Antonín Libický
Úvod do vektorové analyse. [VIII.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 42--57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123013

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Počet integrální. V oddíle o poli skalárním poznali jsme tři druhy integrálů: lineární $\int v\, d\mathbf{r}$, plošné $\int\int v\, d\mathbf{p}$ a prostorové $\int\int\int v\, dS$; ve výrazech těch značí jak známo v proměnnou veličinu skalární, $d\mathbf{r}$ differenciál průvodiče ve směru tečny ke křivce, podél níž integrujeme, $d\mathbf{p}$ prvek plošný a dS prvek prostorový.

Obdobné integrály vyskytují se v poli vektorovém; skalární veličina v jest tu zaměněna vektorem $\mathbf{v}$. Poněvadž však nyní součin za znamením integrace může býti skalární nebo vektoriální, rozeznávejme dva druhy integrálů lineárních:

$$\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} \quad \text{a} \quad \int \mathbf{v} \times d\mathbf{r},$$

dva druhy integrálů plošných:

$$\int\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} \quad \text{a} \quad \int\int \mathbf{v} \times d\mathbf{p}$$

a integrál prostorový $\int\int\int \mathbf{v}\, dS$.

Z těchto pěti integrálů první a třetí jsou veličiny skalární, ostatní vektoriální.

První lineární integrál, zvaný *skalárním*, jest

$$J = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}; \tag{116a}$$

integrace vztahuje se k části křivky k od bodu M_0, k němuž veden jest z pevného bodu O průvodič $\mathbf{r}_0$, do bodu M', kterému přísluší průvodič $\mathbf{r}'$. Zaměníme-li meze integrační tak, aby horní mez se stala dolní a naopak, neměníce při tom křivky, t. j. opisuje-li koncový bod průvodiče $\mathbf{r}$ křivku k směrem protivným, promění se znaménko integrálu v opačné.

Součinu za znaménkem integrace lze dáti jiný tvar; je-li totiž

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

a

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

bude dle (6)

$$\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

a

$$J = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} (v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz). \tag{116b}$$

Clifford *) nazývá tento integrál *cirkulací* vektoru $\mathbf{v}$ podél křivky k.

V geometrii sil má cirkulace vektoru tento význam: Značí-li $\mathbf{v}$ sílu, která působí v některém bodě M křivky k, jest elementární práce této síly při pošinutí podél prvku $d\mathbf{r}$ dána výrazem $\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}$. Předpokládajíce, že síla $\mathbf{v}$ mění svou velikost, pohybuje-li se její působiště na křivce k, obdržíme pro úhrnnou práci síly při pošinutí podél celé křivky k od bodu $M_0(\mathbf{r}_0)$ do bodu $M'(\mathbf{r}')$ integrál

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}.$$

Budiž nejprve ve zvláštním případě dané pole vektorové irrotationálním; pak lze pokládati vektor $\mathbf{v}$ za gradient jakési veličiny skalární w, o níž jsme již výše řekli, že jest *potenciálem* vektoru. Píšeme-li $\mathbf{v} = \nabla w$, obdržíme

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \nabla w \,.\, d\mathbf{r};$$

čili poněvadž dle (35)

$$\nabla w \,.\, d\mathbf{r} = dw,$$

jest též

$$J = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} dw = w_1 - w_0.$$

Lineární integrál J v poli irrotationálním rovná se tudíž rozdílu hodnot potenciálu w v obou mezních bodech M_0 a M'.

*) Elements of dynamic pag. 194.

Z toho jde, že integrál J má touž hodnotu, nechť integrujeme podél jakékoli křivky, vedené mezi body M_0 a M'; jinak řečeno: hodnota lineárního integrálu J jest nezávislá na dráze integrační.

Je-li daná křivka uzavřená, jest hodnota lineárního integrálu J v poli irrotationálním rovna nulle.

Neboť takovou křivku lze dvěma body M_0 a M', na ní libovolně volenými, rozděliti ve dvě části; integrujeme-li jednou podél první části na př. od bodu M_0 k bodu M' směrem kladným a po druhé podél druhé části od M_0 k M' směrem záporným, obdržíme dva integrály co do absolutní hodnoty stejné a jen znaménkem se lišící, pročež součet jejich roven jest nulle. Označíme-li lineární integrál J podél uzavřené čáry znaménkem $\int_{\circ}$, bude tedy

$$\int_{\circ} \nabla w \,.\, d\mathbf{r} = 0. \tag{117}$$

Naopak platí také věta převrácená: Jestliže lineární integrál skalární vektoru $\mathbf{v}$ podél každé uzavřené křivky se rovná nulle, jest $\mathbf{v}$ gradientem jakési skalární funkce (potenciálu) w.

