Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O některých křivkách z kuželosečky odvozených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 3, 168--173

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122860`

perleťovým, leč tvaru nepravidelného. Tyto nabyly též hned na to barvy růžové, leč rychle zmizely. Nejmohutnější a nejsložitější protuberance vznášela se nad krajem na spůsob úzkých jazyků plamenných růžové barvy; kraje byly nachové a průzračné, dovolujíce hleděti do vnitř protuberance; i mohl jsem skutečně rozeznati, že protuberance ta byla dutá. Krátce před koncem zatmění viděl jsem vycházeti z jejího konce růžové průzračné proužky, dodávající protuberanci vzezření svícnu. Proužky ty zmizely při prvním objevení se slunce, ale hlavní část protuberance byla pak *ještě skoro pět minut viditelná.*"

(Pokračování.)

O některých křivkách z kuželosečky odvozených.*)

Napsal

Dr. **K. Zahradník** v Záhřebě.

I.

Vedeme-li z bodu a na kuželosečku, danou rovnicí

$$K \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0, \tag{1}$$

obě tečny, jež se dotýkají kuželosečky v bodech u_1, u_2, a vedeme li dále tetivu styku $\overline{u_1 u_2}$, obdržíme určitý trojúhelník au_1u_2. Vyšetřme nyní místo bodu a, pro nějž má příslušný trojúhelník $\overline{au_1u_2}$ stálou plochu.

Položíme-li v rovnici (1)

$$y = ux,$$

kde je patrný geometrický význam parametru u, můžeme ji pak nahraditi následujícími dvěma rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2 - q}, \\ y &= \frac{2pu}{u^2 - q}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

t. j. můžeme souřadnice libovolného bodu křivky vyjádřiti co

---

*) Uveřejněno v „Radu jugoslovenské akademije" kniha 40tá v Záhřebu.

funkce proměnné u, parametru to bodu (xy). Plocha trojúhelníku au_1u_2 je, jak známo,

$$2\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2p}{u_1^2-q} & \frac{2pu_1}{u_1^2-q} & 1 \\ \frac{2p}{u_2^2-q} & \frac{2pu_2}{u_2^2-q} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2p}{(u_1^2-q)(u_2^2-q)} \begin{vmatrix} x & y & 2p \\ 1 & u_1 & u_1^2-q \\ 1 & u_2 & u_2^2-q \end{vmatrix}.$$

Rozložíme-li tento determinant, obdržíme

$$\Delta = \frac{p(u_2-u_1)}{(u_1^2-q)(u_2^2-q)} \cdot \{x(u_1u_2+q) - y(u_1+u_2) + 2p\};$$

nebo

$$\Delta = \frac{p(u_2-u_1)\{x(u_1u_2+q) - y(u_1+u_2) + 2p\}}{(u_1u_2+q)^2 - 2q(u_1+u_2)}. \tag{3}$$

Výraz (3) platí pro každý trojúhelník, jehož dva vrcholové leží na kuželosečce; třeba nám nyní uvésti podmínku, že u_1, u_2 jsou parametry bodů styku, příslušné tangentám bodu a. Za tou příčinou jest se nám obrátiti nejdříve k rovnici tečny bodu u dané kuželosečky.

Rovnice zmíněné tečny jest

$$2uy - (u^2+q)x - 2p = 0. \tag{4}$$

Jsou-li xy souřadnice daného bodu a, tu obdržíme z rovnice (4) parametry bodů styku tečen, vedených z tohoto bodu na kuželosečku, co kořeny rovnice (4). Srovnejme ji tudíž dříve dle mocností veličiny u a zjednejme si

$$u^2 - \frac{2y}{x}u + \frac{qx+2p}{x} = 0; \tag{5}$$

z rovnice této plyne bezprostředně

$$\left.\begin{aligned} u_1+u_2 &= \frac{2y}{x}, \\ u_1u_2 &= \frac{qx+2p}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Uvedeme-li tyto hodnoty do rovnice (3), obdržíme pro místo vrcholu a stálého trojúhelníku au_1u_2, berouce na zřetel, že je

$$u_1 - u_2 = \sqrt{(u_1+u_2)^2 - 4u_1u_2},$$

po krátké redukci

$$(y^2 - 2px - qx^2)^3 - c^2[qxy - (qx+p)^2]^2 = 0, \tag{7}$$

kde jsme k vůli krátkosti položili

$$c = -\frac{\Delta}{p}.$$

Místo bodu, jehož tečny a polara vzhledem k dané kuželosečce tvoří trojúhelník stálé plochy, jest křivka šestého stupně.

Je-li ve zvláštním případě

$$K = 0$$

parabola, což analyticky označíme podmínkou $q = 0$, přejde rovnice (7) ve

$$(y^2 - 2px)^3 - c^2p^4 = 0. \tag{8}$$

Hledané místo rozpadne se v tomto případu ve tři paraboly, z nichž jsou dvě imaginárné a jedna realní. Označíme-li třetí kořeny z jedničky 1, α, α^2, můžeme rovnice zmíněných parabol psáti:

$$\begin{aligned} y^2 - 2px - p\sqrt[3]{c^2p} &= 0, \\ y^2 - 2px - p\alpha\sqrt[3]{c^2p} &= 0, \\ y^2 - 2px - p\alpha^2\sqrt[3]{c^2p} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Kdyby stálá plocha trojúhelníku byla

$$\Delta = p^2,$$

obdržíme pro realní parabolu rovnici

$$y^2 - 2px - p^2 = 0, \tag{10}$$

kteráž je s danou parabolou shodná, pouze pošinutá v ose směrem negativním o $\frac{p}{2}$. Píšeme-li za

$$qxy - (qx + p)^2$$

krátce H, (neb $H = 0$ značí hyperbolu), můžeme rovnici (7) následovně psáti

$$K^3 - c^2H^2 = 0. \tag{11}$$

Z této rovnice vyplývá, že hledané místo neodvisle na velikosti stálého trojúhelníku Δ prochází průseky kuželoseček

$$K = 0$$

$$H = 0;$$

a z rovnice (11) vysvítá, že tyto průseky za místo dvojnásobnými body a to úvratnými body jsou, což i dokázati můžeme spůsobem následujícím.

