Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Bydžovský

Kubická křivka racionálná jakožto souhrn dvojic konjugovaných bodů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 13--24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123009

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1908

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Základní substituce jsou tedy:

$$\begin{aligned}
\Theta_S y_1 &= y_1 \\
\Theta_S y_2 &= (1 - e^{-\pi i \alpha_2})\, y_1 + e^{-\pi i(\alpha_1 + \alpha_2)}\, y_2, \\
\Theta_T y_1 &= e^{\pi i \left(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1\right)}\, y_1 + e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0} (1 - e^{\pi i \alpha_0})\, y_2 \\
\Theta_T y_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0}\, y_2.
\end{aligned}$$

Kontrolu výsledku pomocí inversní substituce $(ST)^{-1}$ zde neuvádím ze zmíněných již důvodů; o logarithmech thetafunkcí při transformaci prvního a druhého argumentu hodlám obšírně pojednati při stanovení všeobecného zákona tvoření číselných koefficientů grupy hypergeometrické.

Kubická křivka racionálná jakožto souhrn dvojic konjugovaných bodů.

Píše dr. **B. Bydžovský.**

Souhrn bodů, z nichž se promítají tři obecně ležící dvojice bodů třemi dvojicemi paprsků v involuci, tvoří obecnou křivku stupně třetího C^3, na níž ony dvojice leží tvoříce dvojice bodů konjugovaných, t. j. takových, jichž tečny se protínají zase na čáře. Souhrn všech bodů konjugovaných promítá se z dvou libovolných konjugovaných bodů čáry involucemi projektivnými v poloze poloperspektivné, takové totiž, že té dvojici involuce v jednom bodu, jejíž jeden paprsek je spojnice obou bodů, odpovídá v druhé involuci dvojice, obsahující týž paprsek. Obě projektivné involuce vytvořují křivku stupně čtvrtého, jež se rozpadá v křivku kubickou C^3 a spojnici obou bodů.*)

Je tedy především patrno, že třemi dvojicemi konjugovaných bodů je C^3 úplně a jednoznačně stanovena; a lze užitím pouhého pravítka sestrojiti libovolné množství bodů této čáry.**) Je však dále patrno, že má-li C^3 takto určená míti dvojný bod, nesmějí ony tři dvojice ležeti zcela libovolně. Tuto věc objasníme v následujících řádcích, kde se vynasnažíme zároveň nalézti,

*) V. Schroeter, »Die Theorie d. eb. Kurven 3. O.« § 2.

**) V. Clebsch, Math. Ann. V., str. 422.

jaké podmínce musí hověti zmíněných šest bodů, aby konstrukce vedla ke křivce racionálné; poznáme zároveň některé nové vlastnosti této křivky.

I. Konstrukce C_4^3 z tří dvojic.

1. *Existuje jediná C_4^3, mající daný bod dvojný a dvě dvojice bodů konjugovaných* (a_1, a_2; b_1, b_2). Jsou totiž oběma těmito dvojicemi jednoznačně určeny tečné v dvojném bodu, jakožto paprsky, jež oddělují harmonicky obě dvojice *). I je známo devět podmínek pro křivku, totiž ony čtyři body a bod dvojný i s tečnami (pět podmínek). Pro určení křivky platí tedy dvojice bodů konjugovaných za tři (bodové, křivku jednoznačně určující) podmínky. Uvažme ostatně, že bod dvojný lze právem pokládati za dvojici konjugovaných bodů, ježto obě tečné v dvojném bodě protínají se na čáře, totiž v témže bodě dvojném. I jest C_4^3 rovněž určena třemi dvojicemi, z nichž jedna ovšem je specialisována.

Plyne odtud: z každého bodu křivky C_4^3 promítají se dvojice konjugovaných bodů paprskovou involucí, jejíž jeden paprsek dvojný prochází dvojným bodem křivky; ježto tento bod je vždy reálný, je každá tato involuce hyperbolická.

