

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Matyáš Lerch

Stanovení jistého mnohonásobného integrálu

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 37 (1908), No. 3, 225–230

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122973>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1908

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## Stanovení jistého mnohonásobného integrálu.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

V uplynulém právě ročníku časopisu l'Intermédiaire des Mathématiciens (otázka 3225) předkládá p. H. Laurent k vyšetření integrál

$$H = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n$$

vzatý nad oborem integračním, jenž definován podmínkami

$$-\frac{1}{2} \leq x_\nu \leq \frac{1}{2}, \quad -\alpha \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \alpha, \\ (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

při čemž  $\alpha$  je daná kladná konstanta.

Abychom provedli integraci, zavedme isolační faktor Dirichletův

$$O(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

jenž jest roven 1 pro  $|\sum x_\nu| < \alpha$ , a roven 0 pro  $|\sum x_\nu| > \alpha$ .

Pak bude lze předložený integrál psáti

$$H = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_{n-1} \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 O(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Jak sám Dirichlet několikráte poznamenal, máme při kladném  $a$  a libovolném  $b$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin at \cos bt}{t} dt = \frac{\operatorname{sgn}(a+b) + \operatorname{sgn}(a-b)}{2} \quad (1)$$

(kde  $\operatorname{sgn} . z$  značí znamení veličiny  $z$ ), vzorec plynoucí bezprostředně ze známé rovnice

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} . m.$$

Pravá strana rovnice (1) je rovna 1 pro  $|b| < a$ , a rovna 0 pro  $|b| > a$ , a proto bude lze vzítí náš isolační faktor ve tvaru

$$O(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} \cos(t \sum_1^n x_n) \cdot dt. \quad (2)$$

Tím způsobem se objeví rovnice

$$\frac{\pi}{2} H = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t \sum x_n dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3)$$

Poněvadž

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t(u + x_n) dx_n &= \frac{\sin(tu + \frac{t}{2}) - \sin(tu - \frac{t}{2})}{t} \\ &= \cos tu \cdot \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

vyjde postupným užíváním tohoto vzorce

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \left(\frac{2}{t} \sin \frac{t}{2}\right)^n,$$

a rovnice (3) obdrží tento jednoduchý tvar

$$\frac{\pi}{2} H = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} \left(\frac{2}{t} \sin \frac{t}{2}\right)^n dt,$$

který přeměníme vložení  $2t$  za  $t$  na

$$\frac{\pi}{2} H = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\alpha t \cdot \sin^n t}{t^{n+1}} dt. \quad (4)$$

Integrál tento lze považovati za zvláštní hodnotu analytické funkce proměnné  $s$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sin 2\alpha t \cdot \sin^n t \cdot t^{s-1} dt, \quad (5)$$

a sice pro  $s = -n$ ; tato funkce jest analyticky pravidelna, pokud reálná část proměnné  $s$  převyšuje hodnotu  $-n - 1$ , zůstávajíc menší jednotky. Pouze případ  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $n$  liché, by mohl činiti výjimku, ana by tu existence integrálu vyžadovala reálnou část  $s$  zápornou; můžeme však případ  $\alpha = \frac{1}{2}$  vyloučiti a předpokládati  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ .

Hodnotu funkce  $F(s)$  stačí určit za předpokladu, že reálná část veličiny  $s$  náleží intervallu  $(0 \dots 1)$ , neboť jakožto funkce analytická bude tím již dána v celém oboru existenčním vůči proměnné  $s$ . Za řečeného předpokladu budou pak existovati integrály, v něž se integrál (5) rozloží, užijeme-li identity

$$(2i \sin t)^n = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} e^{(n-2\nu)it},$$

vyjde pak

$$(2i)^n F(s) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \int_0^\infty \sin 2\alpha t e^{(n-2\nu)it} t^{s-1} dt.$$

