Vincenc Jarolímek

Nová konstrukce plochy druhého stupně z devíti tečných rovin

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 371--374

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122926

Z toho následuje:

Z obou reálních harmonických křivek syzygetického svazku jedna má ovál, druhá jest bez oválu.

Cyklus postupných Hessian řádu lichého nemůže býti složen z křivek reálních.

Nová konstrukce plochy druhého stupně z devíti tečných rovin.

Podává vládní rada prof. **Vinc. Jarolímek.**

Dané roviny buďtež označeny číslicemi 1, 2, . . . 9, plocha žádaná φ^2. Stanovme průsečnici kterýchkoli dvou rovin, na př. $\overline{12} \equiv P$, a proložme přímkou P sborcenou plochu 2. stupně ε^2, která se dotýká dalších šesti rovin, třebas 3, . . . 8. Plocha tato je stanovena s dostatek, protože površka P zastupuje tři podmínky. Plochu ε^2 sestrojíme takto. Stanovme promítky plochy ε^2 z bodů $(3\,4\,5) \equiv r$, $(6\,7\,8) \equiv s$. Budou to dvě kuželové plochy 2. stupně $\varkappa^2$, λ^2, jež mají dvě společné roviny tečné ξ, η, obsahující spojnici $\overline{rs} \equiv O$; neboť přímkou P procházejí dvě tečné roviny ku ploše sborcené ε^2, jež dotýkají se i ploch $\varkappa^2$, λ^2. Ale i rovina $(Pr) \equiv \varrho$ je tečnou rovinou plochy ε^2, tedy i plochy $\varkappa^2$; kužel $\varkappa^2$ tudíž dotýkaje se rovin 3, 4, 5, ϱ, náleží k osnově kuželů o společném vrcholu r, určené těmito čtyřmi rovinami tečnými. Osnova tato promítá se z přímky O rovinovou involucí I, jíž družina ξ, η náleží. Involuce I je stanovena družinami rovinovými $\mu_1\mu_2$, $\nu_1\nu_2$, jimiž se průsečnice $(\overline{34}, \overline{5\varrho})$, $(\overline{35}, \overline{4\varrho})$ — jakožto dva degenerované kužele v osnově obsažené — z přímky O promítají. Je-li dále rovina $(Ps) \equiv \sigma$, bude kužel λ^2 náležeti osnově kuželů $(6\,7\,8\,\sigma)$, která se promítá z přímky O involucí rovinovou J; tato pak je dána družinami $\tau_1\tau_2$, $\psi_1\psi_2$, jimiž se průsečnice $(\overline{67}, \overline{8\sigma})$, $(\overline{68}, \overline{7\sigma})$ z přímky O promítají. Roviny ξ, η sestrojí se nyní společnou družinou obou involucí, I, J, dále pak kužel $\varkappa^2$ z pěti tečných rovin 3, 4, 5, ξ, η, jdoucích bodem r, a kužel λ^2 z tečných rovin 6, 7, 8, ξ, η, protínajících se v bodě s.

Plocha sborcená ε^2 je dána přímkou P a tečnými kuželi $\varkappa^2$, λ^2; plochy $\varkappa^2$, λ^2 mají dvě společné roviny tečné ξ, η, a přímka

P dotýká se ploch $\varkappa^2$, λ^2, ležíc v tečných rovinách jejich ϱ, resp. σ. Konstrukce plochy ε^2 jest nyní již snadna. Proložme přímkou P libovolnou rovinu γ_1 a sestrojme kuželosečky K^2, L^2, ve kterých γ_1 seče kužele $\varkappa^2$, λ^2; křivky K^2, L^2 mají společné tečny $\overline{\gamma_1\varrho\sigma} \equiv P$, $\overline{\gamma_1\xi}$, $\overline{\gamma_1\eta}$, dotýkají se tedy ještě čtvrté přímky N_1, která protínajíc P a dotýkajíc se $\varkappa^2$, λ^2, leží ve třech tečných rovinách plochy ε^2, jest tudíž v ploše ε^2 obsažena. Sestrojíme-li ještě v dalších rovinách γ_2, γ_3, položených přímkou P, dvě površky N_2, N_3, můžeme pak sborcenou plochu ε^2 (obecně hyperboloid) sestrojiti z řídících mimoběžek N_1, N_2, N_3 [1]).

