Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O Malfattiho problému.

Napsal **V. Rychlík.**

Problémem Malfattiho nazývá se po italském mathematikovi Malfattim, který jí věnoval pojednání, úloha tato: Do daného trojúhelníka vepsati tři kruhy tak, aby se každý z nich dotýkal dvou stran a obou kruhů ostatních.

Ukážeme, že úloha tato, pojímáme-li slovo vepsati v nejužším jeho smyslu, tak totiž, aby kruhy vepsané ležely uvnitř trojúhelníka, má vždy jediné řešení, a že lze sestrojiti toto řešení nástroji obvyklými v elementární geometrii, pravítkem a kružítkem. Vyložíme-li si takto úzce znění úlohy, budeme nuceni ukázati, do jaké míry připouští úloha toto omezení; nesmíme zajisté vždy u mnohoznačné úlohy libovolně vybrati si jedno řešení a to sestrojovati. A bez toho omezení je naše úloha mnohoznačná, jak ihned nahlédneme, sestrojíme-li řešení úlohy obrácené, opsati kol tří kruhů navzájem se dotýkajících trojúhelník tak, aby každá strana dotýkala se dvou kruhů. Takovou tečnu reálnou lze sestrojiti pouze u kruhů, které se dotýkají zevně. Je tudíž nutno, aby dané kruhy ležely každý vně obou ostatních; pak ale existují tři páry společných tečen, a z těch lze vybrati celkem osm trojúhelníků. Vidíme tedy, že mohou tři kruhy navzájem se dotýkající zaujímati vzhledem k trojúhelníku osmerou polohu, dle toho, dotýkají-li se stran ve vnitřních nebo vnějších úhlech, nebo jakou polohu zaujímají k straně třetí.

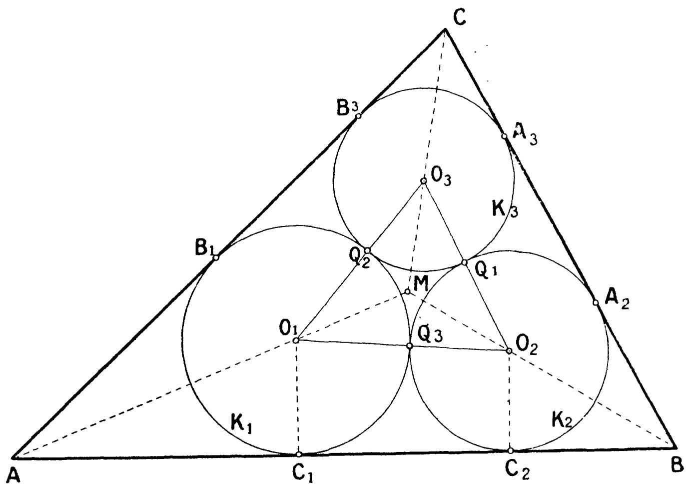
Z toho můžeme souditi, že úloha je mnohoznačná, a bude tudíž radno, dříve než obrátíme se k řešení spočívajícímu na základech ryze geometrických, zjistiti povahu řešení methodou algebraickou. Výsledek této úvahy nám potvrdí zcela bezpečně, že konstrukci lze provésti pravítkem a kružítkem, a že pro každý tvar trojúhelníka jedna soustava kruhů leží uvnitř trojúhelníka.

Označme tedy vrcholy trojúhelníka $A, B, C,$ kruhy vyhovující úloze K_1, K_2, K_3. Dále označme bod, v němž se kruh K_1

dotýká strany AB, C_1, bod, v němž se K_1 dotýká AC, B_1, a podobně ostatní body dotyku na stranách C_2, A_2, A_3, B_3. Kruhy K_1, K_2 dotýkají se v bodu Q_3, K_2K_3 v Q_1, K_3K_1 v Q_2.

Pro počet označme $AC_1 = AB_1 = x_1$, $BC_2 = BA_2 = x_2$, $BA_3 = CB_3 = x_3$, poloměry kruhů r_1, r_2, r_3, a konečně

$$C_1C_2 = t_3, \quad A_2A_3 = t_1, \quad B_3B_1 = t_2.$$



Obr. 1.

Podmínky úlohy vyjádřeny jsou rovnicemi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + t_3 &= c \\ x_2 + x_3 + t_1 &= a \\ x_3 + x_1 + t_2 &= b, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x_1 = r_1 \,.\, cot\, \frac{\alpha}{2}, \quad x_2 = r_2 \,.\, cot\, \frac{\beta}{2}, \quad x_3 = r_3 \,.\, cot\, \frac{\gamma}{2}, \tag{2}$$

$$t_1 = 2\sqrt{r_2 r_3}, \quad t_2 = 2\sqrt{r_3 r_1}, \quad t_3 = 2\sqrt{r_1 r_2}. \tag{3}$$

Rovnice (2) jsou na místě pouze tehdy, omezíme-li se na soustavu kruhů, jež dotýkají se stran trojúhelníka vesměs ve vnitřních úhlech; když jich užijeme, vyloučíme tím kruhy, jež dotýkají se stran jiným způsobem.

