Jan Sobotka

O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 487--500

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122922

Další syzyganty jsou stupňů 44, 48, 54, 60, 68, tak že mezi nimi jsou jistě relace, jež representují syzygie druhého stupně.

Abychom zjistili, že pro každý stupeň dají součiny základních forem nalezených i přes syzygie všechny možné formy invariantní, počítejme dle Molienovy methody vytvořující funkci pro počet forem invariantních. Formy invariantní jsou ty z lineárních kombinací součinů proměnných $z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} z_3^{\lambda_3} z_4^{\lambda_4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = s)$, které se transformují grupou identickou substitucí; počet jich tedy je dán dle vět Frobeniových o charakterech grup číslem h, které je koefficientem u x^s v rozvoji funkce

$$\frac{1}{5040} \Sigma \frac{h_\alpha}{\chi_\alpha(x)},$$

kde h_α značí počet elementů třídy substitucí v grupě, jejíž charakteristická rovnice je $\chi_\alpha(x)$. Vypočteme-li tuto funkci, dostaneme

$$\frac{1 + x^{24} + x^{30} - x^{38} - x^{44} - x^{68}}{(1 - x^8)(1 - x^{12})(1 - x^{14})(1 - x^{18})(1 - x^{20})}.$$

Odtud vyčteme, že existují primární invarianty stupňů 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30; součiny invariantů stupňů 24 a 30 dají se vyjádřiti pomocí ostatních forem, a kromě toho existují tři syzygie lineárné obsahující formy F a G.

O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického.

Napsal **J. Sobotka.**

1. Mezi vzdálenostmi libovolných čtyř bodů A, B, C, D na přímce platí známá relace *Eulerova*

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0, \tag{1}$$

jakož i relace *Stewartova*

$$AB \,.\, BC \,.\, CA + AB \,.\, CD^2 + BC \,.\, AD^2 + CA \,.\, BD^2, \tag{2}$$

kterážto relace platí, jak zřejmo, i tenkráte, když D neleží na přímce ABC. Následkem toho lze relaci této dáti ještě následující význam geometrický. Jsou-li a, b, c potence tří bodů A, B, C ležících na přímce vzhledem k libovolné ploše kulové, platí relace

$$\frac{a}{AB.AC}+\frac{b}{BA.BC}+\frac{c}{CA.CB}+1=0,$$

kterouž lze přímo dokázati, a relace (2) jest jenom zvláštním jejím případem.

2. Pro čtyři přímky a, b, c, d ve svazku, libovolně orientované, jest známa obdoba relace Eulerovy, totiž

$$\sin ab \sin cd + \sin bc \sin ad + \sin ca \sin bd = 0. \tag{3}$$

Jde tedy ještě o obdobu relace (2) pro čtyři přímky ve svazku. Abychom si takovou obdobu zjednali, upravme si důkaz věty (2) následovně[1]). Kladme

$$\begin{aligned} AB &= AD + DB, \\ BC &= BD + DC, \\ CA &= CD + DA. \end{aligned}$$

Násobením plyne

$$AB\,.\,BC\,.\,CA = (AD - BD)(BD - CD)(CD - AD)$$

čili

$$AB\,.\,BC\,.\,CA = \begin{vmatrix} 1, & AD, & AD^2 \\ 1, & BD, & BD^2 \\ 1, & CD, & CD^2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Vyčíslení determinantu toho podle prvků posledního sloupce dává bezprostředně relaci (2).

Kladme obdobně

$$\begin{aligned} \sin ab &= \sin (ad - bd), \\ \sin bc &= \sin (bd - cd), \\ \sin ca &= \sin (cd - ad). \end{aligned}$$

Obdržíme tu násobením

$$\begin{aligned} &\sin ab \sin bc \sin ca \\ = &(\sin ad \cos bd - \cos ad \sin bd)(\sin bd \cos cd - \cos bd \sin cd) . \\ &(\sin cd \cos ad - \cos cd \sin ad), \end{aligned}$$

---

[1]) Zajímavým způsobem odvozuje relaci (2) Baltzer ve své geometrii analytické.

z kteréžto relace plyne

$$sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca = cos^2 ad\; cos^2 bd\; cos^2 cd\,(tg\, ad - tg\, bd)\,(tg\, bd - tg\, cd)\,(tg\, cd - tg\, ad).$$

