Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Velísek

Plochy, jichž čáry charakteristické jsou čarami geodetickými

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 4, 385--398

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123047`

Plochy, jichž čáry charakteristické jsou čarami geodetickými.

Dr. **Fr. Velísek.**

Základní veličiny theorie ploch buďtež E, F, G; D, D', D'', když lin. element dán jest výrazem

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2. \tag{1}$$

Splňují-li základní veličiny relace

$$D' = 0, \quad GD = ED'', \tag{2}$$

jest lin. element vztažen na čáry charakteristické. Aby čáry souřadné byly geodetickými, nutno splniti rovnice

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{\sqrt{G}} = 0, \quad \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{E}} = 0. \tag{3}$$

Rovnice Mainardi-Gaussovy

$$2\,(EG - F^2)\frac{\partial D}{\partial v} = \left(G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}\right) D$$

$$+ \left(E\frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial E}{\partial u} - 2E\frac{\partial F}{\partial u}\right) D'',$$

$$2\,(EG - F^2)\frac{\partial D''}{\partial u} = \left(G\frac{\partial G}{\partial u} + F\frac{\partial G}{\partial v} - 2G\frac{\partial F}{\partial v}\right) D$$

$$+ \left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right) D'', \quad \frac{2DD''}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial G}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}\right.$$

$$\left. - \frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}\right]$$

se redukují vzhledem na rovnice (3), které možno psáti

$$2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}=0,\quad 2\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial v}=0,$$

na jednodušší tvar

$$\begin{aligned}2\,(EG-F^2)\frac{\partial D}{\partial v}&=\left(G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}\right)D,\\ 2\,(EG-F^2)\frac{\partial D''}{\partial u}&=\left(E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}\right)D'',\end{aligned}\tag{4}$$

$$2\frac{DD''}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Dle první rovnice (3) a pomocí identity

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{F^2}{EG}=\frac{F}{E^2G^2}\left(2EG\frac{\partial F}{\partial u}-FG\frac{\partial E}{\partial u}-FE\frac{\partial G}{\partial u}\right)$$

lze psáti

$$\begin{aligned}\frac{\partial\, lg\, D}{\partial v}&=\frac{1}{2\,(EG-F^2)\,E}\left(2\,GE\frac{\partial F}{\partial u}-GF\frac{\partial E}{\partial u}-EF\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\&=\frac{EG^2}{2F(EG-F^2)}\frac{\partial}{\partial u}\frac{F^2}{EG},\end{aligned}$$

a obdobně dle druhé rovnice (3) a relace $\frac{\partial}{\partial v}\frac{F^2}{EG}$

$$\frac{\partial\, lg\, D''}{\partial u}=\frac{E^2G}{2F(EG-F^2)}\frac{\partial}{\partial v}\frac{F^2}{EG}.$$

Označíme-li úhel souřadný w, platí

$$F=\sqrt{EG}\,cos\,w,\quad sin\,w=\sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}}.\tag{5}$$

Vyloučením F transformují se rovnice (3), (4) na tvary

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\,cos\,w)=0,\quad \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\,cos\,w)=0\tag{6}$$

$$\frac{\partial\, lg\, D}{\partial v}=-\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{w_u}{sin\,w},\quad \frac{\partial\, lg\, D''}{\partial u}=-\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{w_v}{sin\,w},$$

$$DD''=\sqrt{EG}\,sin\,w\,w_{uv}.\tag{7}$$

Dosadíme-li do rovnic (6) hodnotu G dle rovnice (2), obdržíme po krátké redukci

$$\sqrt{\frac{D''}{D}}\frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{E} - cos\, w \frac{\partial}{\partial v} lg\sqrt{E} + sin\, w\, w_v + \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{D''}{D}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{D''}{D}} cos\, w \frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{E} - \frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{E} - sin\, w\, w_u\sqrt{\frac{D''}{D}}$$
$$+ cos\, w \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{D''}{D}} = 0.$$