Jako v případě obecném, lze i zde *nalézti libovolný počet bodů konstrukcemi lineárnými.* Bod křivky ležící na paprsku X dvojným bodem o vedeném sestrojíme takto: paprsky $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$ protnou X ve dvou bodech, α resp. β. Na $\overline{a_1 a_2}$ a $\overline{b_1 b_2}$ sestrojíme body α', resp. β' tak, aby

$$(a_1 a_2 \alpha\alpha') = -1, \; (b_1 b_2 \beta\beta') = -1.$$

Tam, kde $\overline{\alpha'\beta'}$ protne X, je bod hledaný, neboť z něho promítnou se obě dvojice bodů dvojicemi paprsků, jež harmonicky odděluje X a $\overline{\alpha'\beta'}$.

2. Proč není možno třemi dvojicemi bodů obecně vésti C_4^3, objasníme si takto: Je-li třetí dvojice c_1, c_2, jsou v obou těchto bodech známy involuce, o nichž svrchu byla řeč; zároveň však je známo, jak jsou si projektivně přidruženy. Odpovídají

*) V. tento časopis roč. XXXV., str. 3, věta 2.

si dvojice promítající jednak $a_1 a_2$, jednak $b_1 b_2$; mimo to víme, že dvojici, jejíž jeden paprsek je $\overline{c_1 c_2}$, odpovídá dvojice, jejíž jeden paprsek je $\overline{c_2 c_1}$; tyto tři sdružené dvojice pak úplně určují projektivnost. Má-li vzniklá čára býti racionálná, je nutno, aby jeden dvojný paprsek involuce v c_1 byl touto projektivností přidružen jednomu dvojnému paprsku involuce v c_2, což právě obecně nenastane. V případě však, že to nastane, je průsek obou oněch paprsků dvojný bod.

3. Hledejme podmínku nutnou a dostačující pro to, aby žádaný případ nastal.

Sestrojme obě projektivné involuce v bodech c_1, c_2 tak, že pokládáme

$$\overline{a_1 b_1},\ \overline{a_1 b_2},\ \overline{a_2 b_1},\ \overline{a_2 b_2}$$

za tečné, určující řadu kuželoseček. Tuto řadu budoucně budeme označovati $(a_1 a_2 b_1 b_2)$. Tečné z bodu c_1 vedené k elementům této řady, tvoří involuci, jež obsahuje také dvojice $\overline{c_1 a_1}$, $\overline{c_1 a_2}$; $\overline{c_1 b_1}$, $\overline{c_1 b_2}$ a je tedy totožna s původní. Totéž platí o bodu c_2; když pak kuželosečka probíhá řadu, probíhají dvojice tečen involuce sdružené projektivně způsobem nahoře uvedeným.

Apriori musíme žádati, aby obě involuce (c_1) a (c_2) byly hyperbolické (v. nahoře 1.); procházejí tedy bodem c_1 dvě reálné kuželosečky řady. Jejich tečné v bodu c_1 jsou dvojné paprsky involuce (c_1). Těmto paprskům jsou přidruženy v involuci (c_2) ty dvě dvojice tečen, jež lze položiti k oběma právě zmíněným kuželosečkám; má-li jedna tato dvojice přejíti v jediný paprsek, musí c_2 ležeti na jedné z obou kuželoseček. Dospíváme tedy ku větě: *V obou involucích* (c_1) *a* (c_2) *jsou si přidruženy elementy dvojné* (po jednom) *tehdy a jen tehdy, když* c_2 *leží na jedné z obou kuželoseček řady, které procházejí bodem* c_1.

V tomto případě však je čára oběma involucemi vytvořená skutečně C_4^3, mající dvojný bod v průseku sdružených dvojných paprsků.

Hledaná podmínka je tím nalezena.

4. Předpokládejme tedy, že c_1, c_2 má tuto zvláštní polohu vzhledem k a_1, a_2; b_1, b_2. Pak je ihned patrno, že touž zvláštní polohu musí míti a_1, a_2 k b_1, b_2; c_1, c_2 a b_1, b_2 vzhledem k a_1 a_2; c_1, c_2. Zároveň musí příslušné tečny stále se protínati

v jednom bodě. Z toho plyne že tři dvojice konjugovaných bodů, které na obecné C^3 jsou zcela libovolné, musí na C^3_4 hověti podmínce, která je vyjádřena větou: *Jedna z obou kuželoseček, jdoucích libovolným bodem c_1 na C^3_4 a opírající se o strany úplného čtyřstranu, jehož dvě dvojice protějších rohů jsou dvojice konjugovaných bodů, protíná čáru v bodu, jenž je k c_1 konjugován. Tečny v obou bodech k této kuželosečce vedené protínají se v bodu dvojném.*