Tedy rovnici (4) odpovídá rovnice

$$sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca = cos^2 ad\; cos^2 bd\; cos^2 cd \begin{vmatrix} 1, & tg\, ad, & tg^2\, ad \\ 1, & tg\, bd, & tg^2\, bd \\ 1, & tg\, cd, & tg^2\, cd \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

jíž lze dáti tvar

$$sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca = \begin{vmatrix} cos^2\, ad, & sin\, ad\; cos\, ad, & sin^2\, ad \\ cos^2\, bd, & sin\, bd\; cos\, bd, & sin^2\, bd \\ cos^2\, cd, & sin\, cd\; cos\, cd, & sin^2\, cd \end{vmatrix},$$

čili

$$sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca = \begin{vmatrix} 1, & \frac{sin\, 2ad}{2}, & sin^2\, ad \\ 1, & \frac{sin\, 2bd}{2}, & sin^2\, bd \\ 1, & \frac{sin\, 2cd}{2}, & sin^2\, cd \end{vmatrix} \qquad (6)$$

přiléhající formou svou více k rovnici (4), nežli to činí rovnice (5).

Po vyčíslení determinantu v (5) podle prvku posledního sloupce bude

$$sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca = cos^2 ad\; cos^2 bd\; cos^2 cd\, \{ tg^2 ad\,(tg\, cd - tg\, bd) + tg^2 bd\,(tg\, ad - tg\, cd) + tg^2 cd\,(tg\, bd - tg\, ad)\}$$

a dále

$$\begin{aligned} &sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca \\ &= sin^2 ad\,(sin\, cd\; cos\, bd - sin\, bd\; cos\, cd)\; cos\, bd\; cos\, cd \\ &+ sin^2 bd\,(sin\, ad\; cos\, cd - sin\, cd\; cos\, ad)\; cos\, cd\; cos\, ad \\ &+ sin^2 cd\,(sin\, bd\; cos\, ad - sin\, ad\; cos\, bd)\; cos\, ad\; cos\, bd \\ &= sin^2 ad\; sin\, cb\; cos\, bd\; cos\, cd + sin^2 bd\; sin\, ac\; cos\, cd\; cos\, ad \\ &+ sin^2 cd\; sin\, ba\; cos\, ad\; cos\, bd, \end{aligned}$$

pročež plyne vzhledem ke vztahu

$$cos\, ad\; cos\, bd = cos\, ab - sin\, ad\; sin\, bd,$$

$$\begin{aligned} sin\, ab\; sin\, bc\; sin\, ca &+ sin^2 ad\; sin\, bc\,.\,(cos\, bc - sin\, bd\; sin\, cd) \\ &+ sin^2 bd\,.\, sin\, ca\,(cos\, ca - sin\, cd\; sin\, ad), \\ &+ sin^2 cd\,.\, sin\, ab\,(cos\, ab - sin\, ad\; sin\, bd) = 0. \end{aligned}$$

Další úprava dává pak:

$$sin\,ab\;sin\,bc\;sin\,ca + \frac{sin\,2bc}{2}\,sin^2\,ad + \frac{sin\,2ca}{2}\,sin^2\,bd$$
$$+ \frac{sin\,2ab}{2}\,sin^2\,cd - sin\,ad\;sin\,bd\;sin\,cd$$
$$(sin\,ad\;sin\,bc + sin\,bd\;sin\,ca + sin\,cd\;sin\,ab) = 0$$

a tudíž konečně, přihlížíme-li k relaci (3)

$$sin\,ab\;sin\,bc\;sin\,ca + \frac{sin\,2ab}{2}\,sin^2\,cd + \frac{sin\,2bc}{2}\,sin^2\,ad$$
$$+ \frac{sin\,2ca}{2}\,sin^2\,bd = 0. \qquad (7)$$

Rozumí se samo sebou, že relace uvedené platí vůbec o libovolných orientovaných čtyřech přímkách, ležících v rovině.

3. Z rovnice (2) a (7) dospějeme snadno k dalším rovnicím. Vyčíslením determinantu (4) obdržíme nejprv rovnici

$$AB\,.\,BC\,.\,CA = AD^2\,(CD - BD) + BD^2\,(AD - CD)$$
$$+ CD^2\,(BD - AD),$$

z níž dále vychází po sobě

$$AB\,.\,BC\,.\,CA = AD^2\,.\,CD - AD\,.\,CD^2 - AD^2\,.\,BD$$
$$+ BD^2\,.\,AD - BD^2\,.\,CD + CD^2\,.\,BD$$
$$= AD\,.\,CD\,(AD - CD) + BD\,.\,AD\,(BD - AD)$$
$$+ CD\,.\,BD\,(CD - BD)$$