Zde ještě užijeme rozkladu

$$2i \sin 2\alpha t = \sum_{\varepsilon} \varepsilon e^{2\varepsilon\alpha it}, \quad (\varepsilon = 1, -1)$$

načež bude

$$(2i)^{n+1} F(s) = \sum_{\nu, \varepsilon} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon \int_0^\infty e^{(n-2\nu+2\varepsilon\alpha)it} t^{s-1} dt.$$

Dle známého vzorce Eulerova platného pro reálná  $a$

$$\int_0^\infty e^{ait} t^{s-1} dt = \frac{\Gamma(s)}{|a|^s} e^{\frac{s\pi i}{2} \operatorname{sgn} a}$$

vyčíslí se jednotlivé integrály našeho součtu, i objeví se tak výsledek

$$(2i)^{n+1} F(s) = \Gamma(s) \Phi(s), \quad (6)$$

kde užito označení

$$\Phi(s) = \sum_{\nu, \varepsilon} (-1)^\nu \varepsilon \binom{n}{\nu} e^{\frac{s\pi i}{2} \operatorname{sgn} \cdot (n-2\nu+2\varepsilon\alpha)} \frac{1}{|n-2\nu+2\varepsilon\alpha|^s}. \quad (6^a)$$

Nyní bude nám vyšetřiti hodnotu funkce  $\Gamma(s) \Phi(s)$  pro  $s = -n$ , neboť rovnicemi (6) a (6<sup>a</sup>) jest analytická funkce  $F(s)$  definována jako velmi jednoduchý analytický útvar existující v celé rovině komplexní proměnné  $s$ .

Aby součin  $\Gamma(s) \Phi(s)$  byl pro  $s = -n$  konečný, je nutno i stačí, aby celistvá funkce  $\Phi(s)$  zmizela pro  $s = -n$ . Poněvadž dále, jak známo,

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!(s+n)} + \mathfrak{P}(s+n),$$

kde  $\mathfrak{P}(s+n)$  je řada Taylorovská konvergentní pro  $|s+n| < 1$ , bude

$$\lim_{s \rightarrow -n} \left\{ \Gamma(s) \Phi(s) \right\} = \lim_{s \rightarrow -n} \frac{(-1)^n \Phi(s)}{n!(s+n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \Phi'(-n),$$

a tedy dle (6)

$$(2i)^{n+1} F(-n) = \frac{(-1)^n}{n!} \Phi'(-n). \quad (7)$$

Avšak přímým derivováním výrazu (6<sup>a</sup>) plyne pro  $s = -n$

$$\begin{aligned} \Phi'(-n) &= \frac{\pi i}{2} \sum_{\nu, \varepsilon} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon \operatorname{sgn}(n-2\nu) \\ &+ 2\varepsilon\alpha e^{-\frac{n\pi i}{2} \operatorname{sgn} \cdot (n-2\nu+2\varepsilon\alpha)} |n-2\nu+2\varepsilon\alpha|^n \\ &- \sum_{\nu, \varepsilon} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon e^{-\frac{n\pi i}{2} \operatorname{sgn} \cdot (n-2\nu+2\varepsilon\alpha)} |n-2\nu+2\varepsilon\alpha|^n \\ &\cdot \log |n-2\nu+2\varepsilon\alpha|. \end{aligned} \quad (8)$$

V druhé části (logarithmické) zruší se členy  $\nu = \mu$ ,  $\varepsilon = 1$  a  $\nu = n - \mu$ ,  $\varepsilon = -1$  navzájem, kdežto v první části členy ty se sobě rovnají, tak že v ní obdržíme všechny členy, klademe-li  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , násobíme výsledek dvěma; při tom jest si vzpomenouti samozřejmé identity

$$\operatorname{sgn} \cdot u \cdot e^{-\frac{n\pi i}{2} \operatorname{sgn} \cdot u} = i^{-n},$$

pro  $n$  liché.