Abychom tuto větu dokázali, zvolme dva libovolné body M_0 $(\mathbf{r}_0)$ a M' $(\mathbf{r}')$ a veďme mezi nimi dvě jakékoli křivky k a k'. Čára složená z křivek k a $(-k')$ jest uzavřená; pro ni platí dle podmínky

$$\int_{\circ} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = 0,$$

Rozvrhněme tuto integraci opět ve dvé; podél křivky k ve směru od M_0 k M' a podél $(-k')$ ve směru od M' k M_0. Z podmínečné rovnice vychází

$$\int_{k} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} + \int_{(-k')} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = 0.$$

Poněvadž na křivce k' směr od M' k M_0 jest protivný ku směru od M_0 k M', jest

$$\int_{(-k')} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = -\int_{k'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r};$$

tudíž poslední rovnice přejde ve

$$\int_k \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = \int_k \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r},$$

t. j. hodnota lineárního integrálu skalárního jest za uvedenou podmínkou nezávislá na dráze integrační a závislá při témž počátečním bodě M_0 jenom na poloze bodu M'; jest tudíž hodnota ta funkcí průvodiče $\mathbf{r}$ nebo souřadnic bodu M'. Označíme-li ji $w = f(\mathbf{r})$, bude

$$\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = w,$$

z čehož plyne differenciací

$$\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = dw;$$

poněvadž dle (35)

$$\nabla w \,.\, d\mathbf{r} = dw,$$

obdržíme z obou těchto rovnic

$$\mathbf{v} = \nabla w,$$

čímž jest vyslovená věta převrácená dokázána.

V poli gravitačním dána jest síla, kterou přitahuje hmota m jednotku jiné hmoty, výrazem

$$\mathbf{v} = -\frac{\varkappa m}{r^2}\,\mathbf{r}_1,$$

značí-li $\mathbf{r}_1$ vektor jednotkový.

Volme střed přitažlivosti počátkem průvodičů; pošinutí $d\mathbf{r}$ děje se pak působením síly přitažlivé ve směru průvodiče, tudíž $d\mathbf{r} = -\,dr\,\mathbf{r}_1$ a

$$w = \int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \frac{\varkappa m}{r^2}\,\mathbf{r}_1 \,.\, \mathbf{r}_1\, dr$$

aneb, poněvadž $\mathbf{r}_1 \,.\, \mathbf{r}_1 = 1$, též

$$w = \varkappa m \int_{r_0}^{r'} \frac{dr}{r^2} = -\,\varkappa m \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Volíme-li jednotku hmoty tak, aby $\varkappa = 1$, nabudeme pro potenciál výraz

$$w = -\frac{m}{r}.$$

Je-li přitažlivou hmotou útvar, složený z částic m nebo dm, má tento úkon tvar

$$-\Sigma\frac{m}{r} \text{ neb } -\int\frac{dm}{r}.$$

Poznamenali jsme, že v poli irrotationálním hodnota lineárního integrálu skalárního jest funkcí průvodiče $\mathbf{r}$, která jest nezávislá na dráze integrační; jest to tudíž funkce, jejíž tvar jest neproměnný. Jinak jest tomu v případě obecného pole vektorového; tu hodnota lineárního integrálu závisí nejen na mezích integračních, nýbrž i na tom, podél jaké křivky integrujeme. Označíme-li tuto funkci W, píšeme pak

$$W = \varphi(\mathbf{r}),$$

čímž naznačujeme, že nyní tvar funkce jest proměnlivý. W se totiž mění nepřetržitě, buď že se mění nepřetržitě meze při téže dráze integrační, aneb že se mění nepřetržitě dráha integrační při týchž mezích*). První změně (je-li nekonečně malá) přísluší differenciál dW, druhé změně variace δW.

