Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 34--44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123090

bod označme 9. Přímkou s položme dále libovolnou rovinu **S** a přímkou t rovinu **T** tak, aby procházela též bodem 9.

Uvažujme dále svazek ploch druhého stupně o základních bodech 1—4, (5, 6), (7, 8). Abychom jednu plochu toho svazku vytkli, dlužno sestrojiti body základními kuželosečky o známém vztahu. Zvolme v rovině **R** kuželosečku dotyku čtyřbodového; ta nechť protne průsečnici **RS** v bodech U a V a průsečnici **RT** v bodech X a Y. Ony dvě kuželosečky ze svazků o bodech základních (5, 6), U, V a (7, 8), X, Y v rovinách **S** resp. **T**, které procházejí společnou dvojinou involucí určených na průsečnici **ST** oběma svazky, stanoví již plochu svazku.

Svazek ploch proťat jest rovinou **T** ve svazku kuželoseček o dvou základních bodech (7, 8). Sestrojíme-li v tomto svazku kuželosečku procházející bodem 9, patří již hledané ploše P^2 a určí průsečíky na **RT** a **ST** kuželosečky plochy v těchto rovinách, čímž plocha dle dřívějšího stanovena.

Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského.

Napsal Dr. **Arnošt Dittrich**, professor v Třeboni.

Maxwellový rovnice v křivočarých orthogonálních souřadnicích. Křivočaré orthogonální souřadnice jsou ξ, η, ζ. Složky síly elektrické směrem rostoucího ξ, η, ζ jsou X, Y, Z; složky síly magnetické jsou L, M, N. Element délkový ds dán relací

$$ds = a_1^2\, d\xi^2 + a_2^2\, d\eta^2 + a_3^2\, d\zeta^2.$$

Pak zní Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{K}{V}\, a_2 a_3 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(M a_2) - \frac{\partial}{\partial \eta}(N a_3) \\
\frac{K}{V}\, a_3 a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi}(N a_3) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(L a_1) \qquad (1) \\
\frac{K}{V}\, a_1 a_2 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta}(L a_1) - \frac{\partial}{\partial \xi}(M a_2),
\end{aligned}$$

kde K je dielektrická konstanta ústředí, V rychlost světla.

Dále jest

$$
\begin{aligned}
-\frac{a_2 a_3}{V}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(Ya_2) - \frac{\partial}{\partial \eta}(Za_3) \\
-\frac{a_3 a_1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi}(Za_3) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(Xa_1) \qquad (2) \\
-\frac{a_1 a_2}{V}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta}(Xa_1) - \frac{\partial}{\partial \xi}(Ya_2).
\end{aligned}
$$

Pozoruhodno jest, že Maxwellovy rovnice můžeme ihned napsati, známe-li obloukový element.

Jak dostaneme Maxwellovy rovnice pro neeuklidický prostor Lobačevského neb Riemannův? Maxwellovy rovnice vyjadřují jisté dvě vlastnosti nekonečně malých plošných elementů. V nekonečně malé oblasti neliší se však geometrie Lobačevského a Riemannova od geometrie Euklidovy. Proto lze obdržeti rovnice Maxwellovy pro zmíněné dva prostory neeuklidické přesným napodobením hořejšího postupu, známe-li délkový element neeuklidického prostoru v orthogonálních křivočarých souřadnicích. Rovnice, jež tím obdržíme, vyjadřují přesně tytéž dvě fysikální myšlenky, jako relace Maxwellovy v prostoru Euklidově.

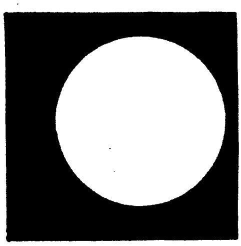
Provedení pro Lobačevského prostor opírající se o stručný výklad jeho geometrie.

Abychom rovnice Maxwellowy pro Lobačevského prostor snadno dostali, užijeme známého isogonálního zobrazení tohoto prostoru uvnitř koule o poloměru a. Zobrazení to přehlédneme snadno pomocí následujícího illustrovaného „slovníku“. Provedu zobrazení trochu šíře než zrovna nutno. Neeuklidická geometrie není těžká. Propracování následujících úvah stačí k poznání ducha této důležité větve mathematiky.

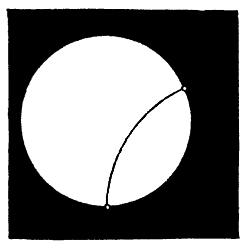
Útvar neeuklidický Lobačevského.	*Obraz jeho v prostoru Euklidově.*
Bod v prostoru Lobačevského.	Bod uvnitř koule o poloměru „a“.
Celý prostor Lobačevského (reálný).	Vnitřek koule „a“.
Nekonečně vzdálené body prostoru Lobačevského.	Povrch koule „a“.

