František Graf

O určení grupy hypergeometrické differenciální rovnice

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 354--360

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123118

O určení grupy hypergeometrické differenciální rovnice.

Napsal Dr. **Frant. Graf** v Göttingen.

Integrál hypergeometrické rovnice:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\{\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)z\}\frac{dy}{dz}-\alpha'\beta'y=0$$

jest dán dle Eulera výrazem

$$\frac{\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\gamma'-\alpha')}\int u^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma'-\beta'-1}(1-zu)^{-\alpha'}du,$$

při čemž určitý integrál ten veden jest přímočárně mezi dvěma singulárními body.

Zaveďme novou proměnnou substitucí

$$u=\frac{b-c}{b-a}\,\frac{x-a}{x-c}=(bcxa),$$

t. j. dvojpoměr v závorce naznačených čtyř bodů. Bude pak

$$1-u=-(bxca),$$

a položíme-li obdobně

$$z=(abcd),$$

vychází

$$(1-zu)=(acxd).$$

Místo původních singulárních bodů 0, 1, ∞ vyskytují se nyní, jak zřejmo, libovolné tři body a, b, c. Dosadíme-li tyto výrazy do integrálu, obdržíme:

$$\begin{aligned}-(-1)^{\gamma'-2}\int(a-b)^{1-\gamma'}(a-c)^{\gamma'-\beta'-\alpha'}(a-d)^{\alpha'}\\ (b-c)^{\beta'}(x-a)^{\beta'-1}(x-b)^{\gamma'-\beta'-1}\\ (x-c)^{\alpha'-\gamma'}(x-d)^{-\alpha'}dx.\end{aligned}$$

Zaveďme nyní veskrze homogenní proměnné:

$$a=\frac{a_1}{a_2},\quad b=\frac{b_1}{b_2},\quad c=\frac{c_1}{c_2},\quad d=\frac{d_1}{d_2},\quad x=\frac{x_1}{x_2}$$

a vynecháme-li všechny od x nezávislé faktory, vyplývá

$$y=\int(xa)^{\beta'-1}(xb)^{\gamma'-\beta'-1}(xc)^{\alpha'-\gamma'}(xd)^{-\alpha'}(x\,dx)$$

$$=J=\int(xa)^{\alpha}(xb)^{\beta}(xc)^{\gamma}(xd)^{\delta}(x\,dx),$$

při čemž

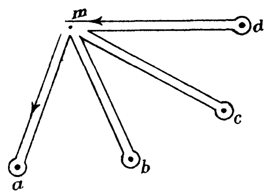
$$\alpha = \beta' - 1, \quad \beta = \gamma' - \beta' - 1, \quad \gamma = \alpha' - \gamma', \quad \delta = -\alpha'.$$

Mezi těmito exponenty stává relace

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2.$$

Za základní integrály lze zvoliti na př. dva integrály přímočárné, vedené mezi dvěma páry singulárních bodů. Hodnota integrálu J závisí jen od dvojpoměru $z = (abcd)$.

Určení grupy záleží v tom, bychom vyšetřili, jaké substituce doznávají základní řešení y_1 a y_2, koná-li bod z oběhy kolem singulárních bodů. Považujeme-li tedy a, b, c za body pevné, jest dvojpoměr z pouhou funkcí polohy bodu d a dlužno stanoviti, jaké změny doznávají y_1 a y_2 při obězích bodu d kol bodů a, b, c.



Obr. 1.

Abychom nemusili interpretovati funkci pod integrálem na Riemannově ploše, zvolme libovolně pomocný bod m a dejme tomu, že v tomto bodě má integrand určitou hodnotu. Označme pak přímočárné integrály následovně:

$$Jma = A, \; Jmb = B, \; Jmc = C, \; Jmd = D.$$

Integrováním kol dotyčných trojúhelníků vyplývají pak relace

$$\left.\begin{aligned} Jab + Jbc + Jca &= 0 \\ Jab + Jbd + Jda &= 0 \\ Jbc + Jcd + Jdb &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

jak též ihned poznáme z rovnic:

$$Jab = B - A, \quad Jac = C - A, \ldots \; Jcd = D - C.$$

Integrujeme-li konečně dle dráhy v obrazci naznačené, obdržíme

$$(1 - \varepsilon_a) A + \varepsilon_a (1 - \varepsilon_b) B + \varepsilon_a \varepsilon_b (1 - \varepsilon_c) C + \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c (1 - \varepsilon_d) D = 0,$$

položíme-li

$$\varepsilon_a = e^{2\pi i\alpha}, \quad \varepsilon_b = e^{2\pi i\beta}, \quad \varepsilon_c = e^{2\pi i\gamma}, \quad \varepsilon_d = e^{2\pi i\delta}.$$