Abychom ustanovili δW, pokračujeme podobným způsobem, jakým jsme v oddíle o poli skalárním vyvodili vzorec (44) pro $\delta \mathbf{J}$. Užijeme totiž vztahů

$$\delta(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{r}) = \delta\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{r} + \mathbf{v}\,.\,\delta d\mathbf{r}$$

a

$$d(\mathbf{v}\,.\,\delta\mathbf{r}) = d\mathbf{v}\,.\,\delta\mathbf{r} + \mathbf{v}\,.\,d\delta\mathbf{r};$$

---

*) Jako odvozujeme z daného pole vektorového irrotationálního integrací obyčejné pole skalární, jež tvoří všechny hodnoty w lineárního integrálu skalárního, tak lze odvoditi podobným způsobem z obecného pole vektorového »*všeobecné pole skalární*«. Ježto hodnota W lineárního integrálu v tomto případu závisí nejen na horní mezi integrační (při téže dolní mezi), ale i na dráze integrační, přísluší ve všeobecném poli skalárním každému bodu M' v prostoru nesčíslné množství hodnot skalárních dle toho, po jaké dráze integrační se k tomuto bodu dospělo. Jdeme-li od bodu M' v určitém směru k neskonale blízkému bodu M'_1, přejde W ve W'; i jest pro tento směr differenciál $dW = W' - W$ určité velikosti. Také differenciální poměr $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}}$ má v každém směru určitou hodnotu; rozvržení těchto hodnot kolem bodu M' jest podobné onomu, jež jsme poznali ve stati o poli skalárním pro $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s}$.

odečtením obou těchto rovnic vychází

$$\delta(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}) - d(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) = \delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} - d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}, \qquad (o)$$

ježto

$$\delta\, d\mathbf{r} = d\,\delta\mathbf{r}.$$

Dle vzorce (58) jest

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\, dz$$

a podobně

$$\delta\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\, \delta z.$$

Násobíce druhou z těchto rovnic skalárně $d\mathbf{r}$ a první $\delta\mathbf{r}$ a odečtouce pak první rovnici ode druhé, nabudeme

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} - d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \,.\, d\mathbf{r}\right)\delta x - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \,.\, \delta\mathbf{r}\right) dx \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \,.\, d\mathbf{r}\right)\delta y - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \,.\, \delta\mathbf{r}\right) dy \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \,.\, d\mathbf{r}\right)\delta z - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \,.\, \delta\mathbf{r}\right) dz,\end{aligned}$$

kde vložíme ještě

$$\begin{aligned} dx &= \mathbf{i} \,.\, d\mathbf{r}, \quad dy = \mathbf{j} \,.\, d\mathbf{r}, \quad dz = \mathbf{k} \,.\, d\mathbf{r}, \\ \delta x &= \mathbf{i} \,.\, \delta\mathbf{r}, \quad \delta y = \mathbf{j} \,.\, \delta\mathbf{r}, \quad \delta z = \mathbf{k} \,.\, \delta\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Tři rozdíly na pravé straně této rovnice přetvoříme pak dle vzorce (17); i píšeme za první rozdíl

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \,.\, d\mathbf{r}\right)(\mathbf{i} \,.\, \delta\mathbf{r}) - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \,.\, \delta\mathbf{r}\right)(\mathbf{i} \,.\, d\mathbf{r}) = \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \mathbf{i}\right] . \,[d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}]$$

a podobně vyjádříme oba ostatní rozdíly. Tím vyjde

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} - d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r} &= \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \mathbf{i}\right] . \,[d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}] + \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \times \mathbf{j}\right] . \,[d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}] \\ &+ \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \times \mathbf{k}\right] . \,[d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}] \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \times \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \times \mathbf{k}\right] . \,[d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}].\end{aligned}$$

Trojčlen na pravé straně této rovnice jest však *curl* $\mathbf{v}$, dále jest $d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}$ plocha prvku plošného mezi neskonale blízkými křivkami k_0 a k_1 (viz obr. 9.), kterou označujeme $d\mathbf{p}$; zavedeme-li tyto veličiny, obdržíme

$$\delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} - d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r} = curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}$$

a tudíž dle (o) též

$$\delta\,(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}) - d\,(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) = curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}.$$

Integrujeme-li člen po členu, nabudeme

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \delta\,(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} d\,(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) = \int curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}\,;$$

první integrál jest

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \delta\,(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}) = \delta \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = \delta W,$$

druhý integrál

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} d\,(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) = \Big/_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r} = 0,$$

poněvadž pro pevné meze $\delta\mathbf{r} = 0$.

Lze tudíž psáti

$$\delta W = \int curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}, \tag{118ª}$$

kde integrace na pravé straně vztahuje se k neskonale úzkému proužku plošnému mezi křivkami k_0 a k_1.