Rovina prostoru Lobačevského.

Koule, jež protíná kouli „*a*“ kolmo. Reálné body roviny leží uvnitř koule „*a*“. Všimněme si, že také roviny jdoucí středem koule „*a*“ jsou koulemi s poloměrem nekonečně velikým, jež protínají kouli „*a*“ kolmo. Tyto roviny jsou tedy také obrazem rovin Lobačevského. Budeme-li potřebovati obraz takové roviny, užijeme vnitřek kruhu „*a*“. Viz obr. 1.



Obr. 1.



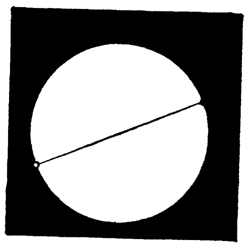
Obr. 2.

Přímka prostoru Lobačevského.

Kružnice, jež protíná kouli „*a*“ kolmo. Reálné body přímky leží na oblouku kruhovém uvnitř koule „*a*“. Přímka má dva nekonečně vzdálené body na této kouli. Viz obr. 2., obraz přímky v rovině s jejími nekonečně vzdálenými body. Všimněme si, že také přímky jdoucí středem koule „*a*“ jsou kruhy (s poloměrem nekonečně velikým), jež protínají kouli „*a*“ kolmo. Přímky středem jdoucí jsou proto také obrazy přímek z prostoru Lobačevského. Budeme jich užívati, kde to jen půjde. Viz obr. 3. představující přímku v rovině a její dva nekonečně vzdálené body.

Pravítko prostoru Lobačevského, t. j. přístroj, jímž si zjednáváme přímky.

1. Pravítko obyčejné, vedeme-li jím přímku středem koule „*a*“.



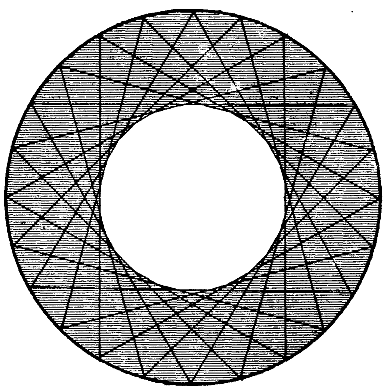
Obr. 3.

2. Kružidlo, vedeme-li jím kruh, jenž stojí na kouli „*a*“ kolmo. Abychom mohli kružidla snadno užívati jako neeuklidického pravítka, doporoučí se oplésti kružnici „*a*“ z obr. 1. tečnami, čímž vznikne obr. 4. Chci-li pak vésti kružidlem přímku, postavím bodec na některou tečnu a vedu kružnici jejím tečným bodem

Koule a kružnice, jež jsou geometrickým místem bodů od daného středu stejně vzdálených.

Koule a kružnice, jež neprotínají kouli „*a*“ kolmo. Také roviny a přímky, jež neprocházejí středem koule, jsou obrazy koulí po příp. kruhů Lobačevského. Ale obrazem středu není obecně bod, do něhož zabodneme rýsujíce kružnici.

Koule „*a*“ jest i s hlediska Lobačevského koulí. Věc ta zasluhuje pozornosti. Jak pak vidíme hvězdy? — Na kouli, v jejímž středu jsme! — To jest ale představa geometrie Lobačevského. Geometrie Euklidova klade nekonečně vzdálené body do roviny. Nikdo ať



Obr. 4.

nemyslí, že náš názor jest v dokonalé harmonii s geometrií Euklidovou. Není tomu tak. — Ovšem, názor jest pro vědeckou theorii vůbec podřízeného významu. Jak silně by se změnil náš názor na prostor, kdybychom měli oči v dlaních rukou, ne blízko u sebe zasazené do lebky.

Kružidlo prostoru Lobačevského, t. j. přístroj, jímž si zjednáváme kružnice.