5. Z této věty lze učiniti řadu důsledků zajímavějších a důležitějších, než je věta sama.

Všechny C^3_4, mající dvě dvojice bodů konjugovaných a další bod pevný, *tvoří soustavu ∞^1 čar takovou, že všechny body konjugované k pevnému leží na dvou kuželosečkách jdoucích tímto bodem a opírajících se o čtyřstran, jehož jsou konjugované body protějšími rohy; dvojné body těchto čar vyplňují dvě řady přímé na tečnách v pevném bodu k oběma kuželosečkám, a to řady projektivné ke křivým řadám konjugovaných bodů.*

Zvolíme-li totiž libovolný bod jedné z obou kuželoseček za c_2, k c_1 sdružený, protne tečna v c_2 tečnu v c_1 v bodě dvojném; z toho plyne dodatek věty právě vyslovené.

6. Zvolíme-li na tečné C_1 v bodě c_1 k jedné kuželosečce libovolný bod o_1 za dvojný, obdržíme naopak k c_1 konjugovaný jako dotyčný bod tečny z o_1 k téže kuželosečce vedený (c_2); jestliže tato tečna protne $\overline{a_1 a_2}$ v bodě x, C_1 pak touž spojnici v bodě c, určují nám obě dvojice a_1, a_2; c, x involuci, v jejíchž dvojných bodech je $\overline{a_1 a_2}$ protťata tečnami v dvojném bodu o_1 (v. nahoře 1.). Tak máme prostředek, jak sestrojiti ke každému o_1 ihned tečny. Když o_1 probíhá řadu na C_1, zůstávají body a_1, a_2, c pevné, jen poloha bodu x se mění. Lze však snadno dokázati: když x probíhá řadu na $\overline{a_1 a_2}$, dvojné body involuce a_1, a_2; c, x probíhají involuci (d) s řadou bodů x projektivnou. Současně opisuje bod o_1 na C_1 rovněž involuci bodovou (o_1) s řadou bodů x projektivnou, totiž involuci, v níž C_1, tečna ke kuželosečce, je protťata tečnovou involucí indukovanou na kuželosečce paprskem $\overline{a_1 a_2}$. Tečné v dvojných bodech protínají tedy $\overline{a_1 a_2}$ a C_1 ve dvou involucích projektivných; avšak jejich poloha je poloperspektivní; neboť když bod o_1 se octne v c, octne se bod

k němu sdružený v involuci (o_1) v c_1; zároveň x splyne s c a v involuci (d) je s ním sdružen ten bod c', který zároveň s ním harmonicky odděluje a_1, a_2. Bod c je tedy sám sobě přidružen v projektivnosti involucí (o_1) a (d); i vytvoří spojnice sdružených bodů křivku třídy třetí, pro niž C_1 a $\overline{a_1 a_2}$ jsou tečny konjugované. Je zároveň jasno, že c_1 je bod, v němž C_1 se křivky dotýká, c' bod, v němž $\overline{a_1 a_2}$ se křivky dotýká; $\overline{c_1 c'}$ pak ovšem se dotýká křivky rovněž.

Když bod o_1 se octne v průseku $(C_1, \overline{a_2 b_1})$, octne se s ním sdružený v průseku $(C_1, \overline{a_2 b_2})$; v (d) pak této dvojici involuce odpovídá bod a_2 co dvojný; $\overline{a_2 b_1}$ a $\overline{a_2 b_2}$ jsou tedy rovněž tečny naší křivky a sice konjugované a mimo to jich průseky s C_1 body dotyčné. Podobně bychom shledali, že také $\overline{a_1 b_2}$, $\overline{a_1 b_1}$ jsou tečny konjugované a jich průseky s C_1 body dotyčné. I s bodem c_1 jako dotyčným nalézáme na C_1 šest bodů, v nichž protíná křivku; je patrno, že je křivka stupné šestého a tedy obecná křivka třídy třetí.

