Karel Zahradník

Některé vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 519--523

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122936

V tomto případě jest úhel ω čar souřadných dán výrazem

$$cos\ \omega = \frac{F - \sigma^2}{F + \sigma^2} = \frac{c^2 + k}{k},$$

jest tudíž konstantním.

Případ

$$\varrho_u = c,\ \varrho_v = -c$$

projedná se způsobem stejným a vede k týmž výsledkům.

Některé vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce.

Napsal Dr. **K. Zahradník.**

J. Steiner[1]) dokázal, že každým bodem t kuželosečky proložiti můžeme tři kruhy křivosti, jichž body oskulační u_1, u_2, u_3 s bodem t leží na témž kruhu. Trojúhelník oskulační $u_1 u_2 u_3$ má nezávisle na bodu t, jemuž je přidružen, stálou plochu s těžištěm ve středu kuželosečky.[2])

V následujícím[3]) podávám některé další vlastnosti trojin oskulačních na kuželosečce.

I. *Normály trojiny oskulační protínají se v jednom bodě.*

Jsou-li

$$x = \frac{2p}{u^2 - q},\ y = \frac{2pu}{u^2 - q} \tag{1}$$

rovnice kuželosečky, obdržíme parametry bodu t příslušné oskulační trojiny jako kořeny rovnice

$$u^3 + 3tu^2 + 3qu + qt = 0. \tag{2}$$

Parametry oskulační trojiny vyhovují tudíž relacím

$$(u)_1 = -3t,\quad (u)_2 = 3q,\quad (u)_1 = -qt, \tag{3}$$

---

[1]) *Steinerovy* spisy díl 2. pag. 377.

[2]) *Steiner* ibid. *Zahradník*, Vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce. Weyrův Archiv math. a fysiky. Praha 1879, díl II.

[3]) Tato práce vyšla ve zprávách Kr. české společnosti nauk. 1910.

kdež značí $(u)_h$ kombinace h-ho stupně kořenů rovnice (2). Rovnice normály N_h kuželosečky v bodě u_h je:

$$N_h \equiv 2(u_h^2 - q)\,u_h x + (u_h^4 - q^2)\,y - 2pu_h(u_h^2 + q) - 4p\,u_h = 0. \tag{4}$$

Normály N_1, N_2, N_3 bodů trojiny oskulační $u_1u_2u_3$ protínají se v jediném bodě, neb je

$$\begin{aligned} &|\,2(u^2 - q)u,\ u^4 - q^2,\ -2pu(u^2 + q) - 4pu\,| \\ &= -8p(q+1)\,|\,u, u^3, u^4\,| + 8pq^2(q+1)\,|\,1, u, u^3\,| \\ &= 8p(q+1)\,|\,1, u, u^2\,| \,.\, \{-(u)_2\,(u)_3 + q^2(u)_1\} = 0 \end{aligned}$$

vzhledem k rovnicím (3).

II. *Trojúhelník ze středů křivosti bodů oskulační trojiny má stálou plochu.*

Značí-li S_h střed křivosti bodu u_h, jsou souřadnice [4]) jeho

$$x = p\,\frac{(q + u^2)^3 + 2(3u^4 + q^2)}{(u^2 - q)^3}$$

$$y = -8p(q+1)\left(\frac{u}{u^2 - q}\right)^3.$$

Označíme-li písmenem D plochu trojúhelníku $S_1S_2S_3$, je

$$D = -\frac{4p^2(q-1)}{\prod_1^3 (u_h^2 - q)^3}\left|\,(q + u^2)^3 + 2(3u^2 + q),\ u^3,\ (u^2 - q)^3\,\right|.$$

Uvedeme-li nyní rovnicemi (3) podmínku, že je trojúhelník $S_1S_2S_3$ trojúhelníkem příslušným trojině oskulační $u_1u_2u_3$, obdržíme

$$D = \frac{8\,.\,36p^2\,q^3(q+1)^2(t^2 - q)^2\,\Delta}{\prod_1^3 (u_h^2 - q)^3},$$

a jelikož je

$$\prod_1^3 (u_h^2 - q) = 16q^2(t^2 - q)$$

$$\Delta = |\,1, u, u^2\,| = 6(t^2 - q)\sqrt{-3q},$$

---

[4]) Em. *Weyr*: Über razionale Curven. Sitzb. d. kg. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften, Prag 18.|X. 1872, pag. 35 zvláštního otisku.

najdeme:

$$D = \frac{3^3}{4^3} \cdot \frac{p^2 (q+1)^2}{q^3} \sqrt{-3q}. \tag{5}$$

Jest tedy D veličina stálá pro všechny trojúhelníky středů křivosti příslušných jednotlivým trojinám oskulačním.

Jelikož je i plocha d oskulačního trojúhelníku

$$d = \tfrac{3}{4} \frac{p^2}{q^2} \sqrt{-3q}$$

veličina stálá, je i poměr ploch trojúhelníků D a d stálý, totiž

$$\frac{D}{d} = \tfrac{9}{16} \frac{(q+1)^2}{q} \tag{6}$$

a sice závislý pouze o poměru os kuželosečky.