Poslední rovnici lze psáti ve formě

$$\varepsilon_a Jab + \varepsilon_a \varepsilon_b Jbc + \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c Jcd + Jda = 0. \qquad \text{(II)}$$

Pomocí rovnic (I) a (II) lze čtyři z vyskytujících se integrálů dvěma základními vyjádřiti. Položme na př.:

$$Jab = y_1, \quad Jcd = y_2.$$

Základní tyto relace jsou:

$$Jac = \varepsilon_a \frac{1 - \varepsilon_b}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_1 - \frac{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_2$$

$$Jad = \varepsilon_a \frac{1 - \varepsilon_b}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_1 - \varepsilon_a \varepsilon_b \frac{1 - \varepsilon_c}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_2$$

$$Jbc = - \frac{1 - \varepsilon_a}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_1 - \frac{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_2$$

$$Jbd = - \frac{1 - \varepsilon_a}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_1 - \varepsilon_a \varepsilon_b \frac{1 - \varepsilon_c}{1 - \varepsilon_a \varepsilon_b} y_2.$$

Přikročme nyní k určení změny integrálu A, vykoná-li bod d oběh kolem bodu a ve smyslu kladném. Dráha integrační ustupuje před pohybujícím se bodem d a přejde ve křivku v obrazci silně vyznačenou, již možno deformovati v dráhu čárkovanou, resp. přesunutím přes pól Riemannovy koule v dráhu čerchovanou.

Výsledek integrace podél obou těchto drah zní:

$$\Theta_a A = (1 - \varepsilon_c^{-1})\, C + \varepsilon_c^{-1} (1 - \varepsilon_b^{-1})\, B + \varepsilon_c^{-1}\, \varepsilon_b^{-1}\, A,$$

neboť dráha první povstane, připojíme-li k dráze druhé křivku, podél které jsme integrovali při odvození rovnice (II); integrand má v konečném bodě této křivky svou původní hodnotu.

Proběhne-li bod d uzavřenou křivku kolem b, resp. c, nekolliduje dráha jeho nikde s integrační přímkou $\overline{ma}$; integrál A zůstane tudíž při oběhu bodu d kolem b neb c nezměněn.

Podobným způsobem obdržíme pro změnu integrálu B při oběhu pohyblivého bodu kolem b

$$\Theta_b B = (1 - \varepsilon_b)\, B + \varepsilon_b (1 - \varepsilon_d)\, D + \varepsilon_b\, \varepsilon_d\, B,$$

aneb posunutím této dráhy přes pól koule

$$\Theta_b B = (1 - \varepsilon_a^{-1})\, A + \varepsilon_a^{-1} (1 - \varepsilon_c^{-1})\, C + \varepsilon_a^{-1}\, \varepsilon_c^{-1} B.$$

Tyto dva výrazy jsou si rovny následkem rovnice (II).

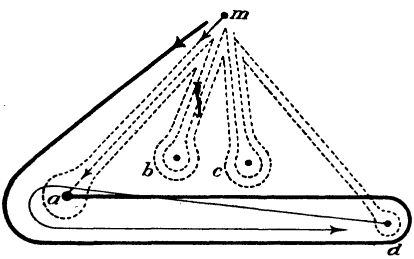
Dále následuje pro integrál C

$$\Theta_c C = (1 - \varepsilon_c)\, C + \varepsilon_c (1 - \varepsilon_d)\, D + \varepsilon_c \varepsilon_d\, C$$

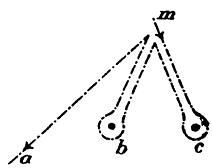
a dráha posunutím přes $x = \infty$ povstalá dá za výsledek

$$\Theta_c C = (1 - \varepsilon_{-b}^{1})\, B + \varepsilon_b^{-1}\, (1 - \varepsilon_a^{-1}) A + \varepsilon_b^{-1}\, \varepsilon_a^{-1}\, C.$$

Zbývá ještě určiti změnu integrálu D. Ježto však pohyblivý bod d jest konečným bodem jeho integrační dráhy, nelze touto mechanickou methodou změnu tuto určiti. Mohli bychom ovšem místo přímočárného integrálu D vyšetřovati integrál vedený dle uzavřené křivky kol bodů (m, d), jejíž deformaci lze předešlou methodou lehce stanoviti.