Že plocha ε^2 dotýká se netoliko rovin 3—8, nýbrž i rovin 1, 2, obsahujíc površku $\overline{12}$, je samozřejmo. Analogicky sestrojíme ještě druhou plochu sborcenou ω^2, určenou na př. přímkou $\overline{13}$ a tečnými rovinami 2 4 5 6 7 8, která tudíž dotýká se i rovin 1, 3; dále pak ku plochám ε^2, ω^2 rozvinutelnou plochu obalovou 4. třídy π^4, která dotýká se patrně rovin 1—8. Plochy ε^2, ω^2 určují osnovu ploch 2. stupně, z nichž každá plochy π^4 podél určité křivky se dotýká. Ku ploše π^4 a k dané rovině 9. položíme tečnou plochu φ^2, obsaženou v osnově $(\varepsilon^2\omega^2)$, takto.

---

1) Přímky N můžeme výhodněji strojiti (bez dalších kuželoseček mimo K^2, L^2, které buďtež jednou pro vždy zobrazeny) takto: Vytkněme na přímce P bod n_2 a veďme jím ku K^2, L^2 po jedné tečně mimo P; každá s příslušným vrcholem r, resp. s, určuje tečnou rovinu jednoho kužele, a průsečnice obou těchto rovin tečných dá površku N_2 jdoucí bodem n_2. —

Dodatek. Geometrické místo Γ přímek, jež dotýkajíce se kuželů $\varkappa^2$, λ^2 současně, protínají zároveň *libovolnou* přímku P, která ploch $\varkappa^2$, λ^2 se nedotýká, je sborcená plocha stupně $2 \cdot \underset{P}{1} \cdot \underset{\varkappa^2}{2} \cdot \underset{\lambda^2}{2} = 8$ho. Mají-li však $\varkappa^2$, λ^2 dvě společné roviny tečné ξ, η, a dotýká-li se přímka P kuželů $\varkappa^2$, λ^2, jako nahoře, na př. v bodech ν, u, rozpadá se geom. místo Γ v hořejší plochu sborcenou 2. stupně ε^2, dále ve dvojnou rovinu $(Pus) \equiv \sigma$, která seče kužel $\varkappa^2$ v křivce R^2, jejíž veškeré tečny náležejí Γ (vyplňují svazek paprskový 2. třídy), rovněž ve dvojnou rovinu $(P\nu r) \equiv \varrho$, která seče kužel λ^2 v křivce S^2, jejíž veškeré tečny jsou v Γ obsaženy, dále v rovinu ξ, v níž leží svazek paprskový 1. třídy o středu $(\xi P) \equiv x$, jehož všecky paprsky hoví podmínkám, a konečně v rovinu η, obsahující svazek 1. třídy o středu $(\eta P) \equiv y$, jenž tolikéž v Γ jest obsažen, tak že skutečně součet stupňů $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$. — Dotýká-li se sice přímka P obou kuželů, ale nemají-li tyto žádné společné roviny tečné, rozpadá se Γ ve dvojné roviny (Pus), $(P\nu r)$ a v určitou sborcenou plochu stupně čtvrtého.

Vytkněme v rovině 9. libovolné čtyři přímky procházející jedním bodem v; z nich promítá se osnova ploch $(\varepsilon^2\omega^2)$ involucemi rovinovými. Každá involuce jest určena dvěma družinami rovin tečných, jež zvolenou přímkou ku plochám ε^2, ω^2 proložíme. V těchto čtyřech involucích stanovme k rovině 9. přidružené roviny $9'$, $9''$, $9'''$, $9''''$, a k těmto pěti rovinám, jež procházejí bodem v, sestrojme tečný kužel 2. stupně, který dotýkati se bude žádané plochy φ^2 podél určité kuželosečky M^2. I tuto lze konstruovati snadno: vytkneme v rovině 9. mimo v ještě tři body v_1, v_2, v_3, z nichž žádné dva neleží s bodem v na jedné přímce, sestrojíme z vrcholů v_1, v_2, v_3 obdobně další tři kužele tečné ku φ^2, a proložíme spojnicí $\overline{vv_1}$ společné tečné roviny ke kuželům v, v_1, jichž dotyčné přímky protnou se navzájem ve dvou bodech křivky M^2. Kužele v_2, v_3 dají s kuželem v analogicky další čtyři body kuželosečky M^2, čímž tato je stanovena. Opatříme-li si pak týmž způsobem ještě kuželosečky R^2, S^2, podél nichž se kužele v_1, v_2 plochy φ^2 dotýkají, dospějeme k úloze s dostátek známé, proložiti plochu 2. stupně φ^2 danými třemi kuželosečkami M^2, R^2, S^2, z nichž každé dvě se protínají (ve dvou bodech reál. či imag.).

Z konstrukce plyne, že osmi tečnými rovinami jest obecně rozvinutelná plocha 4. třídy π^4 s dostatek určena [1]); kdyby tedy devátá rovina daná byla nahodile *tečnou* ku ploše π^4, bylo by výsledků ∞^1, t. všecky plochy osnovy $(\varepsilon^3\omega^2)$. — Že úlohu duální: danými devíti body proložiti plochu stupně druhého, řešiti lze konstrukcí reciprokou, je samozřejmo.

