Karel Petr

O sčítání řad numerických. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 4, 465--493

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123036

O sčítání řad numerických.

Pro studující napsal **K. Petr.**

(Dokončení.)

10. Hlavním úkolem jest udati pohodlné prostředky ku výpočtu čísel β_ϱ, d_ϱ. Z (1) máme nejprve pro $\varrho+1$

$$\begin{aligned} A_{\varrho+1}(x) &= V(x)\,\varphi_{\varrho+1}(x)\,\varphi_{\varrho+1}(x+1) + \\ U(x)\,(\psi_{\varrho+1}(x)\,\varphi_{\varrho+1}(x+1) &- a\,\varphi_{\varrho+1}(x)\,\psi_{\varrho+1}(x+1)). \end{aligned} \tag{4}$$

Dosadíme-li sem za

$$\varphi_{\varrho+1}(x) = b_{\varrho+1}(x)\,\varphi_\varrho(x) + d_{\varrho+1}\,\varphi_{\varrho-1}(x),\ \psi_{\varrho+1}(x) = \ldots,$$

a výsledky náležitě srovnáme, dostaneme

$$\begin{aligned} A_{\varrho+1}(x) = b_{\varrho+1}(x)\,b_{\varrho+1}(x+1)\,A_\varrho(x) &+ d_{\varrho+1}\,b_{\varrho+1}(x)\,S_\varrho(x) + \\ d_{\varrho+1}\,b_{\varrho+1}(x+1)\,R_\varrho(x) &+ d^2_{\varrho+1}\,A_{\varrho-1}(x); \end{aligned} \tag{5}$$

při čemž jest pro krátkost

$$\begin{aligned} S_\varrho(x) &= V(x)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1) + \\ U(x)\,(\psi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1) &- a\,\psi_{\varrho-1}(x+1)\,\varphi_\varrho(x)), \\ R_\varrho(x) &= V(x)\,\varphi_\varrho(x+1)\,\varphi_{\varrho-1}(x) + \\ U(x)\,(\psi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x+1) &- a\,\psi_\varrho(x+1)\,\varphi_{\varrho-1}(x)). \end{aligned} \tag{6}$$

$S_\varrho(x)$ jest čitatelem výrazu (uvedeného na společný jmenovatel)

$$\frac{V(x)}{U(x)} + \frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - a\,\frac{\psi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)}, \tag{7}$$

výraz tento však jest rovný výrazům

$$\left(\frac{V(x)}{U(x)} + \frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - a\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)}\right) +$$
$$+ a\left(\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)} - \frac{\psi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)}\right) =$$
$$\left(\frac{V(x)}{U(x)} + \frac{\psi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)} - a\frac{\psi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)}\right) + \left(\frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - \frac{\psi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)}\right).$$

Uvedeme-li zlomky v každé závorce na společný jmenovatel, máme, používajíce (4) a (2), pro $S_\varrho(x)$ tyto výrazy pro $a \lessgtr 1$

$$S_\varrho(x) = \frac{A_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)} - \frac{a\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\cdot\frac{U(x)\,\varphi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x+1)},$$
$$= \frac{A_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)} - \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{U(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x)}. \tag{8}$$

Docela stejně odvodíme

$$R_\varrho(x) = \frac{A_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_\varrho(x)} + \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{U(x)\,\varphi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x)},$$
$$= \frac{A_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)} + \frac{a\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{U(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)}. \tag{8'}$$

Z těchto vztahů a rovnic (6) vyplývá, že $S_\varrho(x)$, $R_\varrho(x)$ jsou mnohočleny stupně q. Ze (6) plyne ostatně snadným počtem

$$S_\varrho(x)\,R_\varrho(x) - A_\varrho(x)\,A_{\varrho-1}(x) = -\frac{a}{(1-a)^2}\,\mathbf{A}^2_{\varrho-1}\,U^2(x) \tag{9}$$

a použitím rovnic

$$\varphi_\varrho(x) = b_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\varphi_{\varrho-2}(x),\ \psi_\varrho(x) = \ldots$$
$$\varphi_\varrho(x+1) = \ldots$$

$$S_\varrho(x) = A_{\varrho-1}(x)\,b_\varrho(x) + d_\varrho\,R_{\varrho-1}(x), \tag{10}$$

$$R_\varrho(x) = A_{\varrho-1}(x)\,b_\varrho(x+1) + d_\varrho\,S_{\varrho-1}(x). \tag{10'}$$

Rovnice dosud uvedené postačují úplně k postupnému počítání čísel β_ϱ, d_ϱ. Neboť známe-li pro určité ϱ S_ϱ, R_ϱ, A_ϱ,

$A_{\varrho-1}$ (a tedy vzhledem ku (3) $d_{\varrho+1}$), vypočteme z (4) požadavkem, aby $A_{\varrho+1}(x)$ bylo stupně $q-1$ (resp. $q-2$), $b_{\varrho+1}(x) = n + \beta_{\varrho+1}$ a $A_{\varrho+1}(x)$ a tudíž i $d_{\varrho+2}$. Z rovnic pak (10) vyplývá $S_{\varrho+1}(x)$, $R_{\varrho+1}(x)$.

Aby rovnice (8), (8′), (9), (10), (10′) měly platnost i pro $a = 1$, jest $\frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}$ zaměniti v $\frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{2\varrho-1}$.

11. Pro praktické výpočty jest výhodno místo mnohočlenů S_ϱ, R_ϱ, A_ϱ zavésti jiné, jichž koefficient při nejvyšší mocnině jest rovný 1. Za tím účelem klademe při $a \gtrless 1$

$$S_\varrho(x) = -\frac{a\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\overline{S}_\varrho(x),\quad R_\varrho(x) = \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\overline{R}_\varrho(x),$$
$$A_\varrho(x) = \mathbf{A}_\varrho\overline{A}_\varrho(x).$$

Tím se obdrží vztahy (5), (9), (10) tvar:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\varrho+1}(x)\,.\,d_{\varrho+2} = &- b_{\varrho+1}(x)\,b_{\varrho+1}(x+1)\,\overline{A}_\varrho(x)\\ &-\frac{a}{1-a}b_{\varrho+1}(x)\,\overline{S}_\varrho(x) + \frac{1}{1-a}b_{\varrho+1}(x+1)\,\overline{R}_\varrho(x)\\ &+ d_{\varrho+1}\,\overline{A}_{\varrho-1}(x),\end{aligned}\tag{5$_1$}$$

$$\overline{S}_\varrho(x)\,\overline{R}_\varrho(x) - \frac{(1-a)^2}{a}d_{\varrho+1}\,\overline{A}_\varrho(x)\,\overline{A}_{\varrho-1}(x) = U^2(x),\tag{9$_1$}$$

$$\overline{S}_\varrho(x) = -\frac{1-a}{a}b_\varrho(x)\,\overline{A}_{\varrho-1}(x) + \frac{1}{a}\overline{R}_{\varrho-1}(x),\tag{10$_1$}$$

$$\overline{R}_\varrho(x) = (1-a)\,b_\varrho(x+1)\,\overline{A}_{\varrho-1}(x) + a\,\overline{S}_{\varrho-1}(x).\tag{10$'_1$}$$

Jest možno vypočítati z (8) a (8′) další člen ve výrazech $\overline{S}_\varrho$, $\overline{R}_\varrho$. Obdržíme, kladouce

$$\begin{aligned}U(x) &= x^q + u^{(1)}x^{q-1} + u^{(2)}x^{q-2} + \dots,\\ \overline{S}_\varrho(x) &= x^q + (u^{(1)} - \varrho)\,x^{q-1} + \dots,\\ \overline{R}_\varrho(x) &= x^q + (u^{(1)} + \varrho)\,x^{q-1} + \dots\end{aligned}\tag{11}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (10$_1$), máme při $a \gtrless 1$, píšeme-li

$$\overline{A}_\varrho(x) = x^{q-1} + a_\varrho^{(1)}x^{q-2} + \dots,$$

porovnáním součinitele při x^{q-1} na obou stranách

$$\beta_\varrho = \varrho \frac{1+a}{1-a} - a^{(1)}_{\varrho-1} + u^{(1)} - \frac{1}{1-a}, \tag{12}$$

kterážto formule nám dává bezprostředně β_ϱ, známe-li $\overline{A}_{\varrho-1}$, odkudž jest patrno, že k postupnému výpočtu $b_\varrho(x)$, $d_{\varrho-1}$, $A_\varrho(x)$, $S_\varrho(x)$, $R_\varrho(x)$ postačují úplně rovnice (9_1), (10_1), $(10'_1)$.