a konečně

$$AB\,.\,BC\,.\,CA + AB\,.\,AD\,.\,BD + BC\,.\,BD\,.\,CD$$
$$+ CA\,.\,CD\,.\,AD = 0. \qquad (8)$$

Obdobně obdržíme vyčíslením determinantu v rovnici (6) podle prvku třetího sloupce, pak vyjádřením sinů úhlů $2ad$, $2bd$, $2cd$ funkcemi úhlů ad, bd, cd relaci

$$sin\,ab\;sin\,bc\;sin\,ca + sin\,ab\,.\,sin\,ad\,.\,sin\,bd + sin\,bc\;sin\,bd\;sin\,cd$$
$$+ sin\,ca\;sin\,cd\;sin\,ad = 0. \qquad (9)$$

4. Souvislost rovnic (1) a (3), jakož i (8) a (9) jest patrna. Promítneme-li řadu A, B, C, D z libovolného bodu mimo ni položeného V anebo naopak, protneme-li svazek a, b, c, d, jehož střed budiž označen V, libovolnou přímkou bod V neobsahující

a vyjádříme-li obsahy trojúhelníků vzniklých dvojím způsobem, jednak pomocí výšky z bodu V vedené, jinak pomocí úhlů při V v nich se nacházejících, seznáváme, že vzorce (1) a (3) přecházejí v sebe a rovněž i vzorce (8) a (9).

Promítneme-li čtyři body A, B, C, D kružnice poloměru r z libovolného bodu na ni položeného paprsky a, b, c, d, platí i co do smyslu $\sin ab = \frac{AB}{2r}, \ldots$ a proto dává relace (2) vztah

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0,$$

vyjadřující známou větu Ptolemeovu o čtyřúhelníku do kružnice vepsaném, při čemž úsečky ve vztahu tom obsažené mají znamení náležející příslušným sinům v (2). Rovněž tak plyne z věty (9) věta o čtyřúhelníku řečeném, vyjádřená rovnicí

$$AB \,.\, BC \,.\, CA + AB \,.\, AD \,.\, BD + BC \,.\, BD \,.\, CD + CA \,.\, CD \,.\, AD = 0,$$

kde platí o znamení úseček totéž jako prve. Rovnice tato jest totožná se známým vztahem vyjadřujícím poměr úhlopříčen v čtyřúhelníku do kružnice vepsaném pomocí jeho stran.

Opíšeme-li kružnici, jejíž střed se ztotožňuje se středem svazku $(abcd)$ a protnou-li na př. kladné směry přímek svazku kružnici tu v bodech A, B, C, D, jež spojíme s libovolným bodem na kružnici přímkami a_1, b_1, c_1, d_1, budou o přímkách těch platiti opět relace (3) a (9). Následkem toho máme další relace

$$\sin\frac{ab}{2}\sin\frac{cd}{2} + \sin\frac{bc}{2}\sin\frac{ad}{2} + \sin\frac{ca}{2}\sin\frac{bd}{2} = 0. \quad (10)$$

$$\sin\frac{ab}{2}\sin\frac{bc}{2}\sin\frac{ca}{2} + \sin\frac{ab}{2}\sin\frac{ad}{2}\sin\frac{bd}{2} + \sin\frac{bc}{2}\sin\frac{bd}{2}\sin\frac{cd}{2} + \sin\frac{ca}{2}\sin\frac{cd}{2}\sin\frac{ad}{2} = 0. \quad (11)$$

Naopak mohli jsme proložiti kružnici vrcholem svazku a prusečíky její se svazkem spojiti se středem, čímž bychom dostali nové relace.

Obecně jest tedy

$$\sin 2^k (ab) \sin 2^k (cd) + \sin 2^k (bc) \sin 2^k (ad) + \sin 2^k (ca) \sin 2^k (bd) = 0.$$

$$\sin 2^k (ab) \sin 2^k (bc) \sin 2^k (ca) + \sin 2^k (ab) \sin 2^k (ad) \sin 2^k (bd) + \sin 2^k (bc) \sin 2^k (bd) \sin 2^k (cd) + \sin 2^k (ca) \sin 2^k (cd) \sin 2^k (ad) = 0,$$

značí-li k libovolné kladné neb záporné číslo celistvé.