Mohli jsme ostatně vzíti v úvahu řadu na $\overline{b_1 b_2}$ a shledali bychom, že také C_1 a $\overline{b_1 b_2}$ jsou tečny konjugované, $\overline{a_1 b_1}$ a $\overline{b_1 a_2}$, $\overline{a_1 b_2}$ a $\overline{b_2 a_2}$ rovněž.

Podobná úvaha by se připínala také ke druhé tečné bodem C_1 jdoucí. Lze tedy vysloviti větu: *Dvojné tečny všech křivek C_4^3 nahoře definovaných obaluje dvě křivky třídy třetí.*

7. Systém křivek C_4^3, určených dvojicemi a_1, a_2; b_1, b_2 a bodem c_1 ještě lépe pronikneme, zodpovíme-li otázku, *kolik křivek systému probíhá libovolně daným bodem y.* Vedeme-li bodem y obě kuželosečky opírající se o čtyrstran $a_1 b_1 a_2 b_2$, jsou tečné v bodu y k těmto kuželosečkám geometrické místo pro dvojné body všech křivek určených dvojicemi a_1, a_2; b_1, b_2 a bodem y; tyto tečny pak protnou tečny v bodu c_1 k oběma kuželosečkám tímto bodem vedeným ve čtyřech bodech. Tyto čtyři body jsou pak dvojnými pro čtyři křivky systému jdoucí bodem y.

Dvěma dvojicemi bodů konjugovaných a dalšími dvěma body (celkem osm podmínek) *jsou tedy určeny čtyři kubické čáry C_4^3.*

Dvěma dvojicemi bodů konjugovaných a_1, a_2; b_1, b_2 je určena vždy třetí dvojice co dva diagonálné rohy čtyrrohu jimi vytvořeného; totiž dvojice bodů

$$x_1 \equiv (\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2}); \ x_2 \equiv (\overline{a_1 b_2}, \overline{a_2 b_1}).$$

Všechny kubické křivky mající společné body a_1, a_2, b_1, b_2 a další dva body c_1, y, mají tedy společných celkem osm bodů a tvoří svazek; i mají všechny společný ještě devátý bod z. Tímto bodem procházejí také ty čtyři křivky, jež mají bod dvojný.

Do svazku náleží jako zvrhlý element čára, skládající se na př. z přímky $\overline{a_1 b_1}$ (na níž leží také x_1) a z kuželosečky $(a_2 b_2 x_2 c_1 y)$. Tato kuželosečka musí obsahovati také bod z, t. j. ona protíná libovolnou nezvrhlou čáru svazku jednak v bodech a_2, b_2, x_2, jednak v bodech c_1, y, z. Avšak a_2, b_2, x_2 tvoří na všech čarách svazku t. zv. trojici bodů*), t. j. bodů, jichž konjugované leží na přímce $(\overline{a_1 b_1})$. O kuželosečce, protínající C^3 v bodech trojice platí věta, že ji protíná také v bodech druhé trojice; konjugované body ku c_1, y, z leží tedy na přímce.

Tím nabýváme jasnějšího názoru o vzájemnosti čtyř kubických křivek nahoře nalezených a zároveň prostředku, jak jednoduše sestrojiti bod z, v němž všechny čáry se protínají, a jeho konjugovaný. Body konjugované k bodům trojice jsou třetí průseky s čarou stran trojúhelníka, jehož vrcholy tvoří právě body trojice.

Tečné v bodech c_1 a y, o nichž byla svrchu řeč, protínají se ve čtyřech bodech; z každého z nich lze vésti k oběma kuželosečkám, na jichž tečnách leží, dvě další tečny; dotyčné jich body c'_1, y' jsou konjugované pro příslušnou čáru k bodům c_1, y. Spojnice $(c_1 y')$, $(c'_1 y)$ protínají se pak v bodě z, spojnice $(c_1 y)$, $(c'_1 y')$ v bode z'.

Tentýž bod z obdržíme stejným způsobem pro všechny čtyři čáry.