Pro případ, že $a = 1$, buď

$$S_\varrho(x) = \frac{-\mathsf{A}_{\varrho-1}}{2\varrho-1} \overline{S}_\varrho(x), \quad R_\varrho(x) = \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{2\varrho-1} \overline{R}_\varrho(x),$$

$$A_\varrho(x) = \mathsf{A}_\varrho \overline{A}_\varrho(x).$$

Pak místo (5_1), (9_1), (10_1), $(10'_1)$ dostaneme

$$\begin{aligned}(2\varrho+3)\, d_{\varrho+2}\overline{A}_{\varrho+1}(x) = &- b_{\varrho+1}(x)\, b_{\varrho+1}(x+1)\,\overline{A}_\varrho(x) \\ &- b_{\varrho+1}(x)\,\overline{S}_\varrho(x) + b_{\varrho+1}(x+1)\,\overline{R}_\varrho(x) \\ &+ (2\varrho-1)\, d_{\varrho+1}\overline{A}_{\varrho-1}(x),\end{aligned} \tag{5_2}$$

$$\overline{R}_\varrho(x)\,\overline{S}_\varrho(x) - (2\varrho+1)(2\varrho-1)\, d_{\varrho+1}\overline{A}_\varrho(x)\,\overline{A}_{\varrho-1}(x) \tag{9_2}$$

$$\overline{S}_\varrho(x) = -(2\varrho-1)\,\overline{A}_{\varrho-1}(x)\, b_\varrho(x) + \overline{R}_{\varrho-1}(x), \tag{10_2}$$

$$\overline{R}_\varrho(x) = (2\varrho-1)\,\overline{A}_{\varrho-1}(x)\, b_\varrho(x+1) + \overline{S}_{\varrho-1}(x). \tag{$10'_2$}$$

Rovnice (11) zůstávají i v tomto případě v platnosti.

Z těchto rovnic postačí ku postupnému počítání $b_\varrho(x)$, d_ϱ a tedy i polynomů $\varphi_\varrho(x)$ $\psi_\varrho(x)$ opět buď rovnice (5_2), (10_2), $(10'_2)$ anebo (9_2), (10_2), $(10'_2)$.

V následujícím použijeme odvozených rovnic k řešení několika příkladů, ve kterých d_ϱ, $b_\varrho(x)$ obecně se dají vyjádřiti v jednoduchém tvaru.

III.

12. Užijme formulí obecných nejprve na výpočet řady

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots + \frac{a^k}{k} + \ldots,$$

jejížto součet jest, jak známo, — přir. *log* $(1-a)$, jestliže $-1 \leqq a < 1$. Tu jest, $V(x) = 1$, $U(x) = x$; $q = 1$. Mnohočleny $S_\varrho(x)$, $R_\varrho(x)$, $A_\varrho(x)$ budou stupňů resp. 1, 1, 0 a jest dle (11) a 12) ihned

$$\bar{S}_\varrho(x) = x - \varrho, \quad \bar{R}_\varrho(x) = x + \varrho, \quad \bar{A}_\varrho(x) = 1,$$

$$\beta_\varrho = \varrho \frac{1+a}{1-a} - \frac{1}{1-a};$$

d_ϱ vypočteme nejsnáze z (9_1). Obdržíme dosazením

$$(x^2 - \varrho^2) - \frac{(1-a)^2}{a} d_{\varrho+1} = x^2,$$

t. j.

$$d_{\varrho+1} = -\frac{a}{(1-a)^2}\varrho^2, \quad d_\varrho = -\frac{a}{(1-a)^2}(\varrho-1)^2.$$

Abychom znali polynomy $\varphi_\varrho(x)$ a $\psi_\varrho(x)$ úplně, jest ještě třeba je vypočítati pro dva první indexy. Můžeme nejprve klásti $\psi_0(x) = 0$, $\varphi_0(x) = 1$. Pro $A_0(x)$ dostáváme dosazením $A_0(x) = 1$. Přímým počtem pak máme

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{1-a}, \quad \varphi_1(x) = x + \frac{a}{1-a},$$

$$A_1(x) = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Zavedeme-li, abychom vyhnuli se zlomkům, místo polynomů $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$ mnohočleny $\varphi'_\varrho(x) = (1-a)^\varrho \varphi_\varrho(x)$, $\psi'_\varrho(x) = (1-a)^\varrho \psi_\varrho(x)$, budou patrně mnohočleny ty v tomto případě definovány těmito rovnicemi (β_ϱ se násobí $1-a$, d_ϱ pak $(1-a)^2$)

$$\psi'_\varrho(x) = [(1-a)x + \varrho(1-a) - 1]\,\psi'_{\varrho-1}(x) - a(\varrho-1)^2\,\psi'_{\varrho-2}(x),$$

$$\varphi'_\varrho(x) = [(1-a)x + \varrho(1-a) - 1]\,\varphi'_{\varrho-1}(x) - a(\varrho-1)^2\,\varphi'_{\varrho-2}(x),$$

$$\psi'_0(x) = 0, \quad \varphi'_0(x) = 1, \quad \psi'_1(x) = -1,$$

$$\varphi'_1(x) = (1-a)x + a,$$

ze kterých postupně $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ dají se vypočítati.

Máme tak tento výsledek: Součet řady

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^k}{k} + \dots$$

rovná se přibližně výrazu

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^{n-1}}{n-1}-a^n\frac{\psi'_\varrho(n)}{\varphi'_\varrho(n)},$$

při čemž $\frac{\psi'_\varrho(n)}{\varphi'_\varrho(n)}$ jest ϱ-tá přibližná hodnota nekonečného řetězce

$$\cfrac{-1}{(1-a)n+1.(1+a)-1+\cfrac{-1^2.a}{(1-a)n+2(1+a)-1+}}$$
$$+\cfrac{-2^2.a}{(1-a)n+3(1+a)-1+\cdot}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

Při tom jest chyba menší než výraz

$$\frac{a^n}{n(1-a)}\,\frac{A_\varrho}{\varphi'_\varrho(n)\,\varphi'_\varrho(n+1)}=\frac{a^{n+\varrho}}{n(1-a)}\,\frac{(\varrho!)^2}{\varphi'_\varrho(n)\,\varphi'_\varrho(n+1)}$$

a s ním co do znaménka shodná.*)

V tomto výsledku jest obsažen, jakožto zvláštní případ, další, podávající známé vyjádření $log\,\frac{1}{1-a}$ zlomkem řetězovým. Jest

$$log\,\frac{1}{1-a}=\cfrac{a}{1.(1+a)-a+\cfrac{-1^2.a}{2(1+a)-a+}}$$
$$+\cfrac{-2^2.a}{3(1+a)-a+\cdot}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

13. Jakožto další příklad zvolím řadu

$$\frac{\pi}{sin\,\pi\xi}=\frac{1}{\xi}-\left(\frac{1}{\xi+1}+\frac{1}{\xi-1}\right)+\left(\frac{1}{\xi+2}+\frac{1}{\xi-2}\right)-\ldots$$

Řadu tuto, jejíž součet jednoduše se vyjadřuje pomocí $sin\,\pi\xi$, jakož bylo vyznačeno, budeme psáti ve tvaru pro další

*) Jest možno velikost chyby (anebo jinak řečeno »zbytku«) počítati také na základě vět o zlomcích řetězových; tím dospějeme v některých případech k číslům podstatně menším.

vyšetřování účelnějším

$$\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi+1}\right)-\left(\frac{1}{\xi-1}-\frac{1}{\xi+2}\right)+\left(\frac{1}{\xi-2}-\frac{1}{\xi+3}\right)-\dots$$

t. j.

$$\frac{1}{\xi^2+\xi}-\frac{3}{\xi^2+\xi-1\,.\,2}+\frac{5}{\xi^2+\xi-2\,.\,3}-\dots$$

Obecný $(n+1)$-vý člen této řady jest

$$(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n-\xi^2-\xi}$$

a úkol náš jest sestrojiti mnohočleny $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ tak, aby v rovnici

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2+x-\xi^2-\xi}+\frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)}+\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)}\\ =\frac{A_\varrho(x)}{(x^2+x-\xi^2-\xi)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x+1)}\end{aligned}\tag{1}$$

bylo $A_\varrho(x)$ stupně 1. Tento úkol jest řešitelný pro $\varrho=0$, $\varrho=1$, $\varrho=2$; přímým počtem dostáváme snadno

$$\begin{aligned}&\psi_0(x)=0, &&\varphi_0(x)=1,\\ &\psi_1(x)=-1, &&\varphi_1(x)=x,\\ &\psi_2(x)=-x, &&\varphi_2(x)=x^2-(\xi^2+\xi),\end{aligned}$$

$$A_0(x)=2\left(x+\tfrac{1}{2}\right),$$
$$A_1(x)=2(\xi^2+\xi)\left(x+\tfrac{1}{2}\right),$$
$$A_2(x)=-2(\xi^2+\xi)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

a rovnice obecné odst. 10. nás poučují, že jest řešitelný pro každé ϱ a to jednoznačně, stanovíme-li, že součinitel při x^ϱ ve $\varphi_\varrho(x)$ jest 1.