Obr. 2.



Obr. 3.

Se zřetelem na relaci (II), která stále pojí dotyčné integrály, obdržíme však přímo

$$\Theta_i D = \frac{-\varepsilon_d}{1 - \varepsilon_d} \left[(1 - \varepsilon_a)\, \Theta_i A + \varepsilon_a (1 - \varepsilon_b)\, \Theta_i B \right.$$
$$\left. + \varepsilon_a \varepsilon_b (1 - \varepsilon_c)\, \Theta_i C\right].$$

Pro změny prvních tří integrálů máme tudíž následující schema:

$$\Theta_a A = \varepsilon_b^{-1}\, \varepsilon_c^{-1}\, A - \varepsilon_b^{-1}\, \varepsilon_c^{-1}\, (1 - \varepsilon_b)\, B - \varepsilon_c^{-1}\, (1 - \varepsilon_c)\, C$$
$$\Theta_b A = A$$
$$\Theta_c A = A$$
$$\Theta_a B = B$$
$$\Theta_b B = \varepsilon_c^{-1}\, \varepsilon_a^{-1}\, B - \varepsilon_c^{-1}\, \varepsilon_a^{-1}\, (1 - \varepsilon_c)\, C - \varepsilon_a^{-1}\, (1 - \varepsilon_a)\, A$$
$$\Theta_c B = B$$
$$\Theta_a C = C$$
$$\Theta_b C = C$$
$$\Theta_c C = \varepsilon_a^{-1}\, \varepsilon_b^{-1}\, C - \varepsilon_a^{-1}\, \varepsilon_b^{-1}\, (1 - \varepsilon_a)\, A - \varepsilon_b^{-1}\, (1 - \varepsilon_b)\, B.$$

Konečně lze tedy stanoviti změny integrálů základních:

$$\Theta_a y_1 = \Theta_a B - \Theta_a A = -\frac{\varepsilon_c^{-1}(1-\varepsilon_c) + \varepsilon_a(1-\varepsilon_d)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_1 + \frac{\varepsilon_c^{-1}\varepsilon_d^{-1}(1-\varepsilon_c)(1-\varepsilon_d)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_2$$

$$\Theta_a y_2 = \Theta_a D - \Theta_a C = -\frac{\varepsilon_a\varepsilon_d(1-\varepsilon_a)(1-\varepsilon_b)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_1 + \frac{\varepsilon_a(1-\varepsilon_b) + \varepsilon_c^{-1}(1-\varepsilon_a)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_2,$$

$$\Theta_b y_1 = \Theta_b B - \Theta_b A = \frac{(1-\varepsilon_b) + \varepsilon_b\varepsilon_d(1-\varepsilon_a)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_1 - \frac{\varepsilon_b(1-\varepsilon_c)(1-\varepsilon_d)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_2$$

$$\Theta_b y_2 = \Theta_b D - \Theta_b C = \frac{\varepsilon_c^{-1}(1-\varepsilon_a)(1-\varepsilon_b)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_1 + \frac{\varepsilon_b(1-\varepsilon_a) + \varepsilon_c^{-1}(1-\varepsilon_b)}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_2,$$

$$\Theta_c y_1 = \Theta_c B - \Theta_c A = y_1$$

$$\Theta_c y_2 = \Theta_c D - \Theta_c C = \varepsilon_c\varepsilon_d y_2.$$

Vykoná-li bod d uzavřenou dráhu kol ostatních tří singulárních bodů, musí obě základní řešení rovnice až na společný faktor se reprodukovati. Skutečně vychází:

$$\Theta_{abc} y_1 = -\varepsilon_c^{-1}\frac{1-\varepsilon_c\varepsilon_d}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_1$$

$$\Theta_{abc} y_2 = -\varepsilon_c^{-1}\frac{1-\varepsilon_c\varepsilon_d}{1-\varepsilon_a\varepsilon_b} y_2.$$

Kvocient $\frac{y_1}{y_2} = \eta$ jest polymorfní funkcí nedvisle proměnné z, jež zobrazuje polovinu z na kruhový trojúhelník o úhlech $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, při čemž:

$$\lambda = -(\beta + \gamma + 1),\quad \mu = -(\gamma + \alpha + 1),\quad \nu = -(\alpha + \beta + 1).$$

Funkce $z = z(\eta)$ jest vzhledem k stanovené grupě substitucí funkcí automorfní.