III. Budiž H společný průsek normál bodu t příslušné oskulační trojiny a u, u_1, u_2, u_3 paty normál z bodu H na kuželosečku spuštěných. Dle věty Joachimsthalovy[5]) protíná kruh opsaný trojúhelníku ze tří pat u_1, u_2, u_3 danou kuželosečku v bodě diametrálném ku čtvrté patě u. Je-li nyní $u_1 u_2 u_3$ oskulační trojina, je t průsek té trojině opsaného kruhu s kuželosečkou. Leží tudíž oskulačnímu trojúhelníku sdružený bod t, diametrálně ku patě u čtvrté normály bodu H.

Souřadnice společného průseku H normál trojiny oskulační najdeme z poznámky, že je H průsek vždy dvou normál

$$N_1 \mid N_2 \equiv N_2 \mid N_3 \equiv N_3 \mid N_1$$

uváživše relací (3) aneb i následovně.

Mezi parametry pat normál z bodu $(x \mid y)$ platí [rovnice (4)] následující relace:

$$\begin{aligned} \Sigma u &= \frac{2(p-x)}{y}, \quad \Sigma uu = 0, \\ \Sigma uuu &= 2\,\frac{q(p+x)+2p}{y}, \quad \Sigma uuuu = -q. \end{aligned} \tag{7}$$

Jsou-li u_1, u_2, u_3 parametry trojiny oskulační přidružené bodu t, pak odpovídá čtveřina pat normál bodu H, jehož sou-

---

[5]) *Joachimsthal*: »Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids: Crelle Journal« XXVI., pag. 175.

řadnice označíme ξ, η. Vzhledem k relacím (3) přejde druhá a čtvrtá z rovnic (7) ve

$$ut = q, \tag{8}$$

a to je podmínka, že bod u je diametrálný bodu t.

První a třetí z rovnic (7) přejdou ve

$$\begin{aligned} u - 3t &= \frac{2(p - \xi)}{\eta} \\ 3u - t &= 2\frac{q(p + \xi) + 2p}{q\eta}, \end{aligned} \tag{9}$$

aneb vzhledem k rovnici (8):

$$\frac{q - 3t^2}{t} = \frac{2(p - \xi)}{\eta}$$

$$\frac{3q - t^2}{t} = 2\,\frac{q(p + \xi) + 2p}{2\eta},$$

z kterýchžto rovnic obdržíme

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{p(q + 3)}{2q} - p(q + 1)\frac{1}{t^2 - q} \\ \eta &= -\frac{p(q + 1)}{q}\frac{t}{t^2 - q}. \end{aligned} \tag{10}$$

Místo bodů H je tudíž kuželosečka a to affinní ku dané kuželosečce. Příbuznost bodů t a H dána je rovnicemi

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{p(q + 3)}{2q} - \frac{q + 1}{2}x \\ \eta &= -\frac{(q + 1)}{2q}\,.\,y. \end{aligned} \tag{11}$$

Obálka spojnic sdružených bodů t a H kuželoseček (t) a (H) je racionální křivka 4. třídy. Mezi souřadnicemi bodu t potažmo H a mezi přímkou $\overline{tH}$ platí biracionální kvadratickoreciproká příbuznost.

Na jiném místě jsme ukázali [6]), že souřadnice x', y' středu

---

[6]) *Zahradník* v Archivu math. a fys. l. c.

kruhu opsaného oskulační trojině příslušné bodu t jsou

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{p(q-3)}{4q} + \frac{p(q+1)}{2} \frac{1}{t^2-q} \\
y' &= \frac{p(q+1)}{2q} \cdot \frac{t}{t^2-q}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Tyto můžeme psáti

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{p(q-3)}{4q} + \frac{q+1}{4} x \\
y' &= \frac{q+1}{4q} y.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Obálka spojnic $\overline{tS}$ sdružených bodů kuželoseček (t) a (S) je též racionální křivka 4. třídy a příbuznost mezi bodem t, potažmo S a přímkou $\overline{tS}$ je biracionální kvadratickoreciproká.

Z rovnic (11) a (13) plyne

$$
\begin{aligned}
2x' + \xi &= -3 \frac{p}{q} \\
2y' + \eta &= 0,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

z čehož vidíme, že spojnice bodů H, S tvoří svazek paprsků, jehož vrchol je ve středu dané kuželosečky.

Plocha trojúhelníku tHS je

$$
\Delta = \tfrac{3}{8} \frac{q^2-1}{q^2} y(qx+p) = \tfrac{3}{8} \frac{q^2-1}{q^2} y s_n, \tag{15}
$$

kdež značí s_n subnormálu bodu $t(x \mid y)$. Z rovnice (15) shledáváme, že ve vrcholech kuželosečky (t) příslušné body t, H, S leží na jedné přímce.

Je-li daná kuželosečka rovnostranná hyperbola, tedy $q = 1$ je $H \equiv u$, t. j. normály oskulační trojiny na stejnostranné hyperbole protínají se na hyperbole samé a sice v bodě u, jenž leží diametrálně k bodu t, jemuž je trojúhelník oskulační sdružen. Místo středu kruhů opsaných (S) jest zde stejnostranná hyperbola (t) podobně položená hyperbola, kteráž má svůj střed ve vrcholu dané hyperboly.