5. Uvažujme čtyři kružnice o středech $S_1, \ldots S_4$, které se dotýkají páté kružnice středu S v bodech $A_1 \ldots A_5$. Přímky $SA_1, \ldots, SA_4$ značme $a_1, \ldots, a_4$ a sice orientujme je tak, aby body $A_1, \ldots, A_4$ ležely na kladných jejich směrech. Poloměry kružnic buďtež příslušně $r_1, \ldots, r_4$ a r. Každou kružnici můžeme považovati za souhrn dvou cyklů, z nichž každý má určitý ze dvou možných smyslů; jeden z nich si zvolíme za kladný, a tedy druhý je záporný. Poloměr kladného cyklu budiž kladný, záporného tedy záporný. V kružnicích, které se dotýkají, přiřaďme k sobě vždy cykly stejného smyslu, je-li dotyk vnitřní a různých smyslů, je-li dotyk vnější. Především platí i co do znamení

$$A_i A_k = 2r \sin \frac{(a_i a_k)}{2}. \tag{12}$$

$$d_{ik}^2 = S_i S_k^2 = (r - r_i)^2 + (r - r_k)^2 - 2(r - r_i)(r - r_k) \cos (a_i a_k),$$

aneb

$$d_{ik}^2 = [(r - r_i) - (r - r_k)]^2 + 2(r - r_i)(r - r_k)[1 - \cos (a_i a_k)],$$

čili

$$d_{ik}^2 = (r_i - r_k)^2 + 4(r - r_i)(r - r_k) \sin^2 \frac{(a_i a_k)}{2}. \tag{13}$$

Dva cykly mají dvě vzhledem ku centrále souměrně položené společné tečny, a sice vnější při stejném smyslu cyklů, vnitřní při opačných smyslech. Značí-li t_{ik} délku takové tečny společné, jest obecně

$$t_{ik}^2 = d_{ik}^2 - (r_i - r_k)^2$$

a tudíž se zřetelem na (13)

$$t_{ik}^2 = 4(r - r_i)(r - r_k) \sin^2 \frac{(a_i a_k)}{2}. \tag{14}$$

Pro krátkost klaďme v následujícím $d_{ik}^2 = \delta_{ik}$, $t_{ik}^2 = \tau_{ik}$.

Dosadíme-li do (10) za $\sin\frac{(a_i a_k)}{2}$ hodnoty příslušné z (14) plynoucí, obdržíme větu *Casey-ovu* danou formulí

$$t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14} \pm t_{31}t_{24} = 0, \qquad (15)\,[1]$$

a dosadíme-li do (11) tytéž hodnoty, dojdeme k relaci

$$(r - r_4)\, t_{12}t_{23}t_{31} \pm (r - r_3)\, t_{12}t_{14}t_{24} \pm (r - r_1)\, t_{23}t_{24}t_{34} \pm (r - r_2)\, t_{31}t_{34}t_{14} = 0, \qquad (16)$$

z níž lze vypočítati r, totiž

$$r = \frac{r_1 t_{23}t_{24}t_{34} \pm r_2 t_{31}t_{34}t_{14} \pm r_3 t_{12}t_{14}t_{24} \pm r_4 t_{12}t_{23}t_{31}}{t_{23}t_{24}t_{34} \pm t_{31}t_{34}t_{14} \pm t_{12}t_{14}t_{24} \pm t_{12}t_{23}t_{31}}; \qquad (17)$$

při tom souhlasné členy v čitateli a jmenovateli mají stejná znaménka.

Redukuje-li se kružnice středu S_4 na bod, obdržíme z (15) známou rovnici kružnice dotýkající se daných tří kružnic $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ ve tvaru

$$t_{12}\sqrt{K_3} \pm t_{23}\sqrt{K_1} \pm t_{31}\sqrt{K_2} = 0;$$

sluší ale podotknouti, že pro určitá t_{12}, t_{23}, t_{31} rovnice ta značí jeden pár kružnic Apollonových, ať již zvolíme jakoukoli kombinaci znamének. Odstraníme-li totiž odmocniny, obdržíme v každém případě rovnici

$$t_{23}^4 K_1^2 + t_{31}^4 K_2^2 + t_{12}^4 K_3^2 - 2t_{13}^2 t_{23}^2 K_1 K_2 - 2t_{21}^2 t_{31}^2 K_2 K_3 - 2t_{32}^2 t_{12}^2 K_3 K_1 = 0, \qquad (18)$$

kde jest $t_{ik} = t_{ki}$.

To jest tedy rovnice jednoho páru Apollonických kružnic ke třem daným, jenž přísluší jedné trojici cyklů, oněm kružnicím přináležející a pak ovšem i druhé trojici, která sestává z cyklů majících smysly opačné.