Dosadíme-li z rovnic (2) a (3) do rovnic (1), dostaneme rovnice pro poloměry kružnic Malfattiových

$$
\begin{aligned}
r_1 \cot \frac{\alpha}{2} + r_2 \cot \frac{\beta}{2} + 2\sqrt{r_1 r_2} &= c \\
r_2 \cot \frac{\beta}{2} + r_3 \cot \frac{\gamma}{2} + 2\sqrt{r_2 r_3} &= a \qquad (4) \\
r_3 \cot \frac{\gamma}{2} + r_1 \cot \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{r_3 r_1} &= b.
\end{aligned}
$$

Máme tudíž k určení hodnot $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$, $\sqrt{r_3}$ tři rovnice kvadratické. Obecná soustava tří rovnic kvadratických s třemi neznámými elementárně řešiti se nedá; avšak soustava (4) není zcela obecný případ, a můžeme dosti jednoduchým obratem převésti řešení na kvadratickou rovnici. Obrat ten záleží v účelném způsobu vylučování jedné neznámé. Rozřešme druhé dvě rovnice systému (4) dle $\sqrt{r_3}$; dostaneme

$$
\begin{aligned}
\sqrt{r_3} \, . \cot \frac{\gamma}{2} &= -\sqrt{r_2} + \sqrt{a \cot \frac{\gamma}{2} - r_2\left(\cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2} - 1\right)} \\
\sqrt{r_3} \, . \cot \frac{\gamma}{2} &= -\sqrt{r_1} + \sqrt{b \cot \frac{\gamma}{2} - r_1\left(\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\gamma}{2} - 1\right)}.
\end{aligned}
$$

Rovnici vzniklou srovnáním pravých stran

$$
\begin{aligned}
\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} = &\sqrt{a \cot \frac{\gamma}{2} - r_2\left(\cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2} - 1\right)} \\
&- \sqrt{b \cot \frac{\gamma}{2} - r_1\left(\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\gamma}{2} - 1\right)}
\end{aligned}
$$

umocníme dvěma, a upravíme pomocí známých rovnic

$$
tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}, \quad tg \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}, \quad tg \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c},
$$

$$
\varrho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}
$$

tak že obdržíme

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} = &(a+b) \cot \frac{\gamma}{2} \\
&- \left(r_1 \cot \frac{\alpha}{2} + r_2 \cot \frac{\beta}{2}\right) \cot \frac{\gamma}{2} + r_1 + r_2 \\
&- 2\sqrt{\frac{ab}{\varrho^2}\left(\varrho \cot \frac{\gamma}{2} - r_2 \, . \, tg \frac{\alpha}{2}\right)\left(\varrho \cot \frac{\gamma}{2} - r_1 \, tg \frac{\beta}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Užijeme nyní první rovnice ze soustavy (4), při čemž zavedeme délku tečné $C_1C_2 = t_3 = 2\sqrt{r_1r_2}$ dle rovnic (3); když po druhé umocníme, nabude rovnice tvaru

$$\left[t_3\left(1+cot\frac{\gamma}{2}\right)+2\,cot\frac{\gamma}{2}\left(s-c\right)\right]^2$$
$$=4\,\frac{ab}{\varrho^2}\left[\varrho^2 cot^2\frac{\gamma}{2}-\varrho\,cot\frac{\gamma}{2}\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\left(r_1\,cot\frac{\alpha}{2}+r_2\,cot\frac{\beta}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,r_1r_2\,.\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\right].$$

I v pravé straně odpadnou r_1 a r_2, zavedeme-li t_3, a máme tudíž pro t_3 rovnici kvadratickou. Kořeny kvadratické rovnice umíme sestrojiti pomocí pravítka a kružítka, je tedy naše úloha elementárně řešitelna, neboť zbývající část, totiž určiti poloměry r z tečných, lze též elementárně provésti, jak zřejmo z rovnic

$$2r_1=\frac{t_2t_3}{t_1},\quad 2r_2=\frac{t_3t_1}{t_2},\quad 2r_3=\frac{t_1t_2}{t_3}.$$