8. Libovolný paprsek dvojným bodem o_1 procházející protne křivku C_4^3 v jediném bodu vždy reálném. Nazveme tento bod x; pak je $\overline{o_1 x}$ tečnou v bodě x k jedné kuželosečce řady

$$(a_1 a_2 b_1 b_2).$$

Jestliže naopak zvolíme libovolnou kuželosečku této řady a vedeme k ní tečné z bodu o_1, buďtež body dotyčné x, x'.

*) Punkttripel v. Schroeter l. c. § 8.

$\overline{o_1 x}$ protne C_4^3 v jediném bodu, na př. y; $\overline{o_1 y}$ je pak tečná v bodě y k jedné kuželosečce řady. Avšak paprskem je určena jediná kuželosečka řady: ježto pak $\overline{o_1 x} \equiv \overline{o_1 y}$, musí také $x \equiv y$. Z této úvahy vychází na jevo platnost věty:

Geometrické místo dotyčných bodů tečen z pevného bodu vedených ke kuželosečkám řady je racionálná křivka kubická, mající v pevném bodu bod dvojný a v protějších rozích úplného čtyrstranu, jenž tvoří basi řady, body konjugované. Rovněž dvojice dotyčných bodů k jednotlivým kuželosečkám jsou body konjugované. Touž čáru obdržíme, položíme-li za základ řadu kuželoseček, jež se opírají o kterýkoliv čtyrstran, jehož protější rohy jsou dvojice bodů konjugovaných. Tečny v bodu dvojném jsou tečny obou kuželoseček řady, jež dvojným bodem procházejí.

Je jasno, že polára bodu dvojného vzhledem ku každé jednotlivé kuželosečce řady je spojnice příslušné dvojice konjugovaných bodů; ježto poláry příslušné pevnému bodu vzhledem ke kuželosečkám řady obalují kuželosečku, je tím velmi jednoduše dokázána známá věta, že spojnice bodů konjugovaných obaluje kuželosečku.

II. Křivka zvrhlá.

1. Vedeme-li obě kuželosečky řady (a_1, a_2, b_1, b_2), jež procházejí daným bodem c_1, jsou tyto křivky geometrickým místem bodů c_2, konjugovaných na kubické křivce racionálné k bodu c_1. Zvolme za bod c_2 druhý (nutný) průsek obou kuželoseček; pak obě involuce v bodech c_1, c_2 jsou si přidruženy projektivně tak, že si odpovídají obě dvojice dvojných paprsků; to však by znamenalo, že příslušná C_4^3 má dva body dvojné. *Je tedy tato křivka nutně zvrhlá.* To lze nahlédnouti takto: obě dvojice sdružených dvojných paprsků nechť se protnou v bodech m_1, m_2. Spojnice $\overline{m_1 m_2}$ je protata oběma projektivnými involucemi (c_1) a (c_2) ve dvou projektivných involucích bodových, jež mají společné dvojné body m_1, m_2. Spojnice $\overline{c_1 c_2}$ protne $\overline{m_1 m_2}$ v bodě p; bodem p' harmonicky s ním sdruženým vzhledem k m_1, m_2 procházejí druhé paprsky sdružených dvojic involucí (c_1), (c_2), jichž jeden paprsek je $\overline{c_1 c_2}$ $(\overline{c_2 c_1})$. Mají tedy obě soumístné involuce na $\overline{m_1 m_2}$ společné tři dvojice sdružené

$$m_1, \; m_2, \; pp'$$

a tedy všechny. I jest $\overline{m_1 m_2}$ část křivky vytvořené projektivnými involucemi (c_1), (c_2). Druhá část je kuželosečka jdoucí body c_1, c_2 a vytvořená projektivnými svazky se středy v těchto bodech. Když totiž paprsek probíhá svazek (c_1), probíhá s ním v involuci sdružený svazek soumístný projektivný, k němuž vznikne v (c_2) svazek perspektivný dle osy $\overline{m_1 m_2}$; tento vytvořuje s prvým svazkem v (c_1) kuželosečku. Plyne z toho, že oba body c_1, c_2 leží na této kuželosečce; každé dvě sdružené dvojice involucí protnou se ve čtyřech bodech, z nichž dva leží na přímce $\overline{m_1 m_2}$, druhé dva na kuželosečce. Tyto body na kuželosečce jsou tedy z bodu c_1 i c_2 promítány paprskovými involucemi i tvoří samy na kuželosečce bodovou involuci, jejíž dvojné body jsou, jak se snadno nahlédne, m_1 a m_2. Tečny v každé dvojici této involuce vedené se tedy protínají na $\overline{m_1 m_2}$, t. j. tyto dvojice si podržely vlastnost konjugovaných bodů.