1 Pravítko obyčejné, nevedeme li jím přímku středem koule

Lobačevského	Euklidovo
	2. Kružidlo, vedeme-li jím kruh, jenž nestojí kolmo na kouli „a“.
Úhel měřený způsobem Lobačevského.	Úhel měřený způsobem Euklidovým, t. j. obyčejným úhloměrem na stupně rozděleným. Zobrazení naše jest isogonální. Proto jest úhel Lobačevského roven úhlu Euklidovu. Všechny věty vztahující se na úhly lze z tohoto zobrazení přímo vyčísti.
Délkový element $d\sigma$, měřený způsobem Lobačevského.	Délkový element ds měřený způsobem Euklidovým, t. j. obyčejným pravítkem na cm rozděleným. Ale zde není element délkový ds rovný elementu $d\sigma$. Souvislost jejich jest složitější. Zní $d\sigma = \frac{a^2\, ds}{a^2 - v^2}$, kde v jest Euklidovým způsobem měřená vzdálenost elementu ds od středu koule „a“. „a“ měří se ovšem vždy způsobem Euklidovým.

Abychom se vpracovali do vztahu elementů délkových, vyšetřme si, jak velká jest vzdálenost σ (měřená způsobem Lobačevského) od středu koule „a“, je-li tato vzdálenost rovna r, měříme-li ji v našem znázornění způsobem Euklidovým. Pak jest

$$\sigma = \int_0^r \frac{a^2\, dr}{a^2 - v^2} = a \int_0^r \frac{d\frac{r}{a}}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

$$= a \int_0^{\frac{r}{a}} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{a}{2} \Big/_{0}^{\frac{r}{a}} l\, \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Jest tedy

$$\sigma = \frac{a}{2}\, l\, \frac{a+r}{a-r}.$$

Stran pozdějšího použití obrátíme závislost

$$\frac{2\sigma}{a} = l\, \frac{a+r}{a-r},$$

$$\frac{a+r}{a-r} = e^{\frac{2\sigma}{a}},$$

z toho řešením dle r:

$$r = a \, . \, \frac{e^{\frac{2\sigma}{a}} - 1}{1 + e^{\frac{2\sigma}{a}}}. \tag{3}$$

Opišme kol středu koule „a" poloměrem r kružnici. V Lobačevského geometrii znamená kružnici s poloměrem σ. Vyjádřeme si obvod tímto poloměrem σ.

Obvod kružnice v míře Lobačevského

$$O = \int d\sigma = \int \frac{a^2\, ds}{a^2 - r^2} = \frac{a^2\, r}{a^2 - r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi a^2\, r}{a^2 - r^2}.$$

Tím jest nalezeno měrné číslo obvodu v míře Lobačevského. Ale je vyjádřeno pomocí r, ne pomocí σ. Chopíme se relace z (3) plynoucí

$$r = a \, . \, \frac{z-1}{z+1},$$

kde zkratka

$$z = e^{\frac{2\sigma}{a}}.$$

Pak jest

$$O = 2\pi r \, . \, \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} = 2\pi a\, \frac{z-1}{z+1}\, \frac{1}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}$$

$$= 2\pi a\, \frac{z^2 - 1}{4z} = \pi \frac{a}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Dosadíme-li za „z", plyne

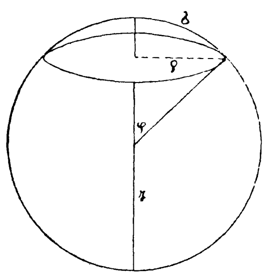
$$O = \pi \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2\sigma}{a}} - e^{-\frac{2\sigma}{a}}\right).$$

Zaveďme ještě zkratku k, kde

$$a = 2k.$$

Obdržíme starý vzorec Gaussův

$$O = \pi k\left(e^{\frac{\sigma}{k}} - e^{-\frac{\sigma}{k}}\right). \qquad (4)$$



Obr. 5.

Vzorec ten lze vyvoditi elementárně z následující důležité myšlenky: *Metrika roviny Lobačevského jest metrikou na kouli, jež má imaginární poloměr „ki"*.

Jak tato věta je míněna, pozná se bez dlouhých rozkladů na příkladech. Vyvoďme vzorec Gaussův označený číslem (4).

Obvod menšího kruhu „ϱ" na kouli „r" jest — viz obr. 5. —

$$O = 2\pi\varrho = 2\pi r \sin \varphi.$$

Oblouk σ, jenž jest poloměrem menšího kruhu na kouli, měří

$$\sigma = r\varphi.$$

Proto jest obvod

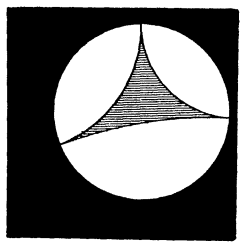
$$O = 2\pi r \sin \frac{\sigma}{r}.$$

Nyní dosadíme za poloměr „r“ hodnotu „ik“, za sinus vyjádření exponencielami a dostaneme

$$O = 2\pi ki \frac{e^{i\frac{\sigma}{ki}} - e^{-i\frac{\sigma}{ki}}}{2i},$$

$$O = \pi k \left(e^{\frac{\sigma}{k}} - e^{-\frac{\sigma}{k}}\right).$$

Abychom určili také nějaký plošný obsah, určíme si vzorec pro vypočtení trojúhelníka.