6. Vztah mezi vzdálenostmi d_{ik} čtyř bodů na kružnici lze vyjádřiti podle Cayley-ho též determinantem

---

[1]) Cf. na př. Th. Monin: Příspěvky ku theorii křivky kruhové. Praha 1889.

$$\begin{vmatrix} 0, & \delta_{12}, & \delta_{13}, & \delta_{14} \\ \delta_{21}, & 0, & \delta_{23}, & \delta_{24} \\ \delta_{31}, & \delta_{32}, & 0, & \delta_{34} \\ \delta_{41}, & \delta_{42}, & \delta_{43}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Se zřetelem na (12) obdržíme z této podmínky, že

$$\begin{vmatrix} 0, & sin^2 \frac{(a_1 a_2)}{2}, & sin^2 \frac{(a_1 a_3)}{2}, & sin^2 \frac{(a_1 a_4)}{2} \\ sin^2 \frac{(a_2 a_1)}{2}, & 0, & sin^2 \frac{(a_2 a_3)}{2}, & sin^2 \frac{(a_2 a_4)}{2} \\ sin^2 \frac{(a_3 a_1)}{2}, & sin^2 \frac{(a_3 a_2)}{2}, & 0, & sin^2 \frac{(a_3 a_4)}{2} \\ sin^2 \frac{(a_4 a_1)}{2}, & sin^2 \frac{(a_4 a_2)}{2}, & sin^2 \frac{(a_4 a_3)}{2}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice tato nahražuje nám tudíž rovnici (3).

Klademe-li do ni za $sin^2 \frac{(a_i a_k)}{2}$ hodnoty z (14) plynoucí, obdržíme v obecném případě po krátké úpravě vztah

$$\begin{vmatrix} 0, & \tau_{12}, & \tau_{13}, & \tau_{14} \\ \tau_{21}, & 0, & \tau_{23}, & \tau_{34} \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & 0, & \tau_{34} \\ \tau_{41}, & \tau_{42}, & \tau_{43}, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mezi délkami tečen čtyř cyklů dotýkajících se cyklu pátého, vyjadřující větu Casey-ovu v jiném tvaru.

Z rovnice té obdržíme rovnici páru kružnic Apollonických ku třem cyklům, přináležejícím kružnicím $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ ve tvaru následujícím

$$\begin{vmatrix} 0, & \tau_{12}, & \tau_{13}, & K_1 \\ \tau_{21}, & 0, & \tau_{23}, & K_2 \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & 0, & K_3 \\ K_1, & K_2, & K_3, & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Tato rovnice jest úplně totožná s rovnicí (18).

7. Tím jest dáno analytické řešení problému Apolloniova, poskytující zároveň jednoduché řešení geometrické.

Buďtež U_1, V_1 body dotyku kružnic (19) s kružnicí $K_1 = 0$. Souřadnice bodů těch hoví patrně rovnici

$$\begin{vmatrix} 0, & \tau_{12}, & \tau_{13}, & 0 \\ \tau_{21}, & 0, & \tau_{23}, & K_2 \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & 0, & K_3 \\ 0, & K_2, & K_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$K_{23} \equiv t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3 = 0. \tag{20}$$

Obdobně obdržíme pro body dotyku U_2, V_2 na $K_2 = 0$ a U_3, V_3 na $K_3 = 0$ rovnice

$$\begin{aligned} K_{31} &\equiv t_{21}^2 K_3 - t_{23}^2 K_1 = 0. \\ K_{12} &\equiv t_{32}^2 K_3 - t_{31}^2 K_2 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Máme tudíž výsledek následující.

Body U_i, V_i, v nichž se dotýkají kružnice jednoho páru kružnic Apollonických, příslušných daným třem kružnicím $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, jedné z nich $K_i = 0$, leží na kružnici náležející svazku stanoveného ostatními dvěma; tři takto obdržené kružnice tvoří svazek.

Správnost posledního výroku plyne z toho, že

$$K_{23} + K_{31} + K_{12} \equiv 0.$$

Přímka potenční tohoto svazku jest

$$\frac{K_{23}}{t_{13}^2 - t_{12}^2} - \frac{K_{31}}{t_{21}^2 - t_{23}^2} = 0,$$

čili po krátké úpravě

$$t_{13}^2 t_{23}^2 (K_1 - K_2) + t_{21}^2 t_{31}^2 (K_2 - K_3) + t_{32}^2 t_{12}^2 (K_3 - K_1) = 0$$

aneb, jsou-li

$$P_{12} = 0,\ P_{23} = 0,\ P_{31} = 0$$

přímky potenční pro dvě a dvě z daných kružnic;

$$\frac{P_{12}}{t_{12}^2} + \frac{P_{23}}{t_{23}^2} + \frac{P_{31}}{t_{31}^2} = 0.$$

Přímka ta prochází středem potenčním O daných tří kružnic, jak bylo očekávati, ježto všecky zmíněné kružnice protínají orthogonalně kružnici orthotomickou $Q = 0$ daných tří kružnic.