Můžeme však δW ještě jiným způsobem vyjádřiti; jestiť

$$\delta W = \delta \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}$$

rovno rozdílu hodnoty $\left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_1}$ vztahující se ku křivce k_1 a $\left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_0}$ vzhledem ke křivce k_0. Kladouce $-\left[\int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_0}$ místo $\left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_0}$ dostaneme

$$\delta W = \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_1} + \left[\int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_0} = \int_{\mathrm{o}} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}, \tag{118ᵇ}$$

neboť křivky k_0 a k_1 tvoří dohromady uzavřenou čáru a k té vztahuje se integrace poslední.

Z rovnic (118^a) a (118^b) plyne

$$\int_{\circ} \mathbf{v} \; d\mathbf{r} = \int curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}.$$

Vztah tento platí nejen o neskonale úzkém proužku plošném, pro který byl právě dokázán, ale i o konečné ploše jakékoli. Neboť takovou plochu lze křivkami k_m rozvrhnouti v nesčíslné množství velmi malých proužků; při sečítání lineární integrály podél křivek rozdělujících se vzájemně ruší a zbývají jenom integrály podél krajních křivek. I můžeme psáti:

$$\int \delta W = \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_n} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_0} = \int\int curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}. \tag{119^a}$$

Ve zvláštním případě může se křivka k_0 redukovati na jediný bod, v němž se sjednocují body M_0 a M'; pak

$$\left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r}\right]_{k_0} = 0.$$

Z k_n stává se tímto sjednocením mezních bodů M_0 a M' křivka uzavřená, tudíž

$$\int_{\circ} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r} = \int\int curl\, \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}. \tag{119^b}$$

Rovnicí tou vyjádřena jest slavná věta *Stokesova*, která dochází rozmanitého použití ve všech částech mathematické fysiky. Můžeme ji vysloviti: Cirkulace vektoru podél uzavřené křivky rovná se toku curlu tohoto vektoru jakoukoli plochou, kterou daná křivka omezuje.

Větu Stokesovu lze převrátiti; platí totiž: Jestliže tok nějakého vektoru **u** kteroukoli plochou, omezenou danou křivkou uzavřenou, rovná se cirkulaci jiného vektoru **v** podél této křivky, jest vektor **u** curlem vektoru **v**.

Důkaz. Předpokládejme, že

$$\int\int \mathbf{u} \,.\, d\mathbf{p} = \int_{\circ} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{r};$$

odečtouce od této rovnice rovnici (119[b]):

$$\int\int curl\,\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p} = \int_{\circ} \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{r}$$

obdržíme

$$\int\int (\mathbf{u} - curl\,\mathbf{v})\ \ d\mathbf{p} = 0.$$

Differenciací vychází

$$(\mathbf{u} - curl\,\mathbf{v})\,.\,d\mathbf{p} = 0;$$

má-li rovnice ta platiti pro každý prvek plošný $d\mathbf{p}$, musí

$$\mathbf{u} = curl\,\mathbf{v},$$

čímž uvedená věta jest dokázána.

Zakládajíce se na větě Stokesově, můžeme podati definici curlu, která má výhodu, že jest nezávislá na volbě os souřadných.

V libovolné rovině R sestrojme libovolnou křivku uzavřenou k a ustanovme cirkulaci $\int \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{r}$ vektoru $\mathbf{v}$ podél této křivky, majíce náležité zření ke směru, kterým koncový bod průvodiče křivku probíhá. Ustanovme pak poměr hodnoty tohoto integrálu k velikosti plochy $\triangle\mathbf{p}$ omezené křivkou k. Mysleme si nyní, že uzavřená křivka k neustále se zmenšuje, až se plocha $\triangle\mathbf{p}$ stane nekonečně malá; přejdeme li k limitám, stanoví

$$\lim_{\triangle\mathbf{p}=0} \frac{\int \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{r}}{\triangle\mathbf{p}}$$

složku curlu $\mathbf{v}$ ve směru kolmém k rovině R. Ze všech možných poloh roviny R v prostoru vytkněme polohu, pro kterou cirkulace vektoru podél nekonečně malé křivky má hodnotu maximální; na této rovině stojí pak běh vektoru $curl\,\mathbf{v}$ kolmo. Neboť skalární součin $curl\,\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p}$ dosahuje největší hodnoty, sjednocují-li se běhy vektorů $curl\,\mathbf{v}$ a $d\mathbf{p}$.

Druhý lineární integrál v poli vektorovém, zvaný *vektoriálním,* jest

$$\mathbf{W} = \int \mathbf{v} \times d\mathbf{r}. \qquad (120)$$

Hodnotu tohoto integrálu určíme jen pro případ, že křivka podél níž integrujeme, jest uzavřená; užijeme pak obratu, který uvádí A. Föppl ve své „Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität", I. vyd., str. 73.