Řešením rovnic těchto dle

$$\frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{E},\quad \frac{\partial}{\partial v} lg\sqrt{E}$$

jde

$$\frac{\partial\, lg\sqrt{E}}{\partial u} = -\sqrt{\frac{D}{D''}}\frac{w_v}{sin\, w} - \frac{cos\, w\, w_u}{sin\, w} - \frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{\frac{D''}{D}},$$

$$\frac{\partial\, lg\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{cos\, w\, w_v}{sin\, w} - \sqrt{\frac{D''}{D}}\frac{w_u}{sin\, w},$$

tudíž při použití rovnic (7) a (2)

$$\frac{\partial\, lg\sqrt{E}}{\partial u} = \frac{\partial\, lg\, D''}{\partial u} - \frac{\partial\, lg\, sin\, w}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{\frac{D''}{D}},$$

$$\frac{\partial\, lg\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial\, lg\, D}{\partial v} - \frac{\partial\, lg\, sin\, w}{\partial v}.$$

Vyjádříme-li podmínku integrability,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial\, lg\, D''}{\partial u} - \frac{\partial\, lg\, sin\, w}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} lg\sqrt{\frac{D''}{D}}\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial\, lg\, D}{\partial v} - \frac{\partial\, lg\, sin\, w}{\partial v}\right],$$

obdržíme relaci

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} lg\sqrt{\frac{D''}{D}} = 0.$$

Integrace této rovnice dává, značí-li U funkci u, V funkci v,

$$lg\frac{D''}{D} = -lg\, U + lg\, V,$$

nebo

$$\frac{D}{D''} = \frac{U}{V} = \frac{E}{G}.$$

Spojíme-li U s E, V s G, můžeme klásti

$$U = 1, \quad V = 1,$$

tudíž

$$E = G, \quad D = D''.$$

Rovnice (7) dávají pro tyto hodnoty relace

$$\frac{\partial\, lg\, D}{\partial v} = -\frac{w_u}{sin\, w}, \quad \frac{\partial\, lg\, D}{\partial u} = -\frac{w_v}{sin\, w},$$

z nichž obdržíme pro w relaci

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{w_u}{sin\, w} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{w_v}{sin\, w},$$

neb

$$\frac{\partial^2\, lg\, tg\, \frac{w}{2}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\, lg\, tg\, \frac{w}{2}}{\partial v^2},$$

integrací pak

$$tg\, \frac{w}{2} = f\,(u + v)\,.\,\varphi\,(u - v),$$

z čehož jde dále

$$cos\, w = \frac{1 - f^2\varphi^2}{1 + f^2\varphi^2}, \quad sin\, w = \frac{2\, f\varphi}{1 + f^2\varphi^2}.$$

Nepřipojíme-li k $lg\, D$, $lg\, \sqrt{E}$ additivních konstant, obdržíme pomocí předchozích výrazů

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{1 + f^2\varphi^2}{2 f^2}, \quad D = D'' = \frac{\varphi}{f}. \tag{8}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do poslední rovnice systému (7)

$$DD'' = \sqrt{EG}\, sin\, w\, w_{uv},$$

dostaneme pro funkce f, φ funkcionální rovnici

$$f\varphi\,(1 + f^2\varphi^2) = (\varphi f'' - f\varphi'')\,(1 + f^2\varphi^2) - 2 f\varphi\,(f'^2\varphi^2 - \varphi'^2 f^2). \tag{9}$$

Pišme rovnici tuto ve tvaru

$$1 + f^2\varphi^2 = \frac{f''}{f} - \frac{\varphi''}{\varphi} + f\varphi^2 f'' - f^2\varphi\varphi'' - 2 f'^2\varphi^2 + 2 f^2\varphi'^2$$

a derivujme dle $(u + v)$:

$$2 f f'\varphi^2 = \frac{f'''}{f} - \frac{f' f''}{f^2} + f\varphi^2 f''' - 2 f f'\varphi\varphi'' - 3 f' f''\varphi^2 + 4 f f'\varphi'^2. \tag{10}$$