V případě lichého  $n$  podá nám tedy vzorec

$$H = \frac{2}{\pi} F(-n) = \frac{(-1)^n}{n!(2i)^{n+1}} \Phi'(-n) \cdot \frac{2}{\pi}$$

výsledek

$$H = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} |n - 2\mu + 2\alpha|^n.$$

Je-li však  $n$  sudé, bude pro všechna  $\nu$

$$e^{-\frac{n\pi i}{2} \operatorname{sgn} \cdot (n - 2\nu + 2\alpha)} = i^{-n}$$

a objeví se výsledek

$$H = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n \operatorname{sgn}(n - 2\mu + 2\alpha).$$

Oba případy jsou zahrnuty vzorcem

$$H = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n \operatorname{sgn} \cdot (n - 2\mu + 2\alpha), \quad (9)$$

jenž řeší *Laurentův* problém s veškerou obecností. Vyloučený případ  $\alpha = \frac{1}{2}$  nečiní tu žádné věcné výjimky, jak přechod mezný bezprostředně ukáže.

Integrál  $H$  lze interpretovati jako  $n$ -dimensionální obsah útvaru krychlového o  $n$  rozměrech, jehož vrcholy mají souřadnice  $\pm \frac{1}{2}$ , a který jest rozdělen lineárními útvary

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \pm \alpha$$

ve tři části, z nichž prostřední jest právě obsahu  $H$ .

Pro  $\alpha \geq \frac{n}{2}$  probíhají oba lineární útvary mimo  $n$ -dimensionální krychli a  $H$  musí býti rovno 1. Skutečně jest pak  $n - 2\mu + 2\alpha \geq 2(n - \mu) > 0$ , tedy

$$H = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n$$

součet na pravé straně lze dle známé identity

$$\Delta^n u_0 = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} u_{n-\nu}$$

považovati za první člen  $n$ -té řady rozdílové příslušné k řadě základní

$$u_\mu = (2\mu - n + 2\alpha)^n, \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots);$$

avšak zde

$$\Delta^n u_0 = 2^n n!,$$

tedy skutečně  $H = 1$ .

Funkce  $\operatorname{sgn}(n - 2\mu + 2\alpha)$  má vůči proměnné  $\alpha$  přetržku  $\alpha = \mu - \frac{n}{2}$ , tedy výraz (9) mění svůj analytický zákon na bodech

$$\alpha_0 = \frac{n}{2}, \alpha_1 = \frac{n}{2} - 1, \alpha_2 = \frac{n}{2} - 2, \dots;$$

mezi po sobě jdoucími  $\alpha$  jest pak  $H$  táž celistvá racionální funkce parametru  $\alpha$ .

Poznamenejme ještě, že pro  $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$  vyjde

$$H = 1 - \frac{2}{n!} \left( \frac{n}{2} - \alpha \right)^n.$$

## O jisté ploše bikvadratické, jež souvisí s teorií komplexu os rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body.

Napsal **Lad. Seifert**, prof. v Plzni.

O komplexu, jež tvoří osy rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body, pojednává obšrně J. B. Eck ve své dissertaci: „Über die Verteilung der Axen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen“<sup>1)</sup>. V první části své práce rozbírá komplex rotačních os ploch druhého st. jdoucích čtyřmi body danými opíraje se o jistou větu Laguerrem dokázanou<sup>2)</sup>, k tomu připojuje dále pojednání o komplexu os rotačních ploch válcových jdoucích dvěma a rotačních ploch kuželových jdoucích třemi body vedle řešení ještě jiných s tím souvisejících otázek. Vyšetření posledního komplexu působí z důvodů na snadě ležících nejvíce obtíží, ale dá se provésti snadno užitím zajímavé plochy, jejíž vytvoření v následujícím podávám. Odvození vlastností řečeného komplexu z nejdůležitějších vlastností této plochy jest ryze synthetické a podává přehledný obraz o jakosti zde se vyskytujících geometrických míst i jejich

<sup>1)</sup> Inaugural-Dissertation, Bonn. 1890.

<sup>2)</sup> „Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés et sur les axes de révolution du second ordre etc“, *Nouvelles Annales de Math.*, 2. Serie, Bd. 18.