Obě dvojice a_1, a_2; b_1, b_2 tvoří zvrhlé elementy řady a $\overline{c_1 a_1}$, $\overline{c_1 a_2}$; $\overline{c_2 a_1}$, $\overline{c_2 a_2}$ jsou dvojice sdružené v involucích (c_1) a (c_2); i prochází křivka zvrhlá také body a_1, a_2, z téhož důvodu body b_1, b_2.

2. Porozumění tohoto případu nám usnadní některé *pomocné věty z theorie kuželoseček.*

Dvě kuželosečky, protínající se v bodech

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$$

mějtež čtyři společné tečny; čtyrstran jimi vytvořený má protější rohy

$$a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ d_1, d_2.$$

Diagonálný trojstran tohoto čtyrstranu je polárný trojúhelník společný oběma kuželosečkám; avšak diagonálný tříroh čtyrrohu společných bodů je rovněž polárný trojúhelník oběma kuželosečkám společný. Ježto dvě kuželosečky mají jediný polárný trojúhelník společný (utvořený třemi dvojnými body kollineace, jež vznikne z obou polárných polí příslušných kuželosečkám), plyne odtud, že čtyrroh společných bodů a čtyrstran společných tečen dvou kuželoseček mají společný trojúhelník diagonálný.

Čtyrstran utvořený z tečen jedné z obou kuželoseček v bodech c_1, c_2, c_3, c_4 má však, jak známo, diagonálný třiroh společný se čtyrrohem těchto bodů. To však znamená, že tyto tečny protínají se vždy dvakráte po dvou na $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{d_1 d_2}$. Nazveme-li tečny ty C_1, C_2, C_3, C_4, pak

$(C_1 C_2)$, $(C_3 C_4)$ leží na př. na $\overline{a_1 a_2}$,
$(C_1 C_3)$, $(C_2 C_4)$ „ „ „ „ $\overline{b_1 b_2}$,
$(C_1 C_4)$, $(C_2 C_3)$ „ „ „ „ $\overline{d_1 d_2}$.

Totéž platí pro C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, tečny druhé kuželosečky ve společných bodech.

3. Vrátíme-li se k původní úloze, vidíme tedy, že přímka $m_1 m_2$, spojující oba dvojné body zvrhlé čáry, obsahuje jednu dvojici z těchto tří: a_1, a_2; b_1, b_2; d_1, d_2.

Tato dvojice tedy neleží na kuželosečce tvořící část křivky zvrhlé (ježto by musila býti totožná s m_1, m_2). Mimo to je jasno, že, jsou-li a_1, a_2; b_1, b_2 dvojice bodů konjugovaných na kubické křivce, i d_1, d_2 jsou jimi; je to třetí dvojice určená dvěma danými.

I lze nyní vysloviti úplnou větu:

Jestliže jedna daná dvojice konjugovaných bodů má takovou polohu vzhledem k druhým dvěma daným a_1, a_2; b_1, b_2 (s nimiž právě jednoznačně určuje kubickou křivku), *že obě kuželosečky řady, k níž tyto dvě dvojice náleží co zvrhlé elementy, jdoucí bodem* c_1, *procházejí také bodem* c_2, *je kubická křivka těmito dvojicemi určená zvrhlá*, skládajíc se z jedné diagonálné strany čtyrstranu společných tečen řady a z kuželosečky jdoucí body c_1, c_2 a těmi dvěma dvojicemi protějších rohů zmíněného čtyrstranu, jež neleží na diagonálné straně tvořící součást kubické křivky.

