobem lze dokázati.

$$P - A = A(C - 1) - BD,$$
$$Q - B = AD + B(C - 1).$$

Pravé strany obou rovnic lze však volbou neobmezeně malého D stlačiti pod danou, libovolně malou hodnotu μ, tak že máme:

$$P - A = \cos \sigma - \cos \alpha < \mu$$
$$Q - B = \sin \sigma - \sin \alpha < \mu$$

aneb

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha < \mu, \quad \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha < \mu, \quad \lim \beta = 0$$

čili slovy:

„Funkce $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ námi definované jsou funkce spojité.“ *)

Z odvozených relací (10) vyplývají sledující

$$\frac{B}{A} > 2^n B_n > B$$

aneb, dosadíme-li známé hodnoty:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \alpha > \sin \alpha,$$

z nichž snadno stanovíme:

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

IV. Shledali jsme, že vlastnosti funkcí definovaných rovnicemi (13) jsou tytéž, jako ony funkcí goniometrických definovaných na kružnici o středu O a poloměru jedna, takto: „Ramena středového úhlu α protnou danou kružnici v bodech M, N. Vedu $MP \perp ON$, pak PM jest *sinus* úhlu α, OP *cosinus* α. Perioda funkcí těchto, jež na okamžik značme $Cos\, \alpha$, $Sin\, \alpha$, jest $\pi = 3{\cdot}141592\ldots$“

Dokážeme nyní snadno větu:

„*Funkce* $\sin \alpha$ *a* $\cos \alpha$, *definované rovnicemi (13), a goniometrické funkce* $Sin\, \alpha$, $Cos\, \alpha$ *jsou totožny,* t. j.

$$Cos\, \alpha = \cos \alpha, \quad Sin\, \alpha = \sin \alpha, \quad \pi = \omega, \quad arc\, NM = \alpha.\text{“}$$

Dle formule Moivre'ovy, platné pro funkce námi definované i pro funkce goniometrické, jest:

*) Patrně zde ponecháváme čtenáři důkaz, že

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha < \mu, \quad \sin(\alpha - \beta) - \sin \alpha < \mu,$$

kde α, β a μ mají týž význam jako dříve.

$$\begin{aligned}\sqrt{cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha} &= cos\frac{\alpha}{2} + i\,sin\frac{\alpha}{2}\\ \sqrt{Cos\,\alpha + i\,Sin\,\alpha} &= Cos\frac{\alpha}{2} + i\,Sin\frac{\alpha}{2}\ {}^{**}).\end{aligned} \tag{27}$$

Volme nyní za α hodnoty tak malé, aby $cos\,\alpha$ byl kladný neb nulla a pro ubývající hodnoty α kladným zůstal, čehož patrně dosáhneme, pak-li v první z rovnic (27) $\alpha \leqq \frac{\omega}{2}$, v druhé $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ položíme. Dále stanovme odmocniny tak, že jich reálné části jsou kladné, čímž rovnice (27) úplně stanoveny budou.

Jest však

$$cos\frac{\omega}{2} + i\,sin\frac{\omega}{2} = i,$$

což plyne z rovnice (V); a obdobně

$$Cos\frac{\pi}{2} + i\,Sin\frac{\pi}{2} = i,$$

jak z theorie komplexních čísel známo jest. Bude tedy

$$cos\frac{\omega}{2} + i\,sin\frac{\omega}{2} = Cos\frac{\pi}{2} + i\,Sin\frac{\pi}{2}.$$

Odmocníme-li na obou stranách a vezmeme ony hodnoty, jichž reálné části jsou kladné, obdržíme:

$$cos\frac{\omega}{2^2} + i\,sin\frac{\omega}{2^2} = Cos\frac{\pi}{2^2} + i\,Sin\frac{\pi}{2^2}.$$

Opětujeme-li pochod ten n-kráte, bude:

$$cos\frac{\omega}{2^n} + i\,sin\frac{\omega}{2^n} = Cos\frac{\pi}{2^n} + i\,Sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Povýšením na m-tou potencí nabudeme rovnice:

$$cos\frac{m\omega}{2^n} + i\,sin\frac{m\omega}{2^n} = Cos\frac{m\pi}{2^n} + i\,Sin\frac{m\pi}{2^n}. \tag{28}$$

**) Na řešení:

$$\begin{aligned}\sqrt{cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha} &= -\,cos\frac{\alpha}{2} - i\,sin\frac{\alpha}{2}\\ \sqrt{Cos\,\alpha + i\,Sin\,\alpha} &= -\,Cos\frac{\alpha}{2} - i\,Sin\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

nebeřeme zde ohledu.

Položíme-li $x = \frac{m}{2^n}$ a oddělíme část reálnou od imaginarné, tu z rovnice (28) plynou sledující:

$$\cos x\omega = \mathrm{Cos}\, x\pi, \quad \sin x\omega = \mathrm{Sin}\, x\pi.$$

Rovnice tyto jsou v sebe menším intervallu pro $x = \frac{m}{2^n}$ kolikkrátkoli vyplněny, z čehož, vzhledem ku spojitosti funkcí, soudíme, že pro veškerá x daného intervallu vyplněny jsou.

Uvažujme konečně: $\sin x\omega = \mathrm{Sin}\, x\pi$.

Dělením hodnotou x a přechodem do limity obdržíme:

$$\lim \frac{\sin x\omega}{\omega} = \lim \omega \frac{\sin x\omega}{x\omega} = \omega = \lim \frac{\mathrm{Sin}\, x\pi}{x} = \lim \pi \frac{\mathrm{Sin}\, x\pi}{x\pi} = \pi,$$

t. j. $\omega = \pi.$

Tím identita funkcí definovaných rovnicemi (13) s funkcemi goniometrickými zjištěna jest.

O ploském obsahu kruhového výkrojku.

Studujícím napsal

P. **Cornelius Pich**, T. J. v Bohusudově (Mariaschein).

Věta. Kruhový výkrojek (V) rovná se polovině poloměru (R) znásobené příslušným obloukem (B).

Vzorec.

$$V = \frac{R}{2} . B.$$

1. Důkaz. Budiž v pravidelný mnohoúhelníkový výkrojek o kruhový výkrojek V *opsaný*, jenž sestává z $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (t. j. z libovolně mnoha) *rovnoramenných* a shodných trojúhelníků o výšce R (obr. 1.). Je-li $b = n . \frac{b}{n}$ lomená podstava výkrojku v, pak jest, jak známo, ploský obsah

$$v = \frac{R}{2} . b,$$

kdež při rostoucím n a stálém poloměru R proměnné veličiny v i b ku svým stálým mezím V i B ustavičně se přibližují *ubý-*