Derivace (10) dle $(u - v)$ dává

$$2ff'\varphi\varphi' = f\varphi f'''\varphi' - ff'\varphi\varphi''' - 3f'f''\varphi\varphi' + 6ff'\varphi'\varphi'',$$

neb pro $f' \neq 0$, $\varphi' \neq 0$

$$\frac{f'''}{f'} - 3\frac{f''}{f} - \frac{\varphi'''}{\varphi'} + 3\frac{\varphi''}{\varphi} = 2.$$

Musí tudíž býti

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3f''}{f} - 1 = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3\varphi''}{\varphi} + 1 = konst. = k.$$

Rovnice tyto dají se psáti ve tvaru

$$\left(\frac{f''}{f'^3}\right)' = -\frac{1+k}{2}\left(\frac{1}{f'^2}\right)', \quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi'^3}\right)' = \frac{1-k}{2}\left(\frac{1}{\varphi'^2}\right)',$$

z čehož jde integrací

$$f'' = -\frac{1+k}{2} f + k_1 f^3, \quad \varphi'' = \frac{1-k}{2}\varphi + k_2\varphi^3,$$

kde k_1, k_2 značí integrační konstanty.

Dosazeny tyto hodnoty do rovnice (10), dávají

$$2\varphi'^2 = k_2\varphi^4 + (1-k)\varphi^2 - k_1,$$

a do rovnice (9) s ohledem na výraz předchozí,

$$\varphi^2(2f'^2 - k_1 f^4 + kf^2 + f^2 + k_2) + 2 = 0. \tag{11}$$

Pomocí rovnice

$$2f'' = 2k_1 f^3 - (1+k) f,$$

z níž integrací jde

$$2f'^2 - k_1 f^4 + (1+k) f^2 = k_4,$$

transformuje se výraz (11) na

$$\varphi^2(k_2 + k_4) + 2 = 0$$

proti předpokladu $\varphi' \neq 0$. Musí tudíž býti jedna z funkcí f, φ konstantou. Budiž $\varphi \doteq k$. Pak se redukuje rovnice (9) na tvar:

$$kf(1 + k^2f^2) = (1 + k^2f^2)\,kf'' - 2k^3ff'^2,$$

neb pro $kf = f_1$

$$(1 + f_1^2) f''_1 - 2f_1 f'^2_1 - f_1(1 + f_1^2) = 0.$$

Integrace dává, označíme-li integrační konstantu c,

$$f'_1 = \sqrt{c\,(1 + f_1^2)^2 - (1 + f_1^2)}, \tag{12}$$

neb

$$\int \frac{df_1}{\sqrt{c\,(1 + f_1^2)^2 - (1 + f_1^2)}} = u + v.$$

Označíme-li invarianty formy

$$cf_1^4 + (2c - 1)\,f_1^2 + c - 1,$$

resp. S, T, obdržíme

$$S = \frac{16c^2 - 16c + 1}{12}, \quad T = \frac{(2c - 1)\,(32c^2 - 32c - 1)}{6^3}.$$

Položíme-li dále

$$g_2 = \frac{16c^2 - 16c + 1}{12c^2}, \quad g_3 = \frac{(2c - 1)\,(32c^2 - 32c - 1)}{6^3 \,.\, c^3},$$

obdržíme pro f_1 řešení

$$2f_1 = \frac{p'\sqrt{c}(u + v)}{p\sqrt{c}\,(u + v) - e_1}, \tag{13}$$

při čemž

$$p'^2 = 4\left(p + \frac{2c - 1}{6c}\right)\left(p - \frac{2c - 1 + 6\sqrt{c^2 - c}}{12c}\right)$$
$$\left(p - \frac{2c - 1 - 6\sqrt{c^2 - c}}{12c}\right).$$