4. Větu v předchozím odvozenou lze vysloviti také takto:

Vedeme-li dvěma dvojicemi protějších vrcholů úplného čtyrstranu, utvořeného společnými tečnami dvou kuželoseček, a jedním průsekem obou kuželoseček kuželosečku, prochází tato nutně ještě jedním průsekem obou kuželoseček; tečné v obou těchto průsecích ke každé z obou kuželoseček protínají se na spojnici třetí dvojice protějších vrcholů.

Ježto dvojice protějších vrcholů jsou tři, lze je sestaviti ve tři skupiny po dvou dvojicích; každým průsekem obou kuželoseček procházejí tedy tři kuželosečky navzájem různé. Každá z nich prochází dalším společným bodem obou kuželoseček, a sice každá jiným. Plyne z toho, že mají obě kuželosečky nutně další tři body společné. Odtud věta:

Mají-li dvě kuželosečky o společných čtyřech reálných tečnách společný jediný bod reálný, jsou všechny jejich průseky reálné.

5. V dalším užívejme označení poněkud odchylného od dosavadního. Nazveme

$$a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2$$

dvojice protějších rohů čtyrstranu společných tečen. Obě kuželosečky řady K_1, K_2, tímto čtyrstranem určené, jež procházejí bodem x_1, nechť se protínají v dalších bodech x_2, x_3, x_4. Kuželosečka K body a_1, a_2, b_1, b_2, x_1 vedená, prochází ještě jedním průsekem obou kuželoseček, na př. bodem x_2. K protíná K_1 obecně ještě ve dvou bodech, z_1, z_2. Předpokládejme nejprve, že tyto body jsou reálné. Bodem z_1 prochází vedle K_1 ještě další kuželosečka K_3 řady. K_1, K_3, protínajíce se v jednom bodu reálném, protínají se ve čtyřech bodech reálných z_1, z'_2 z_3, z_4. K musí procházeti ještě dalším průsekem těchto obou kuželoseček, je tedy

$$z'_2 \equiv z_2.$$

(Je ostatně zřejmo, že body z_1, z_2 nejsou obecně totožny s x_3, x_4).

Tečné v bodech x_1, x_2 protínají se na $\overline{c_1c_2}$; podobně tečné v bodech z_1, z_2, protínají se na $\overline{c_1c_2}$, ježto kuželosečka procházející body a_1, a_2, b_1, b_2 a bodem z_1 protne K_1 v bodě dalším, jehož tečna protíná se s tečnou v z_1 na $\overline{c_1c_2}$. Tvoří tedy x_1, x_2; z_1, z_2 dvě dvojice involuce indukované na K_1 paprskem $\overline{c_1c_2}$. Ježto bod x_1 na K_1 je zcela libovolný, plyne odtud, že *každá kuželosečka procházející body a_1, a_2, b_1, b_2 a protínající K_1 v bodech vesměs reálných, protíná ji ve dvou dvojicích involuce indukované na K_1 paprskem $\overline{c_1c_2}$; spojnice obou dvojic procházejí tedy bodem $(a_1a_2, b_1b_2) \equiv c$, jenž je pólem paprsku $\overline{c_1c_2}$ pro všechny kuželosečky řady.*

6. Naskýtá se přirozeně otázka, *zdali tato věta platí obecně, totiž i pro průseky imaginárné.* Zkoumejme tedy, zdali libovolná kuželosečka řady K_1 je libovolnou kuželosečkou

K svazku $(a_1 a_2 b_1 b_2)$ proťata v dvojicích (reálných nebo imaginárných) involuce indukované na K_1 bodem c.

