Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Klíma

Poznámka k theorii kuželoseček vepsaných do rovnoběžníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 4, 497--500

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123037

a tu platí: přímky AN_1 a AM_1 vytínají na přímce CD konstantní délku N_2M_2.

Věta tato plyne přímo z předchozí na základě kollineace. Volíme-li za osu kollineace přímku CD a přiřadíme-li tečnám v bodech C a D tečny, jež stojí kolmo na osu CD, pak kuželosečky K, K_1 přejdou v kuželosečky K', K'_1, pro které přímka CD jest osou; bod A přejde v A' a přímce t odpovídá nekonečně vzdálená přímka v soustavě kuželoseček K' a K'_1. Přímce AN_2 odpovídá přímka $A'N'_2$, rovnoběžná s přímkou CN', a přímce AM_2 rovnoběžka s přímkou $M'D$, jdoucí bodem A', značí-li N' a M' body, v něž kollineací přešly body N a M; poněvadž body na ose kollineační sobě samy odpovídají, t. j.

$$M_2 \equiv M'_2,$$
$$N_2 \equiv N'_2,$$

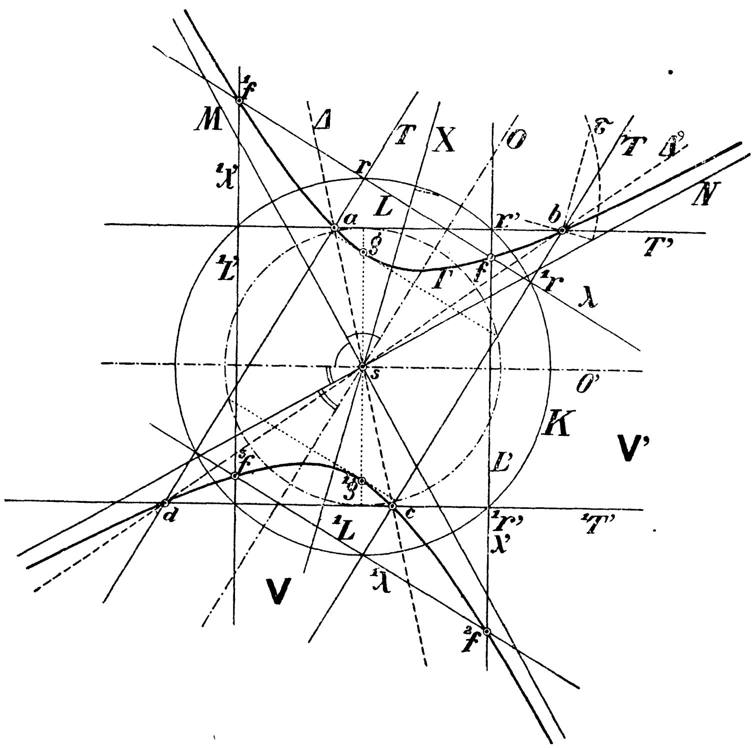
a jelikož délka $M'_2N'_2$ dle dřívějšího jest konstantní, jest i M_2N_2 konstantní.

Poznámka k theorii kuželoseček vepsaných do rovnoběžníka.

Napsal Josef **Klíma**, assistent techniky.

V roč. XLI. tohoto časopisu na str. 97. a násl. a str. 639. a násl. odvozuje pan prof. *R. Hruša* v článku: *„Poznámky k theorii kuželoseček“* některé zajímavé vztahy pro kuželosečky vepsané obdélníku neb rovnoběžníku cestou analytické geometrie. Mimo jiné dokazuje též větu, že ohniska kuželoseček vepsaných do rovnoběžníku vyplňují jistou rovnoosou hyperbolu, jež v případě, že lze rovnoběžníku tomu kružnici vepsati, rozpadá se ve dvě kolmé přímky. V následujícím chci týž výsledek odvoditi jednoduchou prostorovou interpretací.

Buďtež dány čtyři tečny $T \| {}^1T$ a $T' \| {}^1T'$ kuželosečky, takže určují rovnoběžník $abcd$ této opsaný. Kuželoseček, jež dotýkají se těchto, je ∞^1 a tvoří t. zv. *řadu.* Všechny tyto mají společný střed s, průsečík to úhlopříček $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ a společný pár sdružených průměrů (ale jen co do směrů) $\varDelta \equiv \overline{ac}$, $\varDelta' \equiv \overline{bd}$, jež s nekonečně vzdálenou přímkou určují společný trojúhelník polárný řady té. Libovolným bodem p procházejí dvě kuželosečky, jichž tečny v tom bodě sestrojí se co samodružné paprsky involuce dané dvěma páry p $(a, c; b, d)$. Libovolné pak přímky P dotýká se jen jediná kuželosečka řady, jež je určena pěti tečnami. Ohnisko libovolné kuželosečky řady není možno si zvoliti,



ježto toto dává dvě podmínky (dvě imag. tečny, samodružné to prvky pravoúhlé involuce paprskové) a tudíž kuželosečka ta dána by byla 6ti podmínkami čili přeurčena. I vyplňují ohniska všech kuželoseček této řady jistou křivku, jíž možno určiti následovně.