Rovnice (8) dávají pak

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = k^2\,\frac{1 + f_1^2}{2f_1^2}, \quad D = D'' = \frac{k^2}{f_1}, \quad \cos w = \frac{1 - f_1^2}{1 + f_1^2},$$

tudíž pro lin. element (1) jde

$$ds^2 = \frac{k^4}{4}\,\frac{(1 + f_1^2)^2}{f_1^4}\,\left(du^2 + 2\,\frac{1 - f_1^2}{1 + f_1^2}\,du\,dv + dv^2\right). \tag{14}$$

K úvahám předešlým dlužno připojiti, že při různosti znamení D, D'', to jest pro plochy záporné křivosti, jsou čáry souřadné imaginární. V tom případě stačí změniti znamení jedné z funkcí U resp. V.

Čáry křivoznačné jsou určeny pro lin. element (14) rovnicí

$$D du^2 - D'' dv^2 = 0,$$

tedy v našem případě

$$du^2 - dv^2 = 0,$$

jsou tudíž čáry křivoznačné symetrálami čar charakteristických, jak zřejmo již z definice těchto čar. Zaveďme parametry čar křivoznačných

$$u + v = \alpha, \quad u - v = \beta.$$

Lin. element (14) nabude tvaru

$$ds^2 = \frac{k^4}{4} \frac{1 + f_1^2}{f_1^4} (d\alpha^2 + f_1^2 d\beta^2), \tag{15}$$

kde

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{p' \sqrt{c}\, \alpha}{p \sqrt{c}\, \alpha - e_1}.$$

Položíme-li ještě při zachování čar souřadných

$$\int \frac{d\alpha}{f_1} = \alpha_1 = 2 \int \frac{p - e_1}{p'} d\alpha,$$

obdržíme integrací

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{c}\,(e_2 - e_3)} lg \frac{p - e_2}{p - e_3},$$

neb pro

$$\frac{1}{2\sqrt{c}\,(e_2 - e_3)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{p - e_2}{p - e_3} = e^{\lambda \alpha_1},$$

z čehož jde

$$p = \frac{e_2 - e_3 e^{\lambda \alpha_1}}{1 - e^{\lambda \alpha_1}}.$$

Poněvadž platí

$$C = \frac{\lambda^2 + 4}{2},$$

obdržíme

$$e_2 - e_1 = \frac{\lambda^2 + 2 + \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2(\lambda^2+4)},$$

$$e_1 - e_3 = -\frac{\lambda^2 + 2 - \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2(\lambda^2+4)},$$

$$e_2 - e_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}}, \quad p - e_1 = \frac{e_2 - e_1 + (e_1 - e_3)e^{\lambda\alpha_1}}{1 - e^{\lambda\alpha_1}},$$

$$p - e_2 = \frac{(e_2 - e_3)\, e^{\lambda\alpha_1}}{1 - e^{\alpha_1\lambda}}, \quad p - e_3 = \frac{e_2 - e_3}{1 - e^{\lambda\alpha_1}},$$

$$\frac{1+f_1^2}{f_1^2} = \frac{1}{(e_2 - e_3)^2}\,[(e_2 - e_1)e^{-\lambda\alpha_1} + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_3)^2 - (e_2 - e_1) - (e_1 - e_3)\, e^{\lambda\alpha_1}]$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}[(\lambda^2 + 2 + \lambda\sqrt{\lambda^2+4})\, e^{-\lambda\alpha_1} - 4 + (\lambda^2 + 2 - \lambda\sqrt{\lambda^2+4})\, e^{\lambda\alpha_1}].$$

Volíme-li additivní konstantu při α_1 rovnu

$$\frac{\lambda^2 + 2 + \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2},$$

možno psáti

$$\frac{1+f_1^2}{f_1^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1} - e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1})^2.$$