Paprsek P bodem c vedený obsahuje vždy dvojici bodů konjugovaných současně vzhledem ku K i K_1. Je-li c' průsek P s $\overline{c_1 c_2}$, tvoří body c, c' tuto dvojici, ježto c je polárou paprsku $\overline{c_1 c_2}$ pro každou kuželosečku i svazku i řady. Kdyby paprsek P obsahoval ještě jednu dvojici bodů konjugovaných současně k oběma kuželosečkám, znamenalo by to, že obě kuželosečky indukují na P touž involuci a že se tudíž protínají na P (v dvojici bodů reálné nebo imaginárné). Lze však najíti dvě polohy paprsku P, pro které tento případ skutečně nastane. Hledejme na každém paprsku P bodem c procházejícím oba body y, y_1, které jsou konjugovány vzhledem ku K, K_1 k bodu x, v němž P protne $\overline{a_2 b_2}$. Najdeme k tomu cíli poláry bodu x vzhledem k oběma kuželosečkám; jejich průseky s P jsou body hledané. Když P probíhá svazek a bod x přímou řadu na $\overline{a_2 b_2}$, probíhají obě poláry svazky s touto řadou projektivné — i vytvoří paprsek P s každým z těchto svazků kuželosečku; obě kuželosečky S, S_1 procházejí bodem C a jejich body jsou projektivně sdruženy tvoříce dvě křivé řady současně perspektivné k svazku paprsků P. Mimo to však mají v bodu c společnou tečnu $\overline{cc_1}$, jestliže $c_1 \equiv (\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2})$. Když totiž polára vzhledem ku K nebo K_1 prochází bodem c, protíná příslušný paprsek P přímku $\overline{a_2 b_2}$ v tom bodu x, jenž je sdružen s c. Ale je známo, že všechny body sdružené s c leží na $\overline{c_1 c_2}$ — i musí tento bod x býti současně na $\overline{c_1 c_2}$, t. j. je to bod c_1 a tedy $P \equiv \overline{cc_1}$ pro obě kuželosečky S, S_1 tečna v bodě c. Obě kuželosečky mají mimo bod c, platící za dva průseky, společny ještě dva body; to jsou body současně sdružené s příslušnými body na $\overline{a_2 b_2}$. Paprsky P, které tyto body s c spojují, obsahují pak dvě dvojice bodů současně konjugovaných vzhledem ke K_1, K_2. I lze vysloviti větu:

Každá kuželosečka řady je proťata každou kuželosečkou svazku, jehož basi tvoří dvě dvojice protějších vrcholů úplného čtyrstranu tečen řady, ve dvou dvojicích involuce indukované na každé z těchto kuželoseček polem paprsku, jenž spojuje třetí dvojici protějších vrcholů.

7. Zvolíme-li pevnou K_1, necháme však K probíhati celý svazek $(a_1 a_2 b_1 b_2)$, je S_1 také pevna a S probíhá svazek. Každá S prochází totiž bodem c majíc v něm pevnou tečnu $\overline{cc_1}$; mimo to prochází body a_2, b_2, v němž je každá kuželosečka svazku protata paprskem $\overline{a_2 b_2}$. Svazek kuželoseček S, maje s S_1 společný pevný bod c a v něm tečnu, protíná S_1 v involuci. Tato involuce bodová je promítána z bodu c involucí paprskovou; i doplníme hořejší větu v ten smysl, že *spojnice obou dvojic průseků tvoří zase dvojici involuce paprskové.*

Dvojné paprsky této involuce snadno nalezneme. K svazku kuželoseček K náleží také oba zvrhlé elementy $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$; $\overline{a_1 b_2}$, $\overline{a_2 b_1}$. Každý z nich má s K_1 společné dvě dvojice bodů splývajících; paprsky, které je spojují s bodem c, jsou tedy dvojné paprsky zmíněné involuce.

Je ostatně patrno, že tato involuce je projektivná se svazkem kuželoseček K; z toho plyne, že lze najíti průseky K_1 a K konstrukcemi kvadratickými. Při dané K_1 jsou dvojné elementy ihned známy; zároveň víme, které dvojice involuce jsou přidruženy zvrhlým elementům svazku kuželoseček K. Pro určitou K lze tedy nalézti dvojici involuce jí příslušnou a tím její průseky s K_1 dvěma kvadratickými konstrukcemi.

O užití nauky o funkcích elliptických na odvození Dirichletových výsledků pro počet tříd forem kvadratických záporného diskriminantu.

Napsal **K. Petr.**

V následujícím hodlám ukázati, jak z rozvojů pro funkce elliptické lze získati způsobem velice jednoduchým výsledky Dirichletovy týkající se počtu forem kvadratických záporného diskriminantu. Pokud mi známo, jest tato cesta v tomto problému téměř nepoužitá, ačkoliv jednotliví badatelé a to zvláště již Di-