Že spojnice $U_i V_i$ prochází rovněž středem O, podávají rovnice (20) taktéž. Neboť na př. spojnice $U_1 V_1$ má rovnici

$$K_1 - \frac{t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = 0$$

čili

$$t_{13}^2 P_{12} - t_{12}^2 P_{13} = 0.$$

8. Máme tudíž

$$U_1 V_1 \equiv \frac{P_{12}}{t_{12}^2} - \frac{P_{13}}{t_{13}^2} = 0,$$

$$U_2 V_2 \equiv \frac{P_{23}}{t_{23}^2} - \frac{P_{21}}{t_{21}^2} = 0,$$

$$U_3 V_3 \equiv \frac{P_{31}}{t_{31}^2} - \frac{P_{32}}{t_{32}^2} = 0.$$

Buďtež $N_{12} = 0$, $N_{23} = 0$, $N_{31} = 0$ normálné tvary rovnic pro přímky $P_{12} = 0$, $P_{23} = 0$, $P_{31} = 0$. Patrně panují mezi levými stranami těchto rovnic následující vztahy:

$$P_{12} = d_{12} N_{12}, \; P_{23} = d_{23} N_{23}, \; P_{31} = d_{31} N_{31}.$$

Následkem toho můžeme psáti rovnice přímek $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, $U_3 V_3$ příslušně

$$\begin{aligned} N_{12} \pm \frac{d_{13}}{d_{12}} \cdot \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2} N_{13} &= 0, \\ N_{23} \pm \frac{d_{21}}{d_{23}} \cdot \frac{t_{23}^2}{t_{21}^2} N_{21} &= 0, \\ N_{31} \pm \frac{d_{32}}{d_{31}} \cdot \frac{t_{31}^2}{t_{32}^2} N_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Označíme přímky $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, $U_3 V_3$ krátce L_1, L_2, L_3. Poslední rovnice dávají dělicí poměry přímek L_1, L_2, L_3 vzhledem ku přímkám $P_{ik} = 0$, jež označíme jednoduše také P_{ik},

$$\begin{aligned} (P_{12} P_{13} L_1) &= \pm \frac{d_{13} t_{12}^2}{d_{12} t_{13}^2}, \\ (P_{23} P_{21} L_2) &= \pm \frac{d_{21} t_{23}^2}{d_{23} t_{21}^2}, \\ (P_{31} P_{32} L_3) &= \pm \frac{d_{32} t_{31}^2}{d_{31} t_{32}^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Ke konstrukci přímek $U_i V_i$ tyto rovnice nejsou úplně způsobilé a to již pro dvojznačnost v nich obsaženou.

9. Vypišme levou stranu rovnice $K_i = 0$ ve tvaru

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y + p_i = 0.$$

Klademe-li počátek naší pravoúhlé soustavy do středu potenčního O, bude rovnice přímky $U_1 V_1 \equiv L_1$

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\, x + (\beta_1 - \beta_2)\, y}{t_{12}^2} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)\, x + (\beta_1 - \beta_3)\, y}{t_{13}^2} = 0.$$

Zvolme dále přímku $P_{23} = 0$ za osu x, pak bude $\alpha_3 = \alpha_2$ a rovnice uvažované přímky bude

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(t_{13}^2 - t_{12}^2)\, x + [(\beta_1 - \beta_2)\, t_{13}^2 - (\beta_1 - \beta_3)\, t_{12}^2]\, y = 0.$$

Směrnice přímky $S_i S_k$ jest $\frac{\beta_i - \beta_k}{\alpha_i - \alpha_k}$ a tudíž směrnice přímky $P_{ik} = 0$ jest $-\frac{\alpha_i - \alpha_k}{\beta_i - \beta_k}$, takže jest zde

$$tg\,(P_{23}, P_{12}) = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}, \quad tg\,(P_{23}, P_{13}) = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_3}.$$