Jelikož konstanta k není nulou, položíme $\frac{k^2}{2} = 1$, a pak lin. element (15) přechází do tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1} - e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1})^2\,(d\alpha_1^2 + d\beta^2). \tag{16}$$

Plocha jest tedy rozvinutelnou na plochu rotační. Abychom její tvar poznali, najdeme pravoúhlé souřadnice bodů plochy charakterisované rovnicí (16). Položíme k vůli krátkosti

$$\frac{1}{\lambda}\,(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1} - e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1}) = U,$$

a označíme rotace trojhranu tvořeného normálou k ploše a tečnami k čarám souřadným p, q, p_1, q_1, r, r_1, dilatace ξ, ξ_1, η, η_1.

Ježto pak plocha jest vztažena na čáry křivoznačné, platí

$$\xi = U,\ \eta = 0,\ \xi_1 = O,\ \eta_1 = U,\ p = 0,\ q_1 = 0,$$

a rovnice Codazziho redukují se na jednoduché tvary

$$r = 0,\ r_1 = \frac{U'}{U},\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} = -q r_1,\ \frac{\partial q}{\partial \beta} = 0,\ \frac{d r_1}{d \alpha_1} = q p_1.$$

Jsou tedy všechny rotace funkce jen u. Z rovnic

$$\frac{dp_1}{d\alpha_1} = -q r_1,\ \frac{dr_1}{d\alpha_1} = q p_1,\ r_1 = \frac{U'}{U}$$

jde

$$p_1^2 + r_1^2 = l^2 = konst.$$

Ježto pak derivace dle α_1 kosinů úhlů souřadného trojhranu s osami pevnými dány jsou výrazy (Darboux, sv. I., str. 3., 4.)

$$\frac{\partial a''}{\partial \alpha_1} = b''r - c''q,\ \frac{\partial b''}{\partial \alpha_1} = c''p - a''r,\ \frac{\partial c''}{\partial \alpha_1} = a''q - b''p,$$

derivace dle β pak

$$\frac{\partial a''}{\partial \beta} = b''r_1 - c''q_1,\ \frac{\partial b''}{\partial \beta} = c''p_1 - a''r_1,\ \frac{\partial c''}{\partial \beta} = a''q_1 - b''p_1,$$

obdržíme v našem případě pro tuto skupinu kosinů

$$a'' = \frac{p_1}{l},\ b'' = 0,\ c'' = \frac{r_1}{l}.$$

Pro úhly Eulerovy jde pak

$$sin\ \Theta\ sin\ \varphi = -\frac{p_1}{l},\ sin\ \Theta\ cos\ \varphi = 0,\ cos\ \Theta = \frac{r_1}{l},$$

tedy

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ sin\ \Theta = -\frac{p_1}{l}.$$

Pro úhel ψ dávají rovnice

$$sin\ \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = p\ sin\ \varphi + q\ cos\ \varphi,$$

$$sin\ \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = p_1\ sin\ \varphi + q_1\ cos\ \varphi,$$

neb

$$\sin\Theta\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}=0,\quad \sin\Theta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=p_1$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=-l,\quad \psi=-l\beta+l_1.$$

Pro tyto hodnoty druhé dvě skupiny relací Eulerových

$$a=\cos\Theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi,$$
$$b=\cos\Theta\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi,$$
$$c=\sin\Theta\sin\psi,$$
$$a'=\cos\Theta\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi,$$
$$b'=\cos\Theta\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi,$$
$$c'=\sin\Theta\cos\psi$$

dávají

$$a=\frac{r_1}{l}\sin(l_1-l\beta),\qquad a'=\frac{r_1}{l}\cos(l_1-l\beta),$$
$$b=-\cos(l_1-l\beta),\qquad b'=\sin(l_1-l\beta),$$
$$c=-\frac{p_1}{l}\sin(l_1-l\beta),\quad c'=-\frac{p_1}{l}\cos(l-l\beta).$$