Násobíme totiž obě strany rovnice (120) skalárně vektorem jednotkovým $\mathbf{c}_1$ běhu libovolného (tvořícího s osami souřadnými úhly α, β, γ), který lze pokládati za stálý; tím obdržíme

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{c}_1 = \int_0 [\mathbf{v} \times d\mathbf{r}] \cdot \mathbf{c}_1.$$

Dle relace

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b},$$

uvedené v oddíle o skalárním součinu tří vektorů, lze psáti

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{c}_1 = \int_0 [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{r}.$$

Integrál na pravé straně této rovnice má tvar lineárného integrálu skalárního $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$; jest jen třeba nahraditi v něm vektor $\mathbf{v}$ vektorem $[\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}]$. Použijeme-li pak věty Stokesovy (119^b), nabudeme

$$\int_0 [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{r} = \int\int curl\,[\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{p}.$$

Ale dle rovnice (103^b)

$$curl\,[\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}] = div\,\mathbf{c}_1\,\mathbf{v} - div\,\mathbf{v}\,\mathbf{c}_1 - (\nabla\,\mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{v} + (\nabla\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c}_1\,;$$

jelikož pomocný vektor $\mathbf{c}_1$ jest stálý, rovná se i $div\,\mathbf{c}_1$ i $\nabla\,\mathbf{c}_1$ nulle, tudíž

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{c}_1 = \int\int (\nabla\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_1) \cdot d\mathbf{p} - \int\int (div\,\mathbf{v}\,\mathbf{c}_1)\quad d\mathbf{p}.$$

První integrál na pravé straně této rovnice lze nahraditi dvěma jinými na základě relace, kterou snadno odvodíme ze vzorce (32). Dle toho jest totiž

$$\mathbf{c}_1 \cdot \nabla\,\mathbf{v} = \cos\alpha\,\frac{\partial v}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial v}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial v}{\partial z}\,;$$

položíme-li v této rovnici za skalární veličinu v součin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, obdržíme

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 \cdot \nabla\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) &= \cos\alpha\,\frac{\partial\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})}{\partial z}\\ &= \left(\cos\alpha\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{u}\\ &\quad + \mathbf{v} \cdot \left(\cos\alpha\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Použijeme-li ještě vzorce (71[b]), můžeme psáti

$$\nabla(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u})\,.\,\mathbf{c}_1=(\nabla\mathbf{v}\,.\,\mathbf{c}_1)\,.\,\mathbf{u}+\mathbf{v}\,.\,(\nabla\mathbf{u}\,.\,\mathbf{c}_1), \qquad (121)$$

ježto na levé straně

$$\mathbf{c}_1\,.\,\nabla(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u})=\nabla(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u})\,.\,\mathbf{c}_1.$$

V tomto vzorci položme za $\mathbf{u}$ vektor $d\mathbf{p}$; i bude

$$\nabla(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p})\,.\,\mathbf{c}_1=(\nabla\mathbf{v}\,.\,\mathbf{c}_1)\,.\,d\mathbf{p}+\mathbf{v}\,.\,(\nabla d\mathbf{p}\,.\,\mathbf{c}_1),$$

z čehož

$$(\nabla\mathbf{v}\,.\,\mathbf{c}_1)\,.\,d\mathbf{p}=\nabla(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p})\,.\,\mathbf{c}_1-\mathbf{v}\,.\,(\nabla d\mathbf{p}\,.\,\mathbf{c}_1).$$

Tím nabývá poslední rovnice pro $\mathbf{W}\,.\,\mathbf{c}_1$ tvaru

$$\mathbf{W}\,.\,\mathbf{c}_1=\int\!\!\int\nabla(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p})\,.\,\mathbf{c}_1-\int\!\!\int(div\,\mathbf{v}\,\mathbf{c}_1)\,.\,d\mathbf{p}$$
$$-\int\!\!\int\mathbf{v}\,.\,(\nabla d\mathbf{p}\,.\,\mathbf{c}_1),$$

čili, poněvadž ve druhém členu na pravé straně

$$(div\,\mathbf{v}\,\mathbf{c}_1)\,.\,d\mathbf{p}=(div\,\mathbf{v}\,d\mathbf{p})\,.\,\mathbf{c}_1,$$

též

$$\mathbf{W}\,.\,\mathbf{c}_1=\left\{\int\!\!\int\nabla(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p})-\int\!\!\int div\,\mathbf{v}\,d\mathbf{p}\right\}.\,\mathbf{c}_1$$
$$-\int\!\!\int\mathbf{v}\,.\,(\nabla d\mathbf{p}\,.\,\mathbf{c}_1). \qquad (122^a)$$