Z poslední rovnice přímky L_1 plyne následkem výrazů právě získaných

$$cot\,(P_{23}, L_1) = -\frac{\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\, t_{13}^2 - \frac{\beta_1 - \beta_3}{\alpha_1 - \alpha_2}\, t_{12}^2}{t_{13}^2 - t_{12}^2},$$

aneb

$$cot\,(P_{23}, L_1) = \frac{t_{13}^2\, cot\,(P_{23}, P_{12}) - t_{12}^2\, cot\,(P_{23}, P_{13})}{t_{13}^2 - t_{12}^2}.$$

Tento výraz dává rovnici

$$t_{13}^2\, [cot\,(P_{23}, L_1) - cot\,(P_{23}, P_{12})]$$
$$= t_{12}^2\, [cot\,(P_{23}, L_1) - cot\,(P_{23}, P_{13})],$$

již lze upraviti ve tvar

$$\frac{t_{13}^2\, sin\,[(P_{23}, P_{12}) - (P_{23}, L_1)]}{sin\,(P_{23}, P_{12})} = \frac{t_{12}^2\, sin\,[(P_{23}, P_{13}) - (P_{23}, L_1)]}{sin\,(P_{23}, P_{13})}$$

čili

$$\frac{sin\,(L_1, P_{12})}{sin\,(P_{23}, P_{12})} \cdot \frac{sin\,(P_{23}, P_{13})}{sin\,(L_1, P_{13})} = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}.$$

Tím dospíváme ke konečnému výsledku

$$
\begin{aligned}
(P_{12}P_{13}L_1P_{23}) &= \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}, \\
(P_{23}P_{12}L_2P_{13}) &= \frac{t_{23}^2}{t_{12}^2}, \\
(P_{13}P_{23}L_3P_{12}) &= \frac{t_{13}^2}{t_{23}^2},
\end{aligned} \tag{23}
$$

který nám poskytuje nadmíru jednoduchou konstrukci přímek L_1, L_2 a L_3.

Abychom na př. obdrželi L_1, protneme přímky P_{12}, P_{13} přímkou rovnoběžnou ku P_{23} v bodech Q_{12}, Q_{13} a stanovíme na ní bod Q_1, tak aby $(Q_{12}Q_{13}Q_1) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}$, kteroužto konstrukci lze v každém případě, tedy i když příslušné společné tečny daných kružnic jsou imaginárné, jednoduše provésti, ježto t_{12}^2, t_{13}^2 jsou definovány analyticky a v případě právě řečeném jsou záporné.

Konstrukci uvedenou můžeme také provésti tak, že si ku svazku $(P_{12}P_{13}L_1P_{23})$ sestrojíme svazek přímek normálných o středu S_1. Obdržíme takto přímky S_1S_2, S_1S_3, L'_1 a přímku f bodem S_1 rovnoběžně ku S_2S_3 vedenou. Ježto

$$(S_1S_2,\ S_1S_3,\ L'_1, f) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2},$$

tu seče-li L'_1 přímku S_2S_3 v bodě G_1, bude patrně

$$(S_2S_3G_1) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}.$$

Obdobně obdržíme

$$(S_3S_1G_2) = \frac{t_{23}^2}{t_{12}^2},\quad (S_1S_2G_3) = \frac{t_{13}^2}{t_{23}^2},$$

kde význam bodů G_2 a G_3 jest patrný. Poněvadž

$$(S_1S_2G_3)(S_2S_3G_1)(S_3S_2G_2) = 1,$$

leží body G_1, G_2, G_3 na přímce.

10. Z uvedeného plyne tato jednoduchá konstrukce přímek L_1, L_2, L_3, stanovících body U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3, v nichž hledaný pár Apollonických kružnic se daných tří kružnic dotýká.

Vedeme středy S_1, S_2, S_3 daných kružnic rovnoběžné úsečky S_1H_1, S_2H_2, S_3H_3, které i se zřetelem na znamení jsou úměrny hodnotám t^2_{23}, t^2_{13}, t^2_{12}, čímž obdržíme trojúhelník $H_1H_2H_3$ k trojúhelníku $S_1S_2S_3$ perspektivný; osa perspektivity nechť seče strany S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1 v bodech R_3, R_1 ,R_2; učiníme-li i co do smyslu $S_2G_1 = R_1S_3$, $S_3G_2 = R_2S_1$, resp. $S_1G_3 = R_3S_2$, budou body G_1, G_2, G_3 ležeti na přímce a kolmice ze středu potenčního O daných kružnic na přímky S_1G_1, S_2G_2, S_3G_3 jsou přímky L_1, L_2, L_3, protínající dané kružnice v bodech dotyku s hledanými kružnicemi Apollonickými.