Píšeme-li v (1) $-x-1$ místo x, máme po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2+x-\xi^2-\xi}-\frac{\psi_\varrho(-x)}{\varphi_\varrho(-x)}-\frac{\varphi_\varrho(-x-1)}{\varphi_\varrho(-x-1)}\\ =\frac{-A_\varrho(-x-1)}{(x^2+x-\xi^2-\xi)\,\varphi_\varrho(-x)\,\varphi_\varrho(-x-1)},\end{aligned}$$

ze kteréžto rovnice se zřetelem k tomu, že mnohočleny $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ jsou určeny jednoznačně, porovnáme-li ji s (1), vyplývá

$$\frac{\psi_\varrho(-x)}{\varphi_\varrho(-x)} = -\frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)}, \quad -A_\varrho(-x-1) = +A_\varrho(x)$$

t. j. jeden z polynomů $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$ jest vždy sudý a druhý lichý; $A_\varrho(x)$ pak jest rovno nulle pro $x = -\frac{1}{2}$, tudíž

$$A_\varrho(x) = \mathbf{A}_\varrho \, . \, (x + \tfrac{1}{2}).$$

Pro mnohočleny $S_\varrho(x)$ a $R_\varrho(x)$ plyne snadno z rovnic (8) a (8') odst. 10. následkem okolnosti, že polynom $\varphi_\varrho(x)$ jest sudý resp. lichý dle toho, je-li ϱ sudé či liché (při $a = -1$)

$$S_\varrho(-x-1) = R_\varrho(x),$$

odkudž též

$$\overline{S}_\varrho(-x-1) = \overline{R}_\varrho(x).$$

Klademe-li tedy ve shodě s (11) odst. 11.

$$\overline{S}_\varrho(x) = x^2 + (1-\varrho)x + s_\varrho^{(2)},$$

obdržíme z tohoto vztahu

$$\overline{R}_\varrho = x^2 + (1+\varrho)x + s_\varrho^{(2)} + \varrho.$$

K obecnému výpočtu $s_\varrho^{(2)}$ a d_ϱ použijeme (9_1) odst. 10). Dosazením dostaneme

$$(x^2 + (1-\varrho)x + s_\varrho^{(2)})(x^2 + (1+\varrho)x + s_\varrho^{(2)} + \varrho) \\ + d_{\varrho+1}(2x+1)^2 = (x^2 + x - \xi^2 - \xi)^2,$$

ze kteréžto rovnice porovnáním stejných mocnin x (a řešením dvou rovnic) získáme

$$2s_\varrho^{(2)} + \varrho - \tfrac{1}{2} = \pm(2(\xi^2+\xi) + \tfrac{1}{2}), \tag{2}$$

$$4d_{\varrho+1} = \varrho^2 - 2(\xi^2+\xi) - \tfrac{1}{2} \mp (2(\xi^2+\xi) + \tfrac{1}{2}). \tag{3}$$

Z rekurrentních relací pro $\overline{S}_\varrho$, $\overline{R}_\varrho$ máme (při $b_\varrho(x) = x$, $\overline{A}_\varrho(x) = x + \frac{1}{2}$), $\overline{S}_\varrho(x) = -2x - 1 + \overline{S}_{\varrho-2}(x)$, odkudž jest patrno, že při sudých (resp. lichých) ϱ jest vždy voliti totéž znaménko ve (2). Jelikož pak

$$S_1(x) = x^2 + \xi^2 + \xi, \qquad S_2(x) = x^2 - x - \xi^2 - \xi - 1,$$

jest jasno, že v (2) místo $\pm$ můžeme psáti $(-1)^{\varrho-1}$. I jest tedy z (3)

$$d_{2\mu} = (\mu + \xi)(\mu - 1 - \xi), \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$
$$d_{2\mu+1} = \mu^2. \qquad d_1 = -1.$$

Tak dostáváme, že $\dfrac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)}$ jest rovno ϱ-té přibližné hodnotě nekonečného zlomku řetězového

$$\cfrac{-1}{x + \cfrac{(1+\xi)(0-\xi)}{x + \cfrac{1^2}{x + \cfrac{(2+\xi)(1-\xi)}{x + \cfrac{2^2}{x + \ldots}}}}}$$

funkci pak $\dfrac{\pi}{\sin \pi\xi}$ lze počítati na základě výrazu

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi+2} + \frac{1}{\xi-2} - \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^n}{\xi - n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\xi + n + 1} + (-1)^{n+1} \frac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)},$$

při čemž hranici pro chybu snadno možno udati. Jest totiž

$$\mathsf{A}_\varrho = 2 \,.\, (-1)^{\varrho-1} d_1\, d_2 \ldots d_{\varrho+1},$$

a tudíž chyba jistě menší než

$$\frac{(-1)^{n+\varrho} d_1 \,.\, d_2 \ldots d_{\varrho+1} (2x+1)}{(\xi - n + 1)(\xi + n + 2)\, \varphi_\varrho(n+1)\, \varphi_\varrho(n+2)}.$$

14. Poskytuje jistý zájem užíti methody pro odvození formule Wallisovy (odst. 6.) ku přeměně řady předcházejícího odstavce v nekonečný součin. K tomu účelu odvodíme si rovnici funkcionální, které v obecném případě hoví polynomy $\varphi_\varrho(x)$. Z rovnic (8), (8′) odst. 10. plyne ihned

$$-\frac{S_\varrho(x-1)}{A_\varrho(x-1)} + \frac{R_\varrho(x)}{A_\varrho(x)} = \frac{a\mathsf{A}_{\varrho-1}}{1-a} \frac{U(x-1)\,\varphi_\varrho(x-1)}{A_\varrho(x-1)\,\varphi_\varrho(x)}$$
$$+ \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{1-a} \frac{U(x)\,\varphi_\varrho(x+1)}{A_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x)},$$

anebo v poněkud jiné úpravě

$$U(x)\,\overline{A}_\varrho(x-1)\,\varphi_\varrho(x+1)+a\,U(x-1)\,\overline{A}_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x-1)$$
$$=\left[\overline{R}_\varrho(x)\,A_\varrho(x-1)+a\,\overline{S}_\varrho(x-1)\,\overline{A}_\varrho(x)\right]\varphi_\varrho(x).$$

Dosadíme-li v našem případě

$$a=-1,\ \overline{A}_\varrho(x)=x+\tfrac{1}{2},\ \overline{R}_\varrho=x^2+(1+\varrho)\,x+s_\varrho^{(2)}\,S_\varrho,\ldots$$

dostaneme

$$(x^2+x-\xi^2-\xi)\,(2x-1)\,\varphi_\varrho(x+1)$$
$$-(x^2-x-\xi^2-\xi)\,(2x+1)\,\varphi_\varrho(x-1)$$
$$=\left[(4\varrho+2)\,x^2-(\varrho+\tfrac{1}{2})-(-1)^{\varrho-1}(2\xi^2+2\xi+\tfrac{1}{2})\right]\varphi_\varrho(x).$$

Z rovnic

$$\varphi_\varrho(x)=x\varphi_{\varrho-1}(x)+d_\varrho\,\varphi_{\varrho-2}(x)$$

nejprve vyplývá při ϱ *sudém* $\varphi_\varrho(0)=d_\varrho\,d_{\varrho-2}\ldots d_2$. Z rovnice funkcionální pak obdržíme pro $x=0,\ 1,\ 2,\ldots$ rekurrentní rovnice pro $\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3),\ldots$ pomocí nichž cestou v odst. 6. naznačenou dostáváme toto vyjádření, klademe-li $\varrho=2u$,

$$\frac{\pi}{\sin\pi\xi}=$$
$$\frac{1}{\xi\left(1+\frac{\xi}{1}\right)\left(1-\frac{\xi}{1}\right)\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\xi}{u-1}\right)\left(1+\frac{\xi}{u}\right)}$$
$$\cdot\cfrac{\gamma_0}{\delta_0+\cfrac{\gamma_1}{\delta_1+\cfrac{\gamma_2}{\delta_2}+\cdots}}\,,$$

kdež

$$\gamma_k=(k^2-k-\xi^2-\xi)^2\,(2k+1)\,(2k-3),\quad \gamma_0=-u;$$
$$\delta_k=(8u+2)\,k^2-2u+2\xi^2+2\xi,\qquad \delta_0=-u+\xi^2+\xi;$$
$$k=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Možno též psáti

$$\sin\pi\xi=\pi\xi\left(1-\frac{\xi^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\xi^2}{(u-1)^2}\right)\left(1+\frac{\xi}{u}\right)\Phi(\xi),\tag{1}$$

při čemž

$$\Phi(\xi) = 1 - \frac{\xi^2 + \xi}{u} + \frac{1}{u} \frac{3(\xi^2 + \xi)^2}{\delta_1 + \frac{\gamma_2}{\delta_2 + \cdot}} .$$

Čísla $\delta_1, \delta_2, \ldots \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ jsou pro každé ξ čísla kladná. Z rovnice (1) vyplývá v limitě (necháme-li u vzrůstati nade všecky meze) známé vyjádření $sin\, \pi\xi$ nekonečným součinem.