Pro souřadnice x, y, z bodu plochy obdržíme z rovnic

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha_1}=a\xi+b\eta,\qquad \frac{\partial y}{\partial\alpha_1}=a'\xi+b'\eta,\qquad \frac{\partial z}{\partial\alpha_1}=a''\xi+b''\eta,$$
$$\frac{\partial x}{\partial\beta}=a\xi_1+b\eta_1,\quad \frac{\partial y}{\partial\beta}=a'\xi_1+b'\eta_1,\quad \frac{\partial z}{\partial\beta}=a''\xi_1+b''\eta_1,$$

$$dx=\frac{r_1}{l}U\sin(l_1-l\beta)\,d\alpha_1-U\cos(l_1-l\beta)\,d\beta,$$
$$dy=\frac{r_1}{l}U\cos(l_1-l\beta)\,d\alpha_1+U\sin(l_1-l\beta)\,d\beta,$$
$$dz=\frac{p_1U}{l}\,d\alpha_1,$$

z toho

$$x=\frac{U}{l}\sin(l_1-l\beta),\quad y=\frac{U}{l}\cos(l_1-l\beta),$$
$$z=\frac{1}{l}\int\sqrt{l^2U^2-U'^2}\,d\alpha_1.$$

Explicitní výraz pro z

$$z = \frac{1}{l}\int\sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^2-1}\,d\alpha_1$$

přejde substitucí

$$e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}+e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}}=2t$$

na tvar

$$z=\frac{4}{\lambda^2}\int\sqrt{\frac{1-\frac{\lambda^2}{l^2}\left(\frac{l^2}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)t^2}{1-t^2}}\,dt,$$

jest tedy z dáno elliptickým integrálem druhého druhu. Ježto pak základní veličiny D_1, D''_1 dle známých vzorců vypočteny dávají

$$D_1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^2-1}},$$

$$D''_1=\sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{\frac{-\lambda\alpha_1}{2}})^2-1},$$

jsou dány hlavní poloměry křivosti R_1, R_2 výrazy

$$R_2=\frac{U}{D''_1}=\frac{(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^2}{\lambda^2\sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^2-1}},$$

$$R_1=\frac{U}{D''_1}=\frac{1}{\lambda^2}(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^2\sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^2-1},$$

křivost totální pak

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{\lambda^4}{(e^{\frac{\lambda\alpha_1}{2}}-e^{-\frac{\lambda\alpha_1}{2}})^4}.$$

Pro λ imaginární přejdou v lin. elementu (16) funkce exponenciální v trigonometrické.

Pro plochy křivosti negativní stačí klásti λ, α, β imaginární, čímž element (16) nabývá tvaru

$$ds^2=\frac{1}{\lambda^2}(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1}+e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1})^2(d\alpha_1^2+d\beta^2),$$

tudíž pro veličiny D_1, D''_1

$$D_1 = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right)\left(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1} + e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1}\right)^2 + 1}},$$

$$D''_1 = \sqrt{\left(\frac{l^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right)\left(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1} + e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1}\right)^2 + 1},$$

a pro totální křivost

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{\lambda^4}{\left(e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_1} + e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha_1}\right)^4}.$$

Čáry charakteristické $Ddu^2 - D''dv^2 = 0$ jsou v tomto případě imaginární.