Z toho jest také patrno, že z poměrů (22) jsou buď dva záporné anebo všecky kladné, neboť součin jejich rovná se součinu dvojpoměrů (23) a tedy $+1$. Přímka spojující body G_1, G_2, G_3 jest zároveň centrálou kružnic $K_{23} = 0$, $K_{31} = 0$, $K_{12} = 0$, ježto souřadnice středu na př. pro $K_{23} = 0$ jsou

$$\alpha_{23} = \frac{\alpha_2 - \left(\frac{t_{12}}{t_{13}}\right)^2 \alpha_3}{1 - \left(\frac{t_{12}}{t_{13}}\right)^2}, \quad \beta_{23} = \frac{\beta_2 - \left(\frac{t_{12}}{t_{13}}\right)^2 \beta_3}{1 - \left(\frac{t_{12}}{t_{13}}\right)^2},$$

tak že skutečně středem této kružnice jest bod G_1, což plyne i z toho, že střed ten leží na kolmici z bodu S_1 na L_1, kterážto kolmice se ztotožňuje dle naší konstrukce s přímkou S_1G_1 a že kružnice řečená náležejíc svazku stanovenému kružnicemi $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, má svůj střed na S_2S_3 a tudíž v bodě G_1.

11. Označme délku tečny z bodu U_i anebo V_i ke kružnici $K_l = 0$ symbolem T_{il}, tu dává nám rovnice (17) výrazy následující, jež obdržíme kladouce $r_4 = 0$, $t_{i4} = 0$.

$$r = \frac{r_1 T_{12} T_{13}}{T_{12} T_{13} \pm t_{12} t_{13}}, \quad r = \frac{r_2 T_{23} T_{21}}{T_{23} T_{21} \pm t_{23} t_{21}},$$
$$r = \frac{r_3 T_{31} T_{32}}{T_{31} T_{32} \pm t_{31} t_{32}}.$$

Dále pak

$$\frac{r - r_1}{r} = \pm \frac{t_{12} t_{13}}{T_{12} T_{13}}, \quad \frac{r - r_2}{r} = \pm \frac{t_{23} t_{21}}{T_{23} T_{21}},$$
$$\frac{r - r_3}{r} = \pm \frac{t_{31} t_{32}}{T_{31} T_{32}}. \tag{24}$$

Applikujme větu Casey-ho na kružnice $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ a na kružnici nullovou representovanou bodem U_1, resp. V_1.

Plyne tu

$$t_{12} T_{13} \pm t_{13} T_{12} = 0$$

a obdobně

$$\begin{aligned} t_{23} T_{21} \pm t_{12} T_{23} &= 0 \\ t_{13} T_{32} \pm t_{23} T_{31} &= 0, \end{aligned} \tag{25}$$

kde arci obecně $T_{ik} \gtrless T_{ki}$. Vztahy tyto souhlasí úplně s rovnicemi (20) a lze je obdržeti též z rovnice

$$t_{12} \sqrt{K_3} \pm t_{23} \sqrt{K_1} \pm t_{31} \sqrt{K_2} = 0,$$

klademe-li v ní po sobě

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0.$$

Z rovnic těchto vychází rovnost

$$T_{12} T_{23} T_{31} = \pm T_{13} T_{21} T_{32}$$

čili

$$\frac{K_{12}}{K_{13}} \cdot \frac{K_{23}}{K_{21}} \cdot \frac{K_{31}}{K_{32}} = 1,$$

značí-li K_{il} potenci bodu U_i neb V_i vzhledem ke kružnici $K_l = 0$.

Použijeme-li vztahů (25), přecházejí rovnice (24) v další rovnice

$$\pm \frac{r - r_1}{r} = \frac{t_{12}^2}{T_{12}^2} = \frac{t_{13}^2}{T_{13}^2}, \quad \pm \frac{r - r_2}{r} = \frac{t_{23}^2}{T_{23}^2} = \frac{t_{21}^2}{T_{21}^2},$$

$$\pm \frac{r - r_3}{r} = \frac{t_{31}^2}{T_{31}^2} = \frac{t_{32}^2}{T_{32}^2}$$

aneb

$$\frac{r - r_1}{r - r_2} = \pm \frac{T_{21}^2}{T_{12}^2}, \quad \frac{r - r_2}{r - r_3} = \pm \frac{T_{32}^2}{T_{23}^2}, \quad \frac{r - r_3}{r - r_1} = \pm \frac{T_{13}^2}{T_{31}^2}.$$