15. Jakožto poslední příklad k užití obecných rovnic zvolíme si řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + u^{(1)} n + u^{(2)}} . \tag{1}$$

V této řadě jest $a = 1$ a nastupují tudíž rovnice (5_2), (9_2), (10_2), ($10'_2$). Poněvadž stupeň $q = 2$, jest $A_\varrho(x)$, které jest stupně $q - 2$, konstanta a $\overline{A}_\varrho(x) = 1$. Rovnice ($9_2$) obdrží tvar

$$(x^2 + (u^{(1)} + \varrho)\, x + r^{(2)}_\varrho)\,(x^2 + (u^{(1)} - \varrho)\, x + s^{(2)}_\varrho)$$
$$- (2\varrho + 1)(2\varrho - 1)\, d_{\varrho+1} = (x^2 + u^{(1)}x + u^{(2)})^2.$$

Porovnáním koefficientů různých mocnin x dostáváme rovnice

$$r^{(2)}_\varrho + s^{(2)}_\varrho - \varrho^2 = 2u^{(2)}$$
$$u^{(1)}(r^{(2)}_\varrho + s^{(2)}_\varrho) + \varrho\,(s^{(2)}_\varrho - r^{(2)}_\varrho) = 2u^{(1)}\, u^{(2)}$$
$$r^{(2)}_\varrho\, s^{(2)}_\varrho - (u^{(2)})^2 = (2\varrho + 1)(2\varrho - 1)\, d_{\varrho+1} .$$

Z těchto rovnic plyne (při $\varrho \geqq 1$)

$$s^{(2)}_\varrho = \tfrac{1}{2}\varrho^2 - \tfrac{1}{2}u^{(1)}\varrho + u^{(2)}$$
$$r^{(2)}_\varrho = \tfrac{1}{2}\varrho^2 + \tfrac{1}{2}u^{(1)}\varrho + u^{(2)}$$
$$d_{\varrho+1} = \frac{\varrho^2\,(\varrho^2 + 4u^{(2)} - u^{(1)2})}{4\,.\,(2\varrho + 1)(2\varrho - 1)}$$

Z (10_2) pak následuje

$$\beta_\varrho = \frac{u^{(1)} - 1}{2} .$$

Pro prvé dva indexy lze klásti $\psi_0(x) = 0$, $\varphi_0(x) = 1$, $A_0 = 1$; $\psi_1(x) = -1$,

$$\varphi_1(x) = x^2 + \frac{u_1 - 1}{2}, \quad A_1 = \frac{u^{(1)2} - 4u^{(2)} - 1}{4} = -3d_2$$

a obecně

$$A_\varrho = (-1)^\varrho (2\varrho + 1) d_2 d_3 \dots d_{\varrho+1}, \qquad \varrho > 0.$$

Lze tedy vysloviti větu: Řada (1) jest dána přibližně výrazem

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n^2 + u^{(1)} n + u^{(2)}} - \frac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)}, \tag{2}$$

kde $\dfrac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)}$ jest ϱ-tá hodnota nekonečného zlomku řetězového

$$\cfrac{-1}{n + \cfrac{u^{(1)}+1}{2} + \cfrac{d_2}{n + \cfrac{u^{(1)}+1}{2} + \cfrac{d_3}{n + \cfrac{u_1+1}{2} + \cdots}}}$$

Místo tohoto zlomku mohli bychom vzíti v počet též zlomek

$$\cfrac{-2}{2n + u_1 + 1 + \cfrac{(1^2+\delta)\,1^2}{3\,.\,(2n + u_1 + 1) + \cfrac{(2^2+\delta)\,2^2}{5\,(2n + u_1 + 1) + \cfrac{(3^2+\delta)\,3^2}{7\,(2n + u_1 + 1) + \cdots}}}} \tag{3}$$

kde pro krátkost položeno $\delta = 4u^{(2)} - u_1^2$.

Kdybychom užili dosazených formulí ku př. pro výpočet součtu nekonečné řady

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

dostali bychom přibližnou hodnotu

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10^2} + \cfrac{2}{21 + \cfrac{1}{63 + \cfrac{16}{105 + \cfrac{81}{147}}}},$$

která udává součet řady s chybou menší než $8 . 10^{-12}$. Provedeme-li naznačené počty, dostáváme pro součet číslo 1·64493406684. Součet té řady jest $\frac{\pi^2}{6}$. Jest tedy číslo π^2 přibližně rovno číslu

$$\pi = 9{\cdot}986960440104 + \vartheta \quad 0 < \vartheta < 5 . 10^{-11}$$

Obecná formule může býti užitečná při numerických výpočtech vztahujících se ku t. zv. gammafunkci; ve zvláštním pak případě, že $\delta = -\frac{1}{4}$, dostáváme jednoduchý tvar pro řetězový zlomek. Tu totiž $d_{\varrho+1} = \frac{\varrho^2}{16}$ a místo (3) nastupuje patrně

$$\frac{-4}{4n + 2u_1 + 2 + \frac{1^2}{4n + 2u_1 + 2 + \frac{2^2}{4n + 2u_1 + 2 + \cdot}}}$$

IV.

16. Vývody předcházející dají se v různých směrech zevšeobecniti. Tak není třeba činiti předpoklad, že jednotlivé členy řady jsou racionální funkce indexu. Methoda vyložená dá se užíti s prospěchem na řady, jichž obecný člen dá se vyjádřiti mocninou řadou ve tvaru

$$u_n = a^n \left[\alpha_0 n^\varrho + \alpha_1 n^{\varrho-1} + \alpha_2 n^{\varrho-2} + \ldots\right],$$

při čemž a, α_0, α_1, α_2, ... jsou nezávisly na n.

V následujícím budu však zabývati se jiným zevšeobecněním, totiž řadami, kde poměr dvou členů po sobě následujících jest racionálnou funkcí indexů. Budiž tedy dána řada

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \ldots, \tag{1}$$

kde

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \frac{V(n)}{U(n)}, \tag{2}$$

při čemž $V(n)$ a $U(n)$ jsou dva mnohočleny v n; a jest konstanta. Aby daná řada byla konvergentní, musí stupeň mnohočlenu $V(n)$ býti menší nebo rovný stupni mnohočlenu $U(n)$; tím však, že zavedli jsme konstantu a, můžeme předpokládati, že stupeň $V(n)$ jest rovný stupni $U(n)$ a že koefficienty při nejvyšších mocninách n v obou těch polynomech jsou rovny 1. Klademe tedy

$$U(x) = x^q + u^{(1)} x^{q-1} + u^{(2)} x^{q-2} + \ldots + u^{(q)},$$
$$V(x) = x^q + v^{(1)} x^{q-1} + v^{(2)} x^{q-2} + \ldots + v^{(q)}.$$

Formule, které na základě tohoto předpokladu dostaneme, dají se použíti v každém případě.

Budeme hleděti sestrojiti v x dva nové mnohočleny $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$, z nichž druhý jest stupně ϱ se součinitelem 1 při x^ϱ a takové, aby výraz

$$1 + \frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - a\,\frac{V(x)}{U(x)}\,\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)},$$

uvedeme-li jej na jmenovatel $U(x)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x+1)$, měl čitatel co nejnižšího stupně, t. j. aby $A_\varrho(x)$ dané rovnicí

$$1 + \frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - a\,\frac{V(x)}{U(x)}\,\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)} = \frac{A_\varrho(x)}{U(x)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x+1)} \tag{3}$$

bylo stupně co nejmenšího.

Jestliže místo řady (1) vezmeme v úvahu řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{A_\varrho(n)}{U(n)\,\varphi_\varrho(n)\,\varphi_\varrho(n+1)}, \tag{4}$$

vidíme nejprve snadno, že součet prvých $n+1$ členů této řady jest (vzhledem ku (3) a (2))

$$u_0 \frac{\psi_\varrho(0)}{\varphi_\varrho(0)} + u_0 + u_1 + \ldots + u_n - a u_n \frac{V(n)}{U(n)} \cdot \frac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)},$$

odkudž následuje, že konverguje-li $-a u_n \dfrac{V(n)}{U(n)}\,\dfrac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)}$ s rostoucím n k nulle, součet řady (4) zmenšený o $u_0 \dfrac{\psi_\varrho(0)}{\varphi_\varrho(0)}$ jest týž jako součet řady (1). Avšak řada (4) při vhodné volbě mnohočlenů $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ rychleji konverguje než (1), lze jí tedy s prospěchem použíti ku výpočtu součtu řady (1), zvláště pak z té příčiny, že součet prvých $(n+1)$ členů řady (4) zmenšený o $u_0 \frac{\psi_\varrho(0)}{\varphi_\varrho(0)}$ lze psáti ve tvaru

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n - a u_n \frac{V(n)}{U(n)} \frac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)}$$

anebo též ve tvaru

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n - u_{n+1} \frac{\psi_\varrho(n+1)}{\varphi_\varrho(n+1)},$$

kterýžto výraz tedy (při vhodné volbě $\varphi^{(n)}_\varrho$, $\psi^{(n)}_\varrho$) vyjadřuje s menší chybou součet řady (1) než součet prvých $(n+1)$ členů řady (1).