Redukce funkcí elliptických definovaných rovnicí (12) nastává pro

$$c = 0, \quad c = 1.$$

Pro $c = 0$ obdržíme z uvedené rovnice

$$f_1 = i \sin (u + v),$$

tudíž pro lin. element (15), klademe-li

$$2u = \alpha + i\beta, \quad 2v = \alpha - i\beta,$$

$$ds^2 = ctg^2 \alpha \left(\frac{d\alpha^2}{\sin^2 \alpha} + d\beta^2\right),$$

neb pro

$$\int \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = lg\, tg \frac{\alpha}{2} = \alpha_1$$

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1}\right)^2 \left(d\alpha_1^2 + d\beta^2\right).$$

Jsou tudíž souřadnice pravoúhlé plochy tímto elementem lin. definované

$$x = \frac{1}{l} \left(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1}\right) \sin (l_1 - l\beta),$$

$$y = \frac{1}{l} \left(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1}\right) \cos (l_1 - l\beta),$$

$$z = \frac{1}{l} \int \sqrt{(l^2 - 1)\left(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1}\right)^2 - 4}\, d\alpha_1,$$

a totální křivost, ježto

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(l^2-1)(e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1})^2-4}},$$
$$D''_1 = \sqrt{(l^2-1)(e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1})^2-4},$$
$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{16}{(e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1})^4}.$$

Pro $c = 1$ dává rovnice (12)

$$f_1 = \frac{2}{e^{-(u+v)} - e^{u+v}},$$

lin. element (15) vztažený na čáry křivoznačné

$$u + v = \alpha, \quad u - v = \beta$$

přechází pak do tvaru

$$ds^2 = \alpha_1^2 (d\alpha_1^2 + d\beta_1^2),$$

při čemž kladeno

$$-2\int \frac{d\alpha}{f_1} = e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2\alpha_1.$$

Souřadnice rotační plochy o hořejším tvaru lin. elementu jsou tudíž

$$x = -\frac{\alpha_1}{l} \sin l\beta, \quad y = \frac{\alpha_1}{l} \cos l\beta,$$
$$z = \frac{1}{l}\int \sqrt{l^2\alpha_1^2 - 1}\, d\alpha_1,$$

a poněvadž

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{l^2\alpha_1^2 - 1}}, \quad D''_1 = \sqrt{l^2\alpha_1^2 - 1},$$

jest totální křivost

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{\alpha_1^4}.$$

Stane-li se totální křivost 0, na př. pro $\frac{1}{R_1} = 0$, jest pro lin. element $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ vztažený na čáry křivoznačné i $D = 0$. Rovnice Codazziho redukují se pak na

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}\sqrt{G} = 0, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{D''}{G}\frac{\partial G}{\partial u},$$

klademe-li $E = 1$. Z druhé rovnice jde

$$\sqrt{G} = V_1 + uV = V\left(\frac{V_1}{V} + u\right),$$

kde V, V_1 jsou funkce argumentu v. Zavedeme-li místo $-\frac{V_1}{V}$ novou proměnnou a označíme krátce v, obdržíme

$$G = V^2 (u - v)^2.$$

Třetí rovnice dává pak, značí-li V_2 funkci argumentu v

$$D'' = V_2 (u - v).$$

Obdržíme tudíž charakteristický tvar lin. elementu ploch rozvinutelných

$$ds^2 = du^2 + V_2^2 (u - v)^2 dv^2.$$

Rovnice čar charakteristických redukuje se na

$$dv^2 = 0,$$

t. j. $v = konst$, kterožto rovnicí jsou dány i čáry assymptotické.

Jsou tudíž plochy s čarami charakteristickými nulové geodetické křivosti plochy rotační uvedených tvarů a plochy rozvinutelné.

Integrál Poissona jako přímý důsledek integrálu Cauchyho.

Píše **V. Láska.**

Integrál *Poissona* lze, jak známo, odvoditi z integrálu *Cauchyho* buď pomocí integrálu *Hadamarda* (viz n. p. *Kowalewski*, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen § 52. a § 53.) aneb na základě funkce *Greena* (viz *Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie I., str. 633). V tomto pojednání hodlám dokázati, že lze i přímou cestou dospěti k cíli.

Budiž $f(z)$ analytická funkce v kruhu K o poloměru R, vyjímaje pól z. Dle známé věty Cauchyho jest

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (1)$$