Případ speciální. Prochází-li pět z daných rovin, na př. 1, 2, 3, 4, 5 týmž bodem r, sestrojme k těmto rovinám tečný

---

[1]) Předpokládáme ovšem, že roviny 1 . . . 8 netvoří tak řečené »*skupení osmirovinové*« (něm. dle Reye »*assoziierte Ebenen*«), jehož každá rovina jest určitě závislá na ostatních sedmi rovinách. Takové skupení tvoří osm společných rovin tečných ke třem nerozvinutelným plochám 2. stupně α^2, β^2, γ^2, jež *nenáleží k téže osnově ploch*, t. j. rozvinutelná obalová plocha 4. třídy ku plochám α^2, β^2 není zároveň plochou obalovou plochy γ^2. Kdyby roviny 1 . . . 8 takové skupení tvořily, stanovily by ∞^1 rozvinutelných ploch 4. třídy π^4. — Duálním útvarem jest »*skupení osmibodové*« (assoziierte Punkte), složené ze společných průsečíků tří ploch 2. stupně, které nenáleží k témuž svazku.

kužel 2. stupně $\varkappa^2$, dále průsečík rovin $(678) \equiv s$, spojnici $\overline{rs} \equiv P$, přímkou P tečné roviny ξ, η ke kuželi $\varkappa^2$, a k rovinám 6, 7, 8, ξ, η tečný kužel 2. stupně λ^2. Vytkněme nyní v rovině 9. bod v, položme jím po dvou tečných rovinách ke kuželům $\varkappa^2$ a λ^2, k těmto pak čtyřem rovinám a k rovině 9. tečný kužel 2. stupně μ^2. Takovým způsobem lze si opatřiti libovolné množství tečných kuželů ku ploše φ^2, z těch pak tři kuželosečky na ploše φ^2 jako nahoře. Obalová plocha π^4, určená rovinami 1 . . . 8, rozpadá se v tomto případě ve dvě kuželové plochy stupně druhého, totiž $\varkappa^2$ a λ^2.

O ploše rotační, vytvořené otáčením šroubovice.

Napsal Dr. **Fr. Kadeřávek.**

Ve svém Geometrisches Port-Folio uvádí Quido Schreiber co příklad rotačních ploch plochu vzniklou otáčením šroubovice kol přímky rovnoběžné s osou této křivky. Přihlédněme blíže k této ploše. Buď dána šroubovice $\check{S}$ o ose O a stopě p, pravotočivá; otáčejme ji kol přímky $R \parallel O$, R zvolme tak, aby bod p a body O_1 a R_1, do nichž se přímky O a R promítají (obr. 1.), ležely v jedné přímce. Na křivce $\check{S}$ vytkněme si bod t a hleďme sestrojiti jeho rovinu tečnou τ, aniž bychom užili meridiánu. Proložme si bodem t tečnu T k šroubovici $\check{S}$ a tečnu T' k rovnoběžce naší plochy, kružnici to K; přímkami T a T' jest tečná rovina stanovena, stopu její P^τ určíme, vedeme-li ji bodem p+, stopou to přímky T určenou evolventou E kružnice $\check{S}_1$, rovnoběžně k přímce T'. Vytkněme si na ose O šroubovice $\check{S}$ bod v ve vzdálenosti rovné redukované výšce v^0 šroubovice $\check{S}$ od průmětny a veďme jím přímku $\overline{v\pi}$ rovnoběžnou s tečnou T. Stopa π této přímky spadá na půdorys $\check{S}_1$ křivky $\check{S}$.

Veďme bodem π přímku $\overline{\pi s} \parallel P^\tau \parallel T'$; $\overline{\pi s}$ jest stopa roviny bodem v rovnoběžně k rovině tečné naší rotační plochy v bodě t šroubovice $\acute{S}$ sestrojené. Spojme t_1 s bodem R_1, pak $\overline{\pi v_1} \equiv \overline{v_1 t_1}$, $\overline{\pi s} \perp \overline{t_1 R_1}$, z čehož plyne, že vedeme-li bodem v_1 přímku $\overline{v_1 s} \perp \overline{v_1 R_1}$, jsou $\triangle\, \pi v_1 s$ a $\triangle\, t_1 v_1 R_1$ shodny a proto

$$\overline{v_1 s} \mathrel{\underline{\underline{+}}} \overline{v_1 R_1}.$$

Z toho jest patrno, že stopy veškerých rovin vedených bodem