Způsob ku sčítání řady (1) zde vyložený jest opět zvláštním případem methody *Kummerovy*.

Lze snadno udati stupeň mnohočlenu $A_\varrho(x)$. Jestliže $a \gtrless 1$ jest stupeň $\psi(x)$ týž jako $\varphi_\varrho(x)$ a máme tudíž v obou polynomech $\varphi_\varrho(x)\, \psi_\varrho(x)$ celkem $\varrho + \varrho + 1 = 2\varrho + 1$ součinitelů, jež můžeme voliti. Při libovolných $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ jest mnohočlen $A_\varrho(x)$ stupně $2\varrho + q$, vhodnou volbou pak zmíněných $2\varrho + 1$ součinitelů lze v *obecném případě* (kdy příslušné rovnice nejsou v odporu a nejsou na sobě závislé) odstraniti $2\varrho + 1$ členů s nejvyššími mocninami, čímž se stupeň $A_\varrho(x)$ převede na $q - 1$.

Jestliže $a = 1$, můžeme voliti $\psi_\varrho(x)$ stupně $\varrho + 1$ a $A_\varrho(x)$ bude v obecném případě stupně $q - 2$.

V úvahách dalších učiním předpoklad, že při každém celém ϱ od jisté hodnoty ϱ_0 počínaje (pro $\varrho \geqq \varrho_0$) jest možno rovnici (3) vyhověti tak, aby $A_\varrho(x)$ bylo stupně $q - 1$ (resp. při $a = 1$ stupně $q - 2$) a zároveň $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ bez společné míry.

Pak odečteme-li od rovnice (3) rovnici (při $\varrho - 1 \geqq \varrho_0$)

$$1 + \frac{\psi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)} - a \frac{V(x)}{U(x)} \frac{\psi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)} = \frac{A_{\varrho-1}(x)}{U(x)\, \varphi_{\varrho-1}(x)\, \varphi_{\varrho-1}(x+1)}$$

dostaneme vztah, ze kterého způsobem svrchu již vyloženým (odst. 9.) vyplyne

$$\psi_\varrho(x)\, \varphi_{\varrho-1}(x) - \psi_{\varrho-1}(x)\, \varphi_\varrho(x) = -\frac{A_{\varrho-1}}{1-a} \qquad \text{při } a \gtrless 1$$

a

$$\psi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}x - \psi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x) = -\frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{2\varrho - 1 - (v^{(1)} - u^{(1)})}$$

při $a = 1$.

Odtud opět jako svrchu

$$\varphi_\varrho(x) = b_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\varphi_{\varrho-2}(x),$$

$$\psi_\varrho(x) = b_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\varphi_{\varrho-2}(x),$$

kde

$$b_\varrho(x) = x + \beta_\varrho,$$

$$d_\varrho = -\frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{\mathbf{A}_{\varrho-1}}, \qquad \text{při } a \gtrless 1;$$

$$d_\varrho = -\frac{2\varrho - 3 + u^{(1)} - v^{(1)}}{2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)}}\,\frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{\mathbf{A}_{\varrho-2}}, \qquad \text{při } a = 1.$$

Avšak i ostatní vztahy s jich odůvodněním s malými změnami jsou tytéž jako v odst. 10. Klademe-li zejména

$$S_\varrho(x) = U(x)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1)$$
$$+ [U(x)\,\psi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1) - a\,V(x)\,\psi_{\varrho-1}(x+1)\,\varphi_\varrho(x)],$$
$$R_\varrho(x) = U(x)\,\varphi_\varrho(x+1)\,\varphi_{\varrho-1}(x)$$
$$+ [U(x)\,\psi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x+1) - a\,V(x)\,\psi_\varrho(x+1)\,\varphi_{\varrho-1}(x)],$$

jest při $a \gtrless 1$

$$S_\varrho(x) = \frac{A_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)} - \frac{a\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{V(x)\,\varphi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x+1)}$$
$$= \frac{A_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)} - \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{U(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x)}$$

$$R_\varrho = \frac{A_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x+1)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)} + \frac{a\,\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{V(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x+1)}$$
$$= \frac{A_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_\varrho(x)} + \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a}\,\frac{U(x)\,\varphi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x)}$$

Dále

$$R_\varrho(x) = b_\varrho(x+1) A_{\varrho-1}(x) + d_\varrho S_{\varrho-1}(x), \tag{5}$$

$$S_\varrho(x) = b_\varrho(x) A_{\varrho-1}(x) + d_\varrho R_{\varrho-1}(x), \tag{6}$$

$$R_\varrho(x) S_\varrho(x) - A_{\varrho-1}(x) A_\varrho(x) = -\frac{a \mathbf{A}^2_{\varrho-1}}{(1-a)^2} U(x) V(x), \tag{7}$$

$$A_{\varrho+1}(x) = b_{\varrho+1}(x) b_{\varrho+1}(x+1) A_\varrho(x) + d_{\varrho+1} b_{\varrho+1}(x) S_\varrho(x)$$
$$+ d_{\varrho+1} b_{\varrho+1}(x+1) R_\varrho(x) + d^2_{\varrho+1} A_{\varrho+1}(x), \tag{8}$$

kteréžto postačují ku postupnému výpočtu d_ϱ, β_ϱ.

Zavedeme-li místo $R_\varrho(x)$, $S_\varrho(x)$, $A_\varrho(x)$ veličiny $\overline{R_\varrho}(x)$, $\overline{S_\varrho}(x)$, $\overline{A_\varrho}(x)$ tím, že klademe stále při $a \gtrless 1$,

$$R_\varrho(x) = \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a} \overline{R_\varrho}(x),\ S_\varrho(x) = -\frac{a \mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a} \overline{S_\varrho}(x),$$

$A_\varrho(x) = \mathbf{A}_\varrho \overline{A_\varrho}(x)$, dostáváme pro prvé členy výrazů $\overline{R_\varrho}(x)$, $\overline{S_\varrho}(x)$

$$\left.\begin{aligned} \overline{S_\varrho}(x) &= x^q + (v^{(1)} - \varrho) x^{q-1} + \dots \\ \overline{R_\varrho}(x) &= x^q + (u^{(1)} + \varrho) x^{q-1} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Rovnice, které dostáváme z (5) . . . (8) zavedením $\overline{R_\varrho}(x)$, $\overline{S_\varrho}(x)$, $\overline{A_\varrho}(x)$, netřeba, vypisovati, jelikož příslušné změny jsou snadno patrny z rovnic odst. 11. (5_1), (9_1) (10_1) ($10'_1$).

Pro β_ϱ dostáváme pak podobně jako v odst. 11 rovnici

$$\beta_\varrho = -a^{(1)}_{\varrho-1} + \varrho \frac{1+a}{1-a} + u^{(1)} - a v^{(1)} - 1. \tag{10}$$

Při $a = 1$ nastupuje změna potud, že jest položiti

$$R_\varrho(x) = \frac{\overline{\mathbf{A}}_{\varrho-1}}{2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)}} \overline{R_\varrho}(x),$$

$$S_\varrho(x) = -\frac{\overline{\mathbf{A}}_{\varrho-1}}{2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)}} \overline{S_\varrho}(x)$$

a dostáváme tyto vztahy

$$\overline{R}_\varrho(x) = (2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)})\, b_\varrho(x+1)\, A_{\varrho-1}(x) + \overline{S}_{\varrho-1}(x), \tag{5_2}$$

$$\overline{S}_\varrho(x) = -(2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)})\, b_\varrho(x)\, A_{\varrho-1}(x) + \overline{R}_{\varrho-1}(x), \tag{6_2}$$

$$\overline{R}_\varrho(x)\, \overline{S}_\varrho(x) - U(x)\, V(x) =$$
$$(2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)})(2\varrho + 1 + u^{(1)} - v^{(1)})\, d_{\varrho+1}\, \overline{A}_\varrho(x)\, A_{\varrho-1}(x). \tag{7_2}$$

Rozvoje (9) zůstávají i tu platny.

V.

17. Formulí získaných použijeme nejprve na výpočet řady

$$1 + \frac{\beta}{\gamma} a + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} a^2 + \ldots \tag{1}$$

Tu jest

$$\frac{v_{n+1}}{u_n} = \frac{V(n)}{U(n)} = \frac{n+\beta}{n+\gamma},\ q = 1.$$

I jest

$$\overline{S}_\varrho(x) = x + \beta - \varrho, \quad \overline{R}_\varrho(x) = x + \gamma + \varrho$$

a z rovnice (7_2) a (10) při $a \gtrless 1$ jest

$$d_{\varrho+1} = \frac{a}{(1-a)^2}\,[-\varrho^2 + (\beta - \gamma)\varrho]$$

$$\beta\varrho = \varrho\frac{1+a}{1-a} + \frac{\gamma - \beta a - 1}{1-a}.$$

Zvolíme-li ještě pro jednoduchost v polynomech $\varphi_\varrho(x)$ za koefficient při x^ϱ výraz $(1-a)^\varrho$, máme pro φ_ϱ tento rekurentní vztah

$$\varphi_{\varrho+1}(x) = [x(1-a) + (\varrho+1)(1+a) + \gamma - \beta a - 1]\,\varphi_\varrho(x)$$
$$+ a\,[-\varrho^2 + (\beta - \gamma)\varrho]\,\varphi_{\varrho-1}(x)$$

a obdobný též pro $\psi_\varrho(x)$.

