Václav Tlučhoř

O Queteletově focale kruhového válce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 2, 117--119

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123155

Tato plocha má s plochou mimosměrek určenou křivkou E, přímkou O a průmětnou první společnou křivku, jejímž prvním obrazem jest $J_1^{(o)}$. Učiníme-li $c_1(c_1) \parallel b'_1(b'_1)$ a $(c_1)t_1 \parallel P_1$, obdržíme stopnici roviny oné tečné plochy mimosměrek v bodě c a učiníme-li dále $o_1[c_1] = o_1(b'_1)$ a $[c_1]t_1 \perp P_1$, jest $[c_1]t_1$ stopnicí roviny tečné oné plochy otáčení a tudíž jest c_1t_1 obrazem žádané tečny.

Při strofoidě dostačí učiniti (obr. 5.) $cd \perp oc$, $de \parallel cd$, načež jest ec tečnou strofoidy v bodě c.

Křivka libovolné intensity ε $(J^{(\varepsilon)})$. — Celý výklad zůstane jako u křivky $J^{(\varepsilon)}$ v *a*), jen že kružnice M_3 má své středy na ellipse K_3 a délky $\varrho \sin\beta$ měří se na přímé čáře E_3. 1 tečna křivky $J_1^{(\varepsilon)}$ zobrazí se na základě těchže úvah jako v *a*), jen že místo plochy válcové, jejímž tvořícím útvarem byly v *a*) kružnice N, nastoupí plocha posouvání, jejíž řídící křivkou jest libovolná křivka prostorová H, která má svůj orthogonalný průmět první zobrazený v $H_1 \equiv K_3$. Stopník každé tečny křivky H nejlépe zvoliti jest na O_3. Ostatní změny souvisí úzce se změnou touto a jsou patrny z obrazce 3., kdež celá tato konstrukce jest provedena a kdež užito jest téhož označení jako v *a*) *).

O Queteletově focale kruhového válce.

Napsal **Václ. Tlučhoř.**

Dány jsou dvě přímky OX a OY na sobě kolmé a na přímce OX bod S ve vzdálenosti $a = 1$ od bodu O. Vytkneme-li bodem S libovolný paprsek SQ a učiníme-li $QP = P'Q = OQ$ (obr. 6.) jsou body P a P' na křivce, která slove strofoida.

Rovnice její v soustavě XOY jest

$$x^2(x+1) + y^2(x-1) = 0.$$

Z této rovnice vyplývá, že přímka $AA' \parallel OY$ ve vzdálenosti $OA = SO = 1$ jest asymptotou křivky té.

---

*) Úryvky z tohoto pojednání byly předneseny v listopadu roku 1882 v „Jednotě českých mathematiků". — Zobrazení tečen ve případech *a*) i *b*) lze též provésti na základě theoremu Dupinova.

Učiníme-li $Pm \perp SP$, jest $\triangle QPm \cong \triangle SOQ$, z čehož následuje, že $MP = SO = a = 1$. Jest tudíž křivka tato geometrickým místem bodů dotyku kružnic K poloměru a, které mají své středy na OY, s paprsky svazku S. Tyto kružnice dotýkají se zároveň asymptoty AA' a rovnoběžky bodem S s OY sestrojené. Pokládáme-li tyto dvě přímky za povrchové přímky točné plochy válcové, jejíž osou jest přímka OY a paprsky svazku S za průměty rovin kolmých na rovině XOY, jsou — jak známo — ony body dotyčné, čili body strofoidy, ohniskami křivek II. st., v nichž naposled vytčené roviny pronikají onu plochu válcovou. Z toho vyplývá, že strofoida jest totožná s Queteletovou focalou kruhového válce. Ze mnohých zajímavých vlastností této křivky, která často již byla předmětem vyšetřování*), budiž v tomto článku poukázáno jen na některé vlastnosti její tečen a normal.

Jmenujme body P a P', které jsou na jednom paprsku svazku S, body stejnolehlé a podobně jmenujme i tečny a normaly v těch bodech.

Rovnice geometrického místa průsečníků stejnolehlých tečen jest

$$y^3 = -\frac{x^3}{1-x},$$

což jest rovnice cissoidy a rovnice geom. místa průseků stejnolehlých normal jest

$$y = 2\sqrt{-x},$$

kteráž náleží parabole mající v bodě O svůj vrchol a přímku OX za osu.

Srovnáním rovnice této paraboly s rovnicí oné cissoidy shledáme, že parabola $y = 2\sqrt{-x}$ jest úpatnicí oné cissoidy pro pol O. Lze tudíž vysloviti větu:

„Geometrickým místem průseků stejnolehlých normal Queteletovy focaly jest parabola, která má dvojný bod Queteletovy focaly za vrchol a vrchol Queteletovy focaly za ohnisko a geom. místem průseků stejnolehlých tečen jest cissoida, která jest úpatnicí oné paraboly pro její vrchol, jakožto pol."

*) Viz ku př. poznámky de la Gournerie-ovy o této křivce ve spise „Traité de géométrie descriptive" na str. 141—142 díl II. *Pozn. red.*

Je-li σ průsek dvou stejnolehlých tečen a σ' průsek dvou stejnolehlých normal ku př. v bodech P a P', tedy plyne ze shodných trojúhelníků $S\sigma'Q$ a $S'\sigma'Q$, že

$$\sphericalangle S\sigma'Q = \sphericalangle Q\sigma'S',$$

z čehož dále vysvítá, že přímka $\sigma\sigma'$ jest tečnou paraboly $y = 2\sqrt{-x}$ s dotyčným bodem σ' a že stojí kolmo na paprsku PP' v bodě Q. Dále jest patrno, že body P, P', σ a σ' jsou na kružnici.

Na základě této vzájemné polohy obou geometrických míst lze snadno sestrojiti tečnu i normalu strofoidy v libovolném jejím bodě.

Abychom sestrojili normalu strofoidy v bodě P, prodlužme paprsek SP až k průseku S' s asymptotou focaly a veďme tímto bodem rovnoběžku $S'\sigma'$ s přímkou OX. Tato rovnoběžka protíná přímku $Q\sigma' \perp SQ$ v bodě σ'. Přímky $\sigma'P$ a $\sigma'P'$ jsou normaly focaly v bodech P a P'.

Jinak lze obdržeti bod σ' takto:

Ze shodnosti trojúhelníků $S\sigma'Q$ a SQR vyplývá, že $Q\sigma' = QR$, na základě čehož bod σ' obdržeti lze.

Jde-li o přímé určení tečen v bodech P a P', veďme bodem O kolmici na přímku $Q\sigma$ a určme průsečník σ těchto dvou přímek. Přímky σP a $\sigma P'$ jsou pak žádané tečny v bodech P a P'. Aneb opíšeme nad průměrem OU kružnici k_1, vedeme bodem O rovnoběžnou přímku s SP a učiníme $O\sigma = op$, jako při sestrojení cissoidy. Konečně lze bod σ také tím obdržeti, že učiníme $Q\sigma = sO$.

Jinou konstrukci tečny lze odvoditi z polární rovnice strofoidy.

Pokládáme-li SX_1 za osu polárnou a bod S za pol, jest rovnice křivky té $\quad r = cotg \frac{\varphi}{2}$

a délka její subtagenty

$$SE = 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Z toho vyplývá, že konce polárních subtangent t. j. body E jsou na kardioidě. Obdržíme tudíž tečnu takto:

Učiníme $SJ \perp SP$ a $JE = E'J = SO$, načež jsou EP a $E'P$, tečny strofoidy v bodech P a P'.