Rovnice pro t_3 velmi se zjednoduší, vyjádříme-li strany trojúhelníka pomocí poloměru kruhu vepsaného a úhlů, užívajíce vzorců z trigonometrie známých

$$ab\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}=ab\,.\frac{\varrho^2}{(s-a)(s-b)}=\frac{\varrho^2}{sin^2\frac{\gamma}{2}}=\varrho^2\left(1+cot^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}\,cot\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{\varrho},$$

$$s-c=\varrho\,.\,cot\frac{\gamma}{2}.$$

Na konec dospějeme k rovnici

$$t_3^2+2\varrho\left(cot\frac{\gamma}{2}-1\right)t_3-2\varrho^2\,cot\frac{\gamma}{2}=0,$$

jejíž kořeny jsou

$$t_3=-\varrho\,.\left(cot\frac{\gamma}{2}-1\right)\pm\sqrt{\varrho^2\,cot^2\frac{\gamma}{2}+\varrho^2}.$$

Odmocnina, která se v tomto výrazu vyskytuje, totiž

$$\sqrt{\varrho^2 \cot^2 \frac{\gamma}{2} + \varrho^2} = \frac{\varrho}{\sin \frac{\gamma}{2}},$$

má jednoduchý geometrický význam; je to totiž vzdálenost středu kruhu vepsaného od vrcholu C. Lze tedy t_3 snadno sestrojiti, neboť známe i ostatní veličiny, totiž ϱ i $\varrho \cot \frac{\gamma}{2} = s - c$ jakožto délku tečné s vrcholu C vedené k vepsanému kruhu.

Ještě jednodušeji utváří se konstrukce bodů dotyčných kruhů Malfattiových, t. j. úseček x_1, x_2, x_3. Označíme-li vzdálenosti středu kruhu vepsaného od vrcholů m_1, m_2, m_3, můžeme rovnice pro t právě dokázané psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} t_1 &= \varrho - (s - a) + m_1 \\ t_2 &= \varrho - (s - b) + m_2 \\ t_3 &= \varrho - (s - c) + m_3. \end{aligned}$$

Ze soustavy (1) dostaneme, dosadíme-li tyto hodnoty t

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= s - \varrho - m_3 \\ x_2 + x_3 &= s - \varrho - m_1 \\ x_3 + x_1 &= s - \varrho - m_2. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy rovnic je

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(s - \varrho - m_1 - m_2 - m_3) + m_1 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(s - \varrho - m_1 - m_2 - m_3) + m_2 \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(s - \varrho - m_1 - m_2 - m_3) + m_3. \end{aligned}$$

Zbývá ještě dokázati, že kruhy takto sestrojené leží vždy uvnitř trojúhelníka. Je patrno, že tomu bude tak, budou-li poloměry kruhů menší než poloměr kruhu vepsaného do trojúhelníka. Vzorec pro délku $C_1 C_2 = t_3$ můžeme upraviti takto

$$t_3 = \varrho \left(1 - \cot \frac{\gamma}{2} + \operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2}\right) = \varrho \left(1 + \frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}\right)$$

$$= \varrho \left(1 + tg \frac{\gamma}{4}\right).$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu pro poloměr

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\frac{t_2 t_3}{t_1},$$

dostaneme

$$r_1 = \frac{\varrho}{2}\cdot\frac{\left(1+tg\frac{\beta}{4}\right)\left(1+tg\frac{\gamma}{4}\right)}{\left(1+tg\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Tu jsou $tg\frac{\alpha}{4}$, $tg\frac{\beta}{4}$, $tg\frac{\gamma}{4}$ čísla menší než 1, neboť úhly $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\beta}{4}$, $\frac{\gamma}{4}$ jsou vesměs menší než $\frac{\pi}{4}$. Z $\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{4} = \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}$ plyne

$$tg\frac{\beta}{4}+tg\frac{\gamma}{4} = \left(1-tg\frac{\beta}{4}\,tg\frac{\gamma}{4}\right)\cdot\frac{1-tg\frac{\alpha}{4}}{1+tg\frac{\alpha}{4}}.$$

Dosadíme tuto hodnotu do r_1.

$$r_1 = \varrho\cdot\frac{1+tg\frac{\alpha}{4}\,tg\frac{\beta}{4}\,tg\frac{\gamma}{4}}{\left(1+tg\frac{\alpha}{4}\right)^2}$$

$$= \varrho\left(1-\frac{tg\frac{\alpha}{4}\left(2-tg\frac{\beta}{4}\,tg\frac{\gamma}{4}+tg\frac{\alpha}{4}\right)}{\left(1+tg\frac{\alpha}{4}\right)^2}\right).$$

V tomto výrazu je menšitel pro naše úhly vždy kladný, tedy vskutku poloměr r_1 menší než ϱ.

Toto řešení, jak je zřejmo z výrazů pro x a r, platí pro jakýkoliv trojúhelník a vyhovuje vždy úloze v užším smyslu. Druhý kořen kvadratické rovnice pro t je vždy záporný, a vede při jinak stejném postupu k třem kruhům, jež probíhají z části též vně trojúhelníka. Ostatní řešení úlohy v širším smyslu bychom obdrželi, kdybychom vzali v úvahu též vnější úlohy trojúhelníka.

(Pokračování.)