Pro první dva indexy jest

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{1-a}, \quad \varphi_0(x) = 1;$$

$$\psi_1(x) = -x - \frac{a}{1-a} - \gamma, \quad \varphi_1(x) = (1-a)\,x +$$
$$(-a\beta + a + \gamma).$$

Tak máme tento výsledek: Řada (1) jest rovna přibližně výrazu

$$1+\frac{\beta}{\gamma}a+\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}a^2+\dots$$
$$+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}a^n$$
$$+\frac{a^{n+1}}{1-a}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\dots\gamma+n}\,\frac{\psi'_\varrho(n+1)}{\varphi'_\varrho(n+1)},$$

kde $\dfrac{\psi'_\varrho(x)}{\varphi'_\varrho(x)}$ jest ϱ-tá přibližná hodnota řetězového zlomku.

$$1+\cfrac{a(\beta-\gamma)}{(1-a)x+\beta'_1+\cfrac{d'_2}{(1-a)x+\beta'_2+\cfrac{d'_3}{(1-a)x+\beta'_3+\dots}}}$$

Při tom jest

$$\beta'_\varrho=\varrho(1+a)+\gamma-\beta a-1,$$
$$d'_\varrho=-a(\varrho-1)(\varrho+\gamma-\beta-1).$$

Zároveň vyplývá, že součet dané řady jest rovný nekonečnému zlomku řetězovému

$$\frac{1}{1-a}\cdot\left[\;1+\cfrac{a(\beta-\gamma)}{\beta'_1+\cfrac{d'_2}{\beta'_2+\cfrac{d'_3}{\beta'_3+\dots}}}\;\right]$$

Vyplývá to jako zvláštní případ předcházejícího výsledku, avšak, jak snadno nahlédnouti, jest zároveň první výsledek obsažen v druhém.

Poznámka. Řada právě projednávaná jest specielní případ t. zv. *řady hypergeometrické.* Obecná řada hypergeometrická má tvar

$$1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}a+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}a^2+\dots$$

a značí se $F(\alpha.\ \beta,\ \gamma;\ a)$. Řada (1) jest tedy $F(1,\ \beta,\ \gamma;\ a)$

Pro $F(1, \beta, \gamma; a)$ jest znám řetězový rozvoj pocházející od *Gausse**).

Jeho rozvoj jest

$$F(1, \beta, \gamma; x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \ldots}}}}}$$

kde

$$a = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad b = \frac{1(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)},$$

$$c = \frac{(\beta + 1)\gamma}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}, \qquad d = \frac{2(\gamma - \beta + 2)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)},$$

$$e = \frac{(\beta + 2)(\gamma + 1)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)}, \qquad f = \frac{3(\gamma - \beta + 1)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

18. Jako příklad pro případ $a = 1$ zvolím si řadu

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2\, \gamma(\gamma + 1)} + \ldots;$$

tedy hodnotu řady hypergeometrické $F(\alpha, \beta, \gamma; a)$, když $a = 1$. Nutná a postačující podmínka, aby řada byla konvergentní, jest, jak nám známo,

$$\alpha + \beta - \gamma < 0,$$

což budeme předpokládati. Při této řadě jest

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n + \alpha)(n + \beta)}{n(n + \gamma)};$$

kladme však obecněji

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{V(n)}{U(n)} = \frac{n^2 + v^{(1)} n + v^{(2)}}{n^2 + u^{(1)} n + u^{(2)}}.$$

Jelikož $q = 2$, jest $\overline{A}_\varrho(x) = 1$ a rovnice (7_2) v odst. 16. změní se v

$$\overline{R}_\varrho(x)\, \overline{S}_\varrho(x) - (2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)})(2\varrho + 1 + u^{(1)} - v^{(1)})\, d_{\varrho+1} = (x^2 + u^{(1)} x + u^{(2)})(x^2 + v^{(1)} x + v^{(2)}).$$

---

*) Viz jeho pojednání »Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \ldots$; Werke III., str. 135.

Dosadíme-li sem za

$$\overline{R}_\varrho(x) = x^2 + (u^{(1)} + \varrho)\, x + r^{(2)}_\varrho,$$
$$\overline{S}_\varrho(x) = x^2 + (v^{(1)} - \varrho)\, x + s^{(2)}_\varrho$$

a porovnáme nejprve součinitele při x^2 a x na obou stranách, máme tyto rovnice pro $r^{(2)}_\varrho$, $s^{(2)}_\varrho$

$$r^{(2)}_\varrho + s^{(2)}_\varrho = \varrho^2 + (u^{(1)} - v^{(1)})\, \varrho + u^{(2)} + v^{(2)}$$
$$r^{(2)}_\varrho (v^{(1)} - \varrho) + s^{(2)}_\varrho (u^{(1)} + \varrho) = u^{(1)} v^{(2)} + u^{(2)} v^{(1)}.$$

Z těchto rovnic nejprve dostaneme

$$r^{(2)}_\varrho - s^{(2)}_\varrho = \frac{\varrho^2 (u^{(1)} + v^{(1)}) + \varrho\, (u^{(1)2} - v^{(1)2}) + (u^{(1)} - v^{(1)})\,(u^{(2)} - v^{(2)})}{2\varrho + u^{(1)} - v^1}.$$

Klademe-li k vůli stručnosti

$$p_1 = u^{(1)} + v^{(1)}, \quad p_2 = u^{(2)} + v^{(2)}; \quad q_1 = u^{(1)} - v^{(1)},$$
$$q_2 = u^{(2)} - v^{(2)}, \quad \varrho + \frac{q_1}{2} = \varrho',$$

obdržíme

$$r^{(2)}_\varrho + s^{(2)}_\varrho = \varrho'^2 + p_2 - \tfrac{1}{4} q_1^2,$$
$$r^{(2)}_\varrho - s^{(2)}_\varrho = \tfrac{1}{2} p_1 \varrho' + \tfrac{1}{8} q_1 \frac{4q_2 - p_1 q_1}{\varrho'}; \tag{1}$$

z rovnice pak

$$r^{(2)}_\varrho s^{(2)}_\varrho - (2\varrho - 1 + u^{(1)} - v^{(1)})(2\varrho + 1 + u^{(1)} - v^{(1)})\, d_{\varrho+1} = u^{(2)} v^{(2)}$$

dostáváme pro $\varrho > 0$

$$4\,(2\varrho' + 1)\,(2\varrho' - 1)\, d_{\varrho+1} = \frac{\varrho'^2 - \frac{1}{4} q_1^2}{4\varrho'^2} [4\varrho'^4 + (8p_2 - q_1^2 - p_1^2)\, \varrho'^2 + \tfrac{1}{4} (q_1 p_1 - 4q_2)^2]$$

vztah to, který stanoví d_ϱ jakožto racionálnou funkci indexu ϱ. Můžeme tomuto výrazu dáti jednodušší poněkud a zajímavý tvar, je-li $v^{(1)} = \alpha + \beta$, $v^{(2)} = \alpha\beta$, $u^{(1)} = \gamma + \delta$, $u^{(2)} = \gamma\delta$, (t. j. je-li $V(n) = (n + \alpha)(n + \beta)$, $U(n) = (n + \gamma)(n + \delta)$)

$$d_{\varrho+1} = \frac{\varrho(\varrho - \alpha + \gamma)(\varrho - \alpha + \delta)(\varrho - \beta + \gamma)(\varrho - \beta + \delta)(\varrho - \alpha - \beta + \gamma + \delta)}{16\left(\varrho + \frac{q_1}{2}\right)^2 \left(\varrho + \frac{q_1 - 1}{2}\right)\left(\varrho + \frac{q_1 + 1}{2}\right)} \tag{2}$$

při $\varrho > 0$.

Ku výpočtu β_ϱ lze použíti výhodně rovnic (5_2), (6_2) odst. 16. Odečtením jich dostaneme

$$(2\beta_\varrho + 1)(2\varrho - 1 + q_1) = r_\varrho^{(2)} - s_\varrho^{(2)} + (r_{\varrho-1}^{(2)} - s_{\varrho-1}^{(2)})$$

a po dosazení z (1)

$$2\beta_\varrho + 1 = \frac{p_1}{2} + \tfrac{1}{8} q_1 \frac{4q_2 - p_1 q_1}{\varrho'(\varrho' - 1)}$$

t. j.

$$\beta_\varrho = \frac{p_1 - 2}{4} + \tfrac{1}{16} q_1 \frac{4q_2 - p_1 q_1}{\varrho'(\varrho' - 1)}. \tag{3}$$

Vztah tento platí jistě pro $\varrho > 1$.