Budiž f ohnisko jedné z kuželoseček řady té. Pak dle známé věty musí paty r, ${}^1r$, r', ${}^1r'$ kolmic spuštěných z tohoto na tečny T, ${}^1T$, T', ${}^1T'$ ležeti na vrcholové kružnici K opsané nad hlavní osou co průměrem. Ježto $T \parallel {}^1T$ a $T' \parallel {}^1T'$ splývají vždy dvě kolmice v jednu $\overline{fr} \equiv \overline{f^1r} \equiv \lambda$ a $\overline{fr'} \equiv \overline{f^1r'} \equiv \lambda'$. Takže ohniska jednotlivých kuželoseček dostaneme, opíšeme-li kol společného středu s kružnici K libovolným poloměrem, délkou zároveň hlavní poloosy příslušné kuželosečky, tu spojnice průsečíků kružnice K s tečnami T, ${}^1T$ a T', ${}^1T'$ protínají se v hledaném ohnisku. Patrně pro zvolenou hlavní poloosu dostáváme 4 ohniska f, ${}^1f$, ${}^2f$, ${}^3f$, z nichž dvě v obrazci uvnitř rovnoběžníka ležící f, ${}^3f$ náležejí téže ellipse a dvě ${}^1f$, ${}^2f$ vně rovnoběžníka patrně v $\sphericalangle\, TT'$ a $\sphericalangle\, {}^1T'\, {}^1T$ ležící patří hyperbole mající tutéž hlavní osu co do délky. Měněním poloměru kružnice K dostali bychom další ohniska. Při tom ale poloměr tento nesmí býti patrně menší, než je vzdálenost středu s od vzdálenější tečny T'. Zvolíme-li poloměr roven této vzdálenosti, dostáváme ohniska g a ${}^1g$ ellipsy vepsané o minimální hlavní poloose.

Připišme nyní těmto konstrukcím prostorový význam. T a ${}^1T$ buďtež protilehlé površky rotační plochy valcové $\mathbf{V}$ o ose $O \parallel T$ a obdobně T' a ${}^1T'$ nechť jsou protější površky druhé rotační plochy válcové $\mathbf{V}'$ o ose $O' \parallel T'$. Tyto mají patrně tutéž rovinu hlavní. Jich vzájemný průsek je křivka 4-ho stupně souměrná dle této roviny a promítající se na tuto do křivky stupně 2-ho *). Konstrukce její souhlasí zcela s konstrukcí ohnisek dříve uvedenou. Kol průsečíku s os O, O' obou ploch opíše se plocha kulová ϱ hlavní kružnici K, tato protíná prvou plochu válcovou v kružnicích L, ${}^1L$ v rovinách λ a ${}^1\lambda$, druhou pak v kružnicích L', ${}^1L'$ v rovinách λ' a ${}^1\lambda'$. Tyto mají buď reálné společné průsečíky vždy po dvou souměrné dle hlavní roviny, jež mají společný průmět $f \equiv (L.\ L')$ neb ${}^3f \equiv ({}^1L,\ {}^1L')$, nebo mají dva imag. sdružené body společné též souměrné dle hlavní roviny, jež mají ale společný reálný průmět ku př. body ${}^1f \equiv (L,\ {}^1L')$ a ${}^2f \equiv ({}^1L,\ L')$. I vidíme tedy, že ono geometrické místo ohnisek kuželoseček vepsaných do rovnoběžníka *abcd* splývá s průmětem průsečné křivky válcových ploch rotačních $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$, při čemž třeba bráti i části „liché“, jež jsou průměty imag. větví proniku. Tímto průmětem je při rotačních plochách válcových

*) Viz ku př. p. vl. r. *V. Jarolímka*: »Deskriptivní geometrie pro vyšší reálky«, vyd. 5., str. 189.

rovnoosá hyperbola Γ, jež prochází vrcholy a, b, c, d rovnoběžníka a jejíž asymptoty M, N půlí úhly os O a O'. Z těchto dat snadno odvodíme osu X a délku její $b\bar{r}$.

V případě obdélníka dostáváme zřejmě týž výsledek. Když však možno rovnoběžníku tečen vepsati kružnici, pak patrně obě rotační plochy válcové dotýkají se téže plochy kulové a tudíž samy sebe ve dvou bodech, jichž průměty splývají se středem s. Průsečná pak křivka ploch válcových **V** a **V'** rozpadá se ve dvě kuželosečky, jichž průměty jsou úhlopříčky Δ a Δ' kosočtverce neb čtverce a hyperbola rovnoosá Γ rozpadá se v tyto kolmé úhlopříčky.

Rovnoosá hyperbola Γ je též geometrickým místem bodů, jimiž procházejí dvě orthogonálně se protínající kuželosečky řady. Neboť v některém bodě této f stanoví řada ta involuci paprskovou, jejíž jednotlivé páry jsou tečny k jednotlivým kuželosečkám. Samodružné pak paprsky této dávají tečny k oběma kuželosečkám řady bodem tím jdoucí. Jednou kuželosečkou řady té je též ta, jež má v f ohnisko a k té vedené tečny jsou samodružné paprsky pravoúhlé involuce paprskové, a ježto tyto musí s oněmi samodr. paprsky tvořit harmonickou čtveřinu, musí být ony tečny k oběma kuželosečkám bodem f jdoucím k sobě kolmy. Tudíž:

Rovnoosá hyperbola Γ je též geometrickým místem bodů, jimiž jdoucí kuželosečky vepsané do daného rovnoběžníka se orthogonálně protínají.

Úvod ke článku p. A. Jemelky.

Píše **V. Láska.**

Prací p. A. Jemelky zahajuji uveřejňování výtahů z větších pojednání z oboru dějin věd mathematických v Čechách. Již dříve před odchodem na techniku ve Lvově jako assistent astronomického ústavu pilně sbíral jsem materiál, hodlaje ve volných chvílích napsati dějiny věd mathematických v Čechách. Po návratu do vlasti vrátil jsem se opět k tomuto thematu. Jsa však plně zaměstnán v jiných směrech, nemohl jsem se ovšem náležitě věnovati tak namáhavému a tolik času vyžadujícímu