Obr. 6.

Na kouli „r“ jest plocha sférického trojúhelníka

$$\varDelta = r^2 (A + B + C - \pi),$$

kde A, B, C jsou jeho úhly. Vzorec pro plochu trojúhelníka v geometrii Lobačevského dostaneme, dosadíme-li

$$r = ki.$$

Plyne tedy

$$\varDelta = k^2 (\pi - A - B - C). \tag{5}$$

Vzorec ten má zajímavé důsledky.

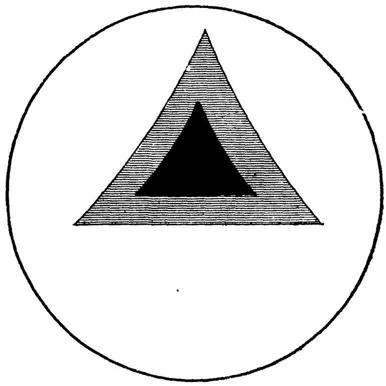
1. Plocha trojúhelníka má nepřekročitelné maximum

$$\pi k^2.$$

Takový trojúhelník má tři úhly nullové, jeho rohy jsou vždy nekonečně vzdáleny. Viz obr. 6.

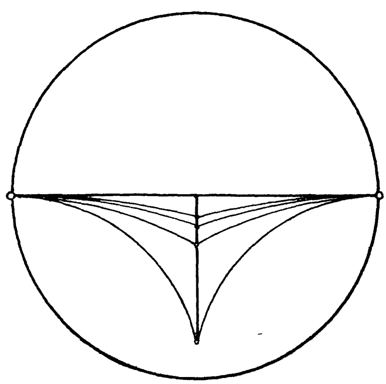
2. Poněvadž plocha je podstatou svou veličinou kladnou, jest součet úhlů v trojúhelníku menší než π.

3. K trojúhelníku danému nelze sestrojiti podobný ve smyslu geometrie Euklidovy, totiž větší, rovnoúhlý. Neboť stejnost úhlů podmiňuje — dle vzorce (5) — stejnost ploch.



Obr. 7.

Kdo by mínil, že černý a šedý trojúhelník na obr. 7. jsou podobny, mýlil by se. Menší, černý trojúhelník je sice obyčejným



Obr. 8.

trojúhelníkem, jenž má přímočaré strany. Ale strany většího šedého jsou kružnicemi, neboť neprotínají kružnici „a“ kolmo. Není tedy velký trojúhelník zvětšením malého, díváme-li se na figury s hlediska geometrie Lobačevského. Jest jeho deformací jež zachovala sice úhly, ale prohnula přímočaré strany v kruhové oblouky.

Proveďme také malou konstrukci. Veďme v rovině přímku a vytkněme si její nekonečně vzdálené body. Viz obr. 8. Veďme středem kruhu „*a*“ kolmici na tuto přímku. Nalezněme si na kolmici několik bodů. Spojme nyní tyto body přímkami s pravým a levým nekonečně vzdáleným bodem dané přímky.

(Dokončení.)

O silovém akustickém poli.

Napsal **František Kaňka**, professor v Praze.

Část II. **Pole jednoosé.** *)

A. *Vznik akustického silového pole jednoosého: 1. resonanční trubicí, 2. kmitající blanou.*

K 1.: Po objevu akustického silového pole v okolí rozkmiten sklenice, které svým tvarem a svými vlastnostmi formálně se shoduje s magnetickým polem trvalého magnetu, hledal jsem význačný tvar druhý, jenž by odpovídal elektromagnetickému poli osovému v okolí drátu, jímž prochází galvanický proud.

Postup myšlenkový byl následující: Dosud bylo probádáno okolí stojaté vlny příčné, nezbývá tedy než prozkoumati okolí stojaté vlny podélné.

Pozornost byla obrácena k akustickým obrazcům Kundtovým. Postřehl jsem totiž, že není příslušný pokus se všech stran probádán; nikdo se posud netázal, nerozšiřuje-li se Kundtův obrazec před otvor trubice, v níž chvěje stojatě vzduchový sloupec.

Při prvním pokuse objevily se před skleněnou trubicí úhledné kroužky na černé tabulce, korkovými pilinami poprášené (obr. 1.).

---

*) Část prvá vyšla v ročníku loňském.