Je-li ve zvláštním případě uzavřená křivka k, podél níž integrujeme, rovinná a plocha jí položená rovinou, jest $d\mathbf{p}$ stálý vektor; tudíž $\nabla d\mathbf{p}=0$. Pročež se předcházející vzorec zjednoduší ve

$$\mathbf{W}\,.\,\mathbf{c}_1=\left\{\int\!\!\int\nabla(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p})-\int\!\!\int div\,\mathbf{v}\,d\mathbf{p}\right\}.\,\mathbf{c}_1.$$

Rovnice ta platí pro každé $\mathbf{c}_1$, což jest jen tenkráte možno, je-li

$$\mathbf{W}=\int\!\!\int\nabla(\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{p})-\int\!\!\int div\,\mathbf{v}\,d\mathbf{p}; \qquad (122^b)$$

tím hodnota lineárního integrálu vektoriálního pro křivky rovinné uzavřené jest určena.

Lze dokázati, že pro pole vektorové, v jehož všech bodech vektor $\mathbf{v}$ jest stálý, všechny lineární integrály vektoriální $\mathbf{W}$, vztahující se k rovinným křivkám uzavřeným, rovnají se nulle *).

---

*) Viz Dr. A. *Föppl*: »Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität«, pag. 74.

Přejděme nyní k integrálům plošným; první z nich jest

$$U = \int_{k_0}^{k_1} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}. \tag{123}$$

Zove se *skalárním integrálem plošným* a stanoví tok vektoru $\mathbf{v}$ plochou p, omezenou danými křivkami k_0 a k_1.

I hodnotu tohoto integrálu můžeme dvojím způsobem měniti: buď měníme na neproměnné ploše p nepřetržitě křivku k_1 tedy horní mez integrálu, anebo měníme plochu integrační p podržujíce tytéž meze k_0 a k_1. Nekonečně malou změnou v prvním případě stanoven jest differenciál dU, ve druhém případě stanovena jest variace δU.

Jde-li nyní o to, vyšetřiti variaci plošného integrálu U, postupujme týmž způsobem, kterým jsme odvodili variaci $\delta \mathbf{P}$ podobného integrálu v poli skalárním.

Předpokládejme nejdříve, že obě plochy p_0 a p_1 jsou neskonale blízko (viz obr. 10.); pak jest $\delta\mathbf{p}$ prvek plošný položený v prstencovitém prostoru mezi oběma těmito plochami.

Z rovnic

$$\delta(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}) = \delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} + \mathbf{v} \,.\, \delta d\mathbf{p},$$
$$d(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}) = d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p} + \mathbf{v} \,.\, d\delta\mathbf{p};$$

vychází odečtením (ježto $\delta d\mathbf{p} = d\delta\mathbf{p}$)

$$\delta(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}) - d(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}) = \delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} - d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p};$$

tudíž

$$\delta U = \delta \int\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} = \int\int \delta(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p})$$
$$= \int\int d(\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}) + \int\int \delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} - \int\int d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}.$$

První integrál na poslední pravé straně rovná se nulle, poněvadž integrujeme v mezích, jimiž jsou pevné křivky k_0 a k_1; jestiť $[\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}]_{k_1} - [\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}]_{k_0} = 0$. Také třetí integrál roven jest nulle; značí totiž $d\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{p}$ změnu toku vektorového plošným prvkem $\delta\mathbf{p}$, který se nalézá jak řečeno uvnitř prostoru, omezeného oběma plochami p_0 a p_1. Avšak uvnitř tohoto tělesa ruší se vzájemně všechny změny toku.

Zbývá tedy z poslední rovnice pouze

$$\delta U = \int\int \delta\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}.$$

Ježto $\quad \delta\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = \left(d\mathbf{v}\,\frac{1}{d\mathbf{r}}\right) \cdot \delta\mathbf{r}$

anebo vzhledem k (20[a])

$$\delta\mathbf{v} = d\mathbf{v}\left(\frac{1}{d\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}\right),$$

jest také

$$\delta\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{v} = (d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{v})\left(\frac{1}{d\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}\right).$$