Postačí nyní k úplnému stanovení mnohočlenů $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$ jich výpočet pro prvé dva indexy. Jest, jak přímo stanovíme

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \psi_1(x) = -\frac{1}{q_1 - 1} x + \beta_0,$$

$$\frac{\psi_2(x)}{\varphi_2(x)} = -\frac{1}{q_1 - 1} x + \beta_0 + \frac{d_1}{x + \beta_1},$$

kdež

$$\beta_0 = \frac{q_2 - \frac{1}{2}(p_1 + q_1 - 2) q_1}{q_1(q_1 - 1)}, \tag{4}$$

$$d_1 = \frac{-(-\alpha + \gamma)(-\alpha + \delta)(-\beta + \gamma)(-\beta + \delta)}{(\gamma + \delta - \alpha - \beta)(\gamma + \delta - \alpha - \beta - 1)(\gamma + \delta - \alpha - \beta + 1)} \tag{5}$$

β_1 pak vyplývá z (3) dosazením $\varrho = 1$.

Tím provedli jsme výpočty užitečné pro numerický výpočet řady

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot \delta} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)\delta(\delta + 1)} + \ldots$$

Zároveň však obdrželi jsme tento výsledek (klademe-li ve formulích odvozených $x = 0$): Řada

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot \delta} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)\delta(\delta + 1)} + \ldots \tag{6}$$

jest rovna zlomku řetězovému (za předpokladu ovšem, že tento řetězový zlomek jest konvergentní)

$$-\beta_0 - \cfrac{d_1}{\beta_1 + \cfrac{d_2}{\beta_2 + \cdots}} \tag{7}$$

při čemž pro $\varrho > 0$ jsou β_ϱ, $d_{\varrho+1}$ dány v (2) a (3) a pro $\varrho = 0$ v (4) a (5).

Odvození má dle výrazů (2), (3), (4), (5) jenom potud význam, pokud $\frac{1}{2} q_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \delta - \alpha - \beta)$ není celým číslem záporným, po případě rovným nulle a zároveň $\frac{1}{2}(q_1 + 1)$ nesmí býti záporným celým číslem a nullou. Současně jest z výrazů pro d_ϱ patrno, že řada

$$1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{\gamma \,.\, \delta} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)} + \ldots$$

jest racionálnou funkcí čísel α, β, γ, δ, jestliže jedno z čísel

$$\alpha - \gamma, \quad \alpha - \delta, \quad \beta - \gamma, \quad \beta - \delta, \quad \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

jest číslem kladným, po případě nullou a lze tuto racionálnou funkci pomocí řetězového zlomku snadno vypočísti. Tak ku př. jestli $\beta = \delta$, lze psáti

$$1 + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \ldots$$

$$= -\beta_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma - \alpha - 1},$$

což jest vztah známý, od *Stirlinga**) pocházející a v theorii gammafunkce používaný.

Rozumí se samo sebou, že vývody předcházející stále předpokládají, že řada základní (6) jest konvergentní, k čemuž nutno a stačí, aby $\alpha + \beta - \gamma - \delta < -1$. V případě, že $\delta = 1$, lze součet řady uvažované, která pak se redukuje na $F(\alpha, \beta, \gamma; 1)$, udati; jest totiž, jak známo,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)},$$

kde $\Gamma(x)$ značí gammafunkci. Tento výraz jest v předcházejícím rozvinut v řetězový zlomek a nad to jest dán prostředek jej s libovolnou přesností vypočítati, ovšem při $\alpha + \beta - \gamma < 0$.

*) V »Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum« Londini 1730, str. 12. Citováno dle M. Godefroy, »Théorie élémentaire des séries, Paris, 1903«.

Při tom jest však poznamenati, že řetězový zlomek (7) dle známého kriteria*) jistě konverguje, když $p_1 - 2 > 0$; t. j. když $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 2$; tato podmínka však nekryje se s podmínkou pro konvergenci řady (6), která jest $\gamma + \delta - \alpha - \beta > 1$. Jsou tedy řetězové zlomky (7), které konvergují, když příslušná řada (6) diverguje a naopak. Lze však vždy, jak z předcházejícího vyplývá, jednoduchým prostředkem docíliti, aby k dané řadě byl přiřazen řetězový zlomek konvergentní. Postačí totiž řadu danou psáti ve tvaru

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)} + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-2)\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-2)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-2)\delta(\delta+1)\dots(\delta+m-2)}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m+1)\delta(\delta+1)\dots(\delta+m-1)} \cdot \Sigma,$$

kde Σ jest nekonečná řada téhož tvaru jako daná (6), jenom že α, β, γ, δ jsou vesměs zvětšeny o m; ku Σ patří tudíž týž řetězový zlomek (7), jako k dané (6) až na to, že místo β_ϱ tam bude $m + \beta_\varrho$ a lze vhodnou volbou m vždy docíliti, aby $m + \beta_\varrho$ bylo kladné a také $\lim\limits_{\varrho=\infty} (m + \beta_\varrho)$ byla číslo kladné.

Abych aspoň jedním příkladem specielnějším objasnil výsledky docílené, zvolím si

$$\gamma = \delta = \alpha + 1 = \beta + 1.$$

Pak patrně běží o řadu

$$1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+2)^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+3)^2} + \dots$$

aneb o řadu

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+2)^2} + \dots \right).$$

*) Kriterium to jest: *Řetězec (7) s elementy vesměs kladnými jest jistě konvergentní, když řada*

$$\sum_k \sqrt{\frac{b_k b_{k+1}}{d_{k+1}}}$$

diverguje. Při tom ovšem postačí, když elementy aspoň od jistého indexu počínajíc jsou stále kladné.

Tu jest

$p_1 = 4\alpha + 2,\quad q_1 = 2,\quad q_2 = 2\alpha + 1,\quad p_2 = 2\alpha^2 + 2\alpha + 1$

a $\qquad \beta_0 = -\alpha - \frac{1}{2},\quad d_1 = -\frac{1}{6};\quad \beta_\varrho = 2\alpha,$

$$d_{\varrho+1} = \frac{\varrho(\varrho+1)^2(\varrho+2)}{4(2\varrho+1)(2\varrho+3)},$$

při $\varrho \geqq 1$. Máme tak tento rozvoj

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+2)^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \cfrac{\frac{1}{6}}{\alpha + \cfrac{\frac{1}{5}}{\alpha + \cfrac{\frac{18}{35}}{\alpha + \cfrac{\frac{20}{21}}{\alpha + \cdots}}}}$$

Omezíme-li se v řetězovém zlomku toliko na dva články, máme

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+2)^2} + \dots = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{5}{30\alpha^3 + 6\alpha} + \vartheta,$$

kde ϑ jest číslo kladné a

$$0 < \vartheta < \frac{3}{5\alpha^3}\,\frac{1}{(5\alpha^2+1)(7\alpha^2+5)}.$$

Je-li tedy ku př. $\alpha \geqq 10$, udává již jednoduchý výraz tu uvedený součet řady s chybou, která jest menší $1{\cdot}71 \times 10^{-9}$.*)

*) V integrálním počtu odvozuje se pro výpočet součtu obecnější řady ($s > 1$)

$$\frac{1}{x^s} + \frac{1}{(x+1)^s} + \frac{1}{(x+2)^s} + \dots \qquad (p)$$

tento vztah

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} = \frac{1}{(s-1)\,x^{s-1}} + \frac{1}{2x^s} + B_1 \frac{s}{1.2} \cdot \frac{1}{x^{s+1}}$$

$$- B_2 \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3.4}\,\frac{1}{x^{s+3}} + B_3 \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\cdot \frac{1}{x^{s+5}} - \dots$$

kde čísla $B_1, B_2, B_3, \dots$ jsou t. zv. čísla Bernoulliská a kde řada na pravé straně není sice konvergentní, avšak součet konečného počtu počátečních členů udává levou stranu s chybou, která jest menší než první zanedbaný člen. Při dosti velikém x jest tedy řada uvedená velmi užitečným prostředkem ku numerickému výpočtu součtu (p). Její odvození plyne z formule t. zv. *Euler-Maclaurinovy*, jež zase jest v úzkém vztahu ku methodě Kummerově pro sčítání řad, jakž snadno bylo by lze ukázati.

VI.

19. Doposud jsme předpokládali, že lze ke každému $\varrho \geqq \varrho_0$ sestrojiti mnohočleny $\varphi_\varrho(x)$ a $\psi_\varrho x$, z nichž první jest stupně ϱ, vyhovující určitým podmínkám. Avšak základní formule (mezi $A_\varrho(x)$, $R_\varrho(x)$, $S_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$, $U(x)$, $V(x)$) jsou správny v podstatě i v tom případě, když předpoklad zmíněný splněn není. V následujícím to toliko na příkladě objasním.