Integrál J rovná se přímo formě

$$\Pi\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & d \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

náležející k dané differenciální rovnici, z čehož následuje, že determinanty nalezených substitucí jsou resp.

$$e^{2\pi i\lambda},\quad e^{2\pi i\mu},\quad e^{2\pi i\nu}.$$

Výpočtem obdržíme skutečně veličiny

$$\varepsilon_a\,\varepsilon_d,\quad \varepsilon_b\,\varepsilon_d,\quad \varepsilon_c\,\varepsilon_d,$$

a jelikož

$$\alpha+\delta=\lambda-1,\quad \beta+\delta=\mu-1,\quad \gamma+\delta=\nu-1,$$

znamenáme shodu obou těchto výsledků.

Jsou-li exponenty pod integrálem menší než negativní jednička, ztrácí integrál, vedený k dotyčnému bodu, svůj význam. Jest nutno vzíti v tomto případě integrály podél dvojoběhů kol jednotlivých dvojic bodů. Pokud přímočárné integrály nejsou illusorními, platí pro dvojoběh kolem bodů i a k relace

$$D_{ik}=(1-\varepsilon_i)\,(1-\varepsilon_k)\,J_{ik}.$$

Nahradíme-li tedy v odvozených rovnicích přímočárné integrály veličinami D_{ik}, obdržíme pro libovolné exponenty správný výsledek.

Vyšetřujeme-li přímo deformace dvojoběhů v rovině x, stávají se obrazce příliš složitými. V tomto případě jest lépe, vyšetřiti substituce formy

$$\Pi\begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & \\ \lambda & \mu & \nu & e_1-e_3,\; e_2-e_3 \end{pmatrix},$$

kterou možno uvésti na tvar

$$\Pi=\int (x-e_1)^{\frac{-\lambda+\mu+\nu-1}{2}}(x-e_2)^{\frac{\lambda-\mu+\nu-1}{2}}$$
$$(x-e_3)^{\frac{\lambda+\mu-\nu-1}{2}}\,dx.$$

Základní integrály vedeme na př. od bodu $x=\infty$ k bodu $x=e_1$, resp. $x=e_3$. Použijeme-li dále relace

$$x-e_i=\left(\frac{\sigma_i u}{\sigma u}\right)^2,\quad x=pu,$$

obdržíme

$$\Pi = \int \sigma_1(u)^{-\lambda+\mu+\nu} \sigma_2(u)^{\lambda-\mu+\nu} \sigma_3(u)^{\lambda+\mu-\nu} \sigma(u)^{-\lambda-\mu-\nu} du,$$

a meze integrálů základních jsou 0 a ω, resp. 0 a ω_3, značí-li $2\omega_1$ a $2\omega_3$ periody funkce pu. Integrační dráha probíhá v rovině u jen směry rovnoběžnými ku stranám parallelogramu period a ježto oběhy kolem bodů e_i se zde zobrazí jen jakožto pooběhy kolem bodů ekvivalentních polovičním periodám, jeví se jednotlivé části dráhy seřazeny jen za sebou, kdežto v rovině x nalézáme až osm dílů dráhy integrační, vedených rovnoběžně kolem téhož bodu roviny.

Nahradíme-li konečně funkce σ pod integrálem funkcemi ϑ, obdržíme tak zvanou Wirtingerovu formuli, z které možno vyvinovati způsobem až doposud nejpohodlnějším, však přec ještě velmi obtížným, integrál hypergeometrické rovnice, konvergentní v každém bodu roviny. Z téže formule lze též odvoditi grupu differenciální rovnice, o čemž hodlám se zmíniti v pojednání příštím.

O tlaku světelného záření.

(Dokončení.)

Napsal prof. **J. Najman** v Rakovníce.

Uspokojující shoda výsledků experimentálních, jichž docílili *Nichols* a *Hull*, s úvahami theoretickými zaručovala do značné míry možnost applikace radiačního tlaku na různé, do té doby velice záhadné úkazy kosmické a pozemské.

Zprvu vyšetřovány byly hlavně vztahy mezi tlakem záření a gravitací. Tak *Lebeděv* *) odvodil poměr obou těchto sil pro tmavá tělesa kulová, jichž rozměry jsou veliké proti délce vlny, a řešil počtem interesantní problém velikosti odpudivé síly světla na tělíska v ohonech komet. Pro tmavé koule závisí radiační tlak přímo na intensitě světla, na absorpční a odrážecí mohutnosti plochy a průřezu tělesa osvětleného, kdežto gravitační přitažlivá síla je úměrna objemu a hustotě; bude tedy

*) *P. Lebeděv.* Wied. Ann. *45*, p. 292, 1892.