Užijeme-li nyní vzorce (17), totiž

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}],$$

obdržíme

$$(d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{v})\left(\frac{1}{d\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}\right) - (d\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{r})\left(\frac{1}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{v}\right)$$
$$= \left[d\mathbf{p} \times \frac{1}{d\mathbf{r}}\right] \cdot [d\mathbf{v} \times \delta\mathbf{r}];$$

z toho plyne pro první člen a tudíž i pro $\delta\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$ vzorec

$$\delta\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = (d\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{r})\left(\frac{1}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{v}\right) + \left[d\mathbf{p} \times \frac{1}{d\mathbf{r}}\right] \cdot [d\mathbf{v} \times \delta\mathbf{r}].$$

Na pravé straně jest $d\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{r}$ obsahem prostorového prvku dS; místo $\frac{1}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{v}$ lze psáti $d\mathbf{v} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \frac{d \cdot \mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = div\ \mathbf{v}$, tudíž

$$\int\!\!\int \delta\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \int\!\!\int div\ \mathbf{v}\, dS + \int\!\!\int \left[d\mathbf{p} \times \frac{1}{d\mathbf{r}}\right] \cdot [d\mathbf{v} \times \delta\mathbf{r}].$$

Hodnota posledního integrálu jest nulla; vytkneme-li si totiž jakýkoli prvek prostorový (znázorněný v obr. 10.), jsou v součinech $\left[d\mathbf{p}_0 \times \frac{1}{d\mathbf{r}}\right] \cdot [d\mathbf{v} \times \delta\mathbf{r}]$ a $\left[d\mathbf{p}_1 \times \frac{1}{d\mathbf{r}}\right] \cdot [d\mathbf{v} \times \delta\mathbf{r}]$, z nichž první se vztahuje k neskonale malé ploše $d\mathbf{p}_0$ tohoto prvku, ležící na p_0, a druhý k $d\mathbf{p}_1$ na ploše p_1, všechny činitelé co do absolutní velikosti stejné (nehledě k nekonečně malým veličinám vyšších stupňů) a i stejně označené až na $d\mathbf{p}_0$ a $d\mathbf{p}_1$, jež mají znaménka protivná, poněvadž kladný směr těchto vektorů namířen jest z vnitřku tělesa na venek. Pročež součet těchto dvou součinů rovná se nulle a jelikož to platí pro každý prvek prostorový prstencovitého prostoru mezi p_0 a p_1, jest i

$$\int\!\!\int \left[d\mathbf{p} \times \frac{1}{d\mathbf{r}}\right] \cdot [d\mathbf{v} \times \delta\mathbf{r}] = 0.$$

Obdržíme tedy konečně

$$\delta U = \delta \int\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} = \int\int div\, \mathbf{v}\; dS. \qquad (124^a)$$

Jsou-li meze integrační jakékoli plochy p_0 a p_n, rozdělíme konečný prostor mezi nimi plochami p_1, p_2 . . . v neskonale tenké vrstvy; plošné integrály skalární, vztahující se k těmto plochám rozdělujícím, ruší se vzájemně a zbývá

$$\int \delta U = \left[\int\int_{k_0}^{k_1} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}\right]_{p_n} - \left[\int\int_{k_0}^{k_1} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}\right]_{p_0} = \int\int\int div\, \mathbf{v}\; dS. \qquad (124^b)$$

Jestliže plocha p_0 neustálým zmenšováním se redukuje v jediný bod, čímž plocha p_n se stává uzavřenou, bude

$$\int\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} = \int\int\int div\, \mathbf{v}\; dS, \qquad (124^c)$$

což jest důležitá věta *Gaussova*: Výtok vektorový uzavřenou plochou rovná se algebraickému integrálu divergence vektoru, vztahujícímu se k prostoru danou plochou omezenému.

Na této větě založíme vhodnější definici divergence, nezávislou na volbě os souřadných; vyslovíme ji takto: Sestrojme kolem bodu M vektorového pole malou plochu uzavřenou p zcela libovolného tvaru a ustanovme výtok vektorový $\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}$ toutą plochou; mez, jíž se blíží poměr tohoto výtoku k obsahu $\triangle S$ prostoru omezeného plochou p, jestliže plochu p a tím i prostor $\triangle S$ stále zmenšujeme, jest hodnota divergence v bodě M. Tudíž

$$div\, \mathbf{v} = \lim_{\triangle S = 0} \frac{\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}}{\triangle S}.$$

Budiž ve zvláštním případě pole vektorové polem beze zdrojů; pak

$$div\, \mathbf{v} = 0,$$

tudíž z rovnice (124^a) plyne

$$\delta U = 0$$

a z rovnice (124^b)

$$\left[\int\int_{k_0}^{k_1} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}\right]_{p_n} = \left[\int\int_{k_0}^{k_1} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}\right]_{p_0}.$$

Pročež v poli beze zdrojů tok vektorový U jest týž, děje-li se jakoukoli plochou omezenou týmiž křivkami k_0 a k_1; funkce ta jest nezávislá na tvaru této plochy a závisí jenom na křivkách omezujících.