Budiž dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^3 - D(2n+1)},$$

jejíž součet jest stanoviti. Ku docílení rychleji konvergující řady vyžaduje se dle přecházejícího konstrukce mnohočlenů $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$ takových, aby ve výrazu

$$\frac{8}{(2x+1)^3 - D(2x+1)} + \frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - \frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)}$$
$$= \frac{A_\varrho(x)}{[(2x+1)^3 - D(2x+1)]\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x+1)} \qquad (1)$$

bylo $A_\varrho(x)$ stupně při daném ϱ co nejnižšího. Se zřetelem ku počtu koefficientů ve $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ lze požadovati, aby $A_\varrho(n)$ bylo prvního stupně. Koefficienty pak $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ jsou určeny racionálně (t. j. lze určení jich převésti na řešení rovnic prvního stupně) a tu jsou tyto případy možny:

1. Příslušné rovnice (které se vyžadují, aby $A_\varrho(n)$ bylo 1. stupně, když současně $\psi_\varrho(x)$ a $\varphi_\varrho(x)$ jsou bez společné míry) určují koefficienty hledané jednoznačně (zvolíme-li si koefficient při x^ϱ ve $\varphi_\varrho(x)$ rovný 1).

2. Příslušné rovnice jsou v odporu buď mezi sebou, buď s požadavkem, aby $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$ byly bez společné míry; pak není takových mnohočlenů $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$, kde $\varphi_\varrho(x)$ jest ϱ-tého stupně.

3. Příslušné rovnice neurčují úplně koefficienty v $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ (při daném ϱ); v tomto případě lze připojiti další rovnice a požadovati, aby $A_\varrho(x)$ bylo stupně nižšího než 1.; t. j. buď

stupně 0, po případě, aby $A_\varrho(x) = 0$. A tu zase mohou nastati případy pod. 1., resp. pod 2. uvedené.

Existují-li však mnohočleny $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$, z nichž druhý jest ϱ-tého stupně o koefficientu 1 při x^ϱ a takové, že $A_\varrho(x)$ rovnicí (1) stanovené jest stupně co nejnižšího, nejvýše však prvého, pak tyto polynomy (jsou-li bez společné míry), jsou určeny jednoznačně, jakž snadno vyplývá úvahou užitou k jinému cíli v odst. 3.

Buďtež tedy $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ takové mnohočleny a dosaďme do dané rovnice $-x-1$ místo x. Obdržíme změnivše zároveň znaménko

$$\frac{8}{(2x+1)^3 - D(2x+1)} + \frac{\psi_\varrho(-x)}{\varphi_\varrho(-x)} - \frac{\psi_\varrho(-x-1)}{\varphi_\varrho(-x-1)}$$
$$= \frac{A_\varrho(-x-1)}{[(2x+1)^3 - D(2x+1)]\,\varphi_\varrho(-x)\,\varphi_\varrho(-x-1)}.$$

Jest tedy $\dfrac{\psi_\varrho(-x)}{\varphi_\varrho(-x)} = \dfrac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)}$ a poněvadž $\psi_\varrho(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ jsou bez společné míry a nemohou tedy býti současně liché, jsou oba polynomy sudé a tudíž i ϱ jest sudé. Jelikož pak $A_\varrho(-x-1) = A_\varrho(x)$, nemůže býti $A_\varrho(x)$ stupně prvého a jest tedy konstanta; značme ji $\mathbf{A}_\varrho$. Další vývody shodují se úplně s vývody odst. 9. a 10. Zejména dostáváme (označujíce indexem při φ stupeň příslušného mnohočlenu)

$$\varphi_{2\varrho}(x) = (x^2 + \beta_{2\varrho})\,\varphi_{2\varrho-2}(x) + d_{2\varrho}\,\varphi_{2\varrho-4}(x)$$

a stejnou rovnici pro polynomy $\psi_{2\varrho}(x)$. Při tom jest

$$d_{2\varrho} = -\frac{4\varrho-6}{4\varrho-2}\,\frac{\mathbf{A}_{2\varrho-2}}{\mathbf{A}_{2\varrho-4}}.$$

Dále snadno odvodíme z rovnic (8) a (8') odstavce 10. $S_{2\varrho}(-x-1) = R_{2\varrho}(x)$, takže

$$\overline{R}_{2\varrho}(x) = (x+\tfrac{1}{2})^3 + r^{(1)}_{2\varrho}(x+\tfrac{1}{2})^2 + r^{(2)}_{2\varrho}(x+\tfrac{1}{2}) + r^{(3)}_{2\varrho},$$
$$\overline{S}_{2\varrho}(x) = (x+\tfrac{1}{2})^3 - r^{(1)}_{2\varrho}(x+\tfrac{1}{2})^2 + r^{(2)}_{2\varrho}(x+\tfrac{1}{2}) - r^{(3)}_{2\varrho},$$

při čemž $r^{(1)}_{2\varrho}$ určíme snadno přímým počtem; $r^{(1)}_{2\varrho} = 2\varrho$. Ostatní součinitele, jakož i $d_{2\varrho+2}$ dostaneme z rovnice (9_2) odst. 11, kterou lze psáti v tomto případě ve tvaru

$$\overline{R}_{2\varrho}(x)\,\overline{S}_{2\varrho}(x) - (4\varrho - 2)(4\varrho + 2)\,d_{2\varrho+2} = [(x+\tfrac{1}{2})^3 - \frac{D}{4}(x+\tfrac{1}{2})]^2.$$

Dostáváme tak

$$r^{(2)}_{2\varrho} = 2\varrho^2 - \frac{D}{4},\quad r^{(3)}_{2\varrho} = \varrho^3 - \varrho\frac{D}{4},$$

$$d_{2\varrho+2} = -\frac{\varrho^2(4\varrho^2 - D)^2}{64(2\varrho+1)(2\varrho-1)},\quad \beta_{2\varrho} = \tfrac{1}{2}[\varrho^2 - \varrho + \tfrac{1}{2} - \frac{D}{4}]. \tag{2}$$

Jakožto první hodnoty mnohočlenů $\varphi_{2\varrho}$, $\psi_{2\varrho}$ lze psáti

$$\varphi_0(x) = 1,\qquad \varphi_2(x) = x^2 + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{D}{8}\right)$$

$$\psi_0(x) = 0,\qquad \psi_2(x) = -\tfrac{1}{2}$$

Vidíme tedy ze (2) a z rovnic právě uvedených, že polynomy $\varphi_\varrho(x)$, $\psi_\varrho(x)$ vskutku existují pro všechna sudá ϱ, není-li $\frac{D}{4}$ celým číslem. Je-li $\frac{D}{4} = u$ rovno celému kladnému číslu, existují polynomy ty dle (2) patrně jenom pro indexy $0, 2, \ldots 2u$. (V tomto případě jest součet řady racionálným číslem.)

Tak dostáváme pro součet řady dané tento přibližný výraz

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{8}{(2k+1)^3 - D(2k+1)} - \frac{\varphi_{2\varrho}(n+1)}{\varphi_{2\varrho}(n+1)}, \tag{3}$$

při čemž $\frac{\psi_{2\varrho}(n+1)}{\varphi_{2\varrho}(n+1)}$ jest dáno ϱ-tou přibližnou hodnotou řetězového zlomku

$$\cfrac{-\tfrac{1}{2}}{(n+1)^2 + \beta_2 + \cfrac{d_4}{(n+1)^2 + \beta_4 + \cfrac{d_6}{(n+1)^2 + \beta_6 + \cdots}}}$$

$\beta_{2\varrho}$, $d_{2\varrho}$ jsou stanoveny ve (2).

Určení chyby zde není zcela jednoduché, neboť se zřetelem k tomu, že $d_{2\varrho}$ jsou stále záporná, jsou $\mathbf{A}_\varrho$ pro všecka ϱ stále téhož znaménka a rovněž členové řady dané mají stále totéž znaménko. Avšak odchylka přibližné hodnoty (3) od hodnoty dané řady jest dána řadou

$$\mathbf{A}_{2\varrho} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{[(2k+1)^3 + D\,(2k+1)]\,\varphi_{2\varrho}(k)\,\varphi_{2\varrho}(k+1)} \tag{4}$$

a mohli bychom ku přibližnému určení té odchylky užíti některé z method užívaných ku stanovení příbližnému součtu nekonečné řady (4).*)

Klademe-li $x - \frac{1}{2}$ místo x a $D = o$, obdržíme z předcházejícího prostředek pro výpočet součtu řady

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Ponecháme-li v přibližném výrazu pro součet této nekonečné řady toliko tři články, máme, berouce $n = 12$, tuto přibližnou hodnotu (po vhodné úpravě řetězového zlomku)

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{313} + \frac{-1}{3.315} + \frac{-64}{5.319},$$

kteréžto číslo jest rovno

$$1{\cdot}2020569031595941 \ldots$$

a liší se od pravé hodnoty součtu dané řady o méně než $2 \,.\, 10^{-16}$.

---

*) Jedna z takových method spočívá v tom, že danou řadu porovnáváme s řadou

$$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(z+k)\,(z+k+1)\ldots(z+k+n)},$$

jejíž součet jest

$$s = \frac{1}{n}\;\frac{1}{z\,(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$