Z rovnice (124^c) jde dále

$$\int\int \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} = 0,$$

t. j. výtok vektorový jakoukoli plochou uzavřenou jest v poli beze zdrojů roven nulle.

Je-li pole vektorové polem beze vírů, jest $\mathbf{v} = \nabla w$; pak dle (107)

$$div\, \mathbf{v} = div \nabla w = \nabla^2 w$$

a věta Gaussova nabývá tvaru

$$\int\int \nabla w \,.\, d\mathbf{p} = \int\int\int \nabla^2 w \, dS. \qquad (124^d)$$

Z věty Gaussovy vyvoditi lze řadu vět, z nichž některé známy jsou pode zvláštními jmény, jako věta Greenova, Thomsonova atd. Můžeme totiž ve vzorci (124^c) za vektor $\mathbf{v}$ položiti některou vhodnou funkci průvodiče, která jest vektorem, a pomocí známých vzorců pro divergenci těchto funkcí dáti větě Gaussově jiné tvary.

Položme po prvé

$$\mathbf{v} = u \nabla v,$$

pak dle (92^b)

$$div\,(u \nabla v) = \nabla v \,.\, \nabla u + u \, div \nabla v.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (124^c), obdržíme

$$\int\int u \nabla v \,.\, d\mathbf{p} = \int\int\int \nabla v \,.\, \nabla u \, dS + \int\int\int u \, div \nabla v \, dS, \qquad (125^a)$$

kde lze na pravé straně místo $div \nabla v$ dle (107) též psáti $\nabla^2 v$. Rovnice tato vyjadřuje poučku *Greenovu.*

Píšeme-li

$$\mathbf{v} = v \nabla u,$$

dostaneme podobně

$$\int\int v \nabla u \,.\, d\mathbf{p} = \int\int\int \nabla u \,.\, \nabla v \, dS + \int\int\int v \nabla^2 u \, dS. \qquad (125^b)$$

Jiný jednotnější tvar poučky Greenovy vyvodíme, položíme-li po druhé

$$\mathbf{v} = \nabla uv = u \nabla v + v \nabla u;$$

v tom případě

$$div \nabla uv = div\, u \nabla v + div\, v \nabla u$$
$$= \nabla u \,.\, \nabla v + u \nabla^2 v + \nabla v \,.\, \nabla u + v \nabla^2 u$$
$$= u \nabla^2 v + 2 \nabla u \,.\, \nabla v + v \nabla^2 u.$$

Tudíž dle (124^c)

$$\int\int (u \nabla v + v \nabla u) \,.\, d\mathbf{p}$$
$$= \int\int\int (u \nabla^2 v + 2 \nabla u \,.\, \nabla v + v \nabla^2 u) \, dS. \qquad (125^c)$$

Jestliže ve zvláštním případě $u = v$, tedy $\mathbf{v} = \nabla u^2$, obdržíme

$$\int\int u \nabla u \,.\, d\mathbf{p} = \int\int\int (u \nabla^2 u + \nabla u \,.\, \nabla u) dS. \qquad (125^d)$$

Ještě jiný tvar poučky Greenovy vychází, položíme-li po třetí

$$\mathbf{v} = u^2 \nabla \frac{v}{u};$$

pak $\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} = u^2 \dfrac{u \nabla v - v \nabla u}{u^2} \,.\, d\mathbf{p} = (u \nabla v - v \nabla u) \,.\, d\mathbf{p}$

a $$div \left(u^2 \nabla \frac{v}{u} \right) = div\, u \nabla v - div\, v \nabla u$$
$$= \nabla u \,.\, \nabla v + u \nabla^2 v - (\nabla v \,.\, \nabla u + v \nabla^2 u)$$
$$= u \nabla^2 v - v \nabla^2 u.$$

Rovnice (124^c) změní se pak ve

$$\int\int (u \nabla v - v \nabla u) \,.\, d\mathbf{p} = \int\int\int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dS. \qquad (125^e)$$

Tento tvar poučky Greenovy bychom také obdrželi odečtením rovnic (125^a) a (125^b).

(Pokrač.)