Položíme-li k vůli krátkosti

$$F \equiv K^3 - c^2 H^2 = 0,$$

a označíme-li, jak obyčejem, F_1 částečný differencialní poměr podlé x, podobně

$$F_2 = \frac{dF}{dy}, \quad F_{11} = \frac{d^2F}{dx^2}, \quad F_{12} = \frac{d^2F}{dx\,dy}, \quad F_{22} = \frac{d^2F}{dy^2},$$

bude směrnice tangenty bodu (xy)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = -\frac{3K^2K_1 - 2c^2 HH_1}{3K^2K_2 - 2c^2 HH_2}.$$

Souřadnice průseků musí vyhověti rovnicím

$$\begin{aligned} K &= 0, \\ H &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

a tím jeví se směrnice tangent ve tvaru neurčitém, totiž

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

a tím je jsoucnost dvojných bodů dokázána. Mají-li ony body býti body úvratnými,*) tu je

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Jest pak

$$\begin{aligned} F_{11} &= 6KK_1^2 + 3K^2 K_{11} - 2c^2 H_1^2 - 2c^2 HH_{11} \\ F_{22} &= 6KK_2^2 + 3K^2 K_{22} - 2c^2 H_2^2 - 2c^2 HH_{22} \\ F_{12} &= 6KK_1K_2 + 3K^2 K_{12} - 2c^2 H_1 H_2 - 2c^2 HH_{12}. \end{aligned} \tag{14}$$

Přihlížejíce k tomu, že souřadnice průseků rovnicím (12) vyhověti musí, tu přejdou rovnice (14) ve

$$\begin{aligned} F_{11} &= -2c^2 H_1^2, \\ F_{22} &= -2c^2 H_2^2, \\ F_{12} &= -2c^2 H_1 H_2; \end{aligned}$$

tím je pak zároveň

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = 4c^2 H_1 H_2 \begin{vmatrix} H_1 & H_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix} = 0,$$

čím tvrzení naše dokázaným se býti jeví.

Že průseky žádné zvláštní body vyššího řádu představovati nemohou, vysvítá z toho, že křivka šestého stupně nejvýše 10 dvojných bodů míti může a že trojný bod tři dvojné body za-

*) Viz *Studnička* „O počtu differencialním" II. vydání, pag. 192.

stupuje, tak že by čtyři trojné body zastupovaly 12 dvojných bodů, což zde nemůže býti.

Že místo geometrické pouze v tom případu imaginárními body kruhovými v nekonečnu prochází, když základní kuželosečka $K = 0$ je kruh, již z tvaru rovnice je patrno.

Směry asymptot geometrického místa se shodují se směry asymptot dané kuželosečky $K = 0$; a jelikož K třikráte se vyskytuje, shledáváme, že geometrické místo má v nekonečnosti dva body obratu, v nichž se ho dotýká přímka úběžná.

II.

Již v prvním článku vyznačili jsme trojúhelník tečen bodu $a(xy)$ a jeho polary $au_1u_2 = \Delta$. Těžisko tohoto trojúhelníku budiž t a jeho souřadnice ξ, η. Každému bodu a přisluší určitý bod t. Položme si nyní za úlohu nalézti rovnice příbuznosti mezi souřadnicemi bodů a i t, čím stane se patrným, jakou křivku bod a popsati musí, když bod t se po určité dráze pohybuje.

Za souřadnice těžiska obdržíme

$$\begin{aligned} 3\xi &= x + 2p\left\{\frac{1}{u_1{}^2 - q} + \frac{1}{u_2{}^2 - q}\right\}, \\ 3\eta &= y + 2p\left\{\frac{u_1}{u_1{}^2 - q} + \frac{u_2}{u_2{}^2 - q}\right\}, \end{aligned} \tag{15}$$

anebo po malé transformaci

$$3\xi = x + 2p\,\frac{(u_1 + u_2)^2 - 2(u_1u_2 + q)}{(u_1u_2 + q)^3 - 2q\,(u_1 + u_2)}$$

$$3\eta = y + 2p\,\frac{(u_1 + u_2)\,(u_1u_2 - q)}{(u_1u_2 + q)^2 - 2q\,(u_1 + u_2)}\,.$$

Zavedeme-li nyní za u_1u_2 i $(u_1 + u_2)$ hodnoty z rovnice (6), čímž uvedeme podmínku, že u_1 i u_2 jsou parametry bodů styku tečen, jež jsme z bodu a na kuželosečku vedli, obdržíme

$$3\xi = x - 2p\,\frac{y^2 - 2px - qx^2}{qxy - (qx + p)^2}$$

$$3\eta = y + 2p\,\frac{py}{qxy - (qx + p)^2}$$

co hledané rovnice příbuznosti. Opíše-li bod t křivku n-tého stupně,

$$f(\xi, \eta) = 0,$$

opíše příslušný pol a křivku $3n$-tého stupně

$$f(x, y) = 0.$$

Upotřebíce dřívější zkráceniny, můžeme psáti

$$\xi = \frac{x}{3} - \frac{2pK}{3H}$$

$$\eta = \frac{y}{3} + \frac{2p^2y}{3H}. \qquad (16)$$

Popisuje-li ve zvláštním případu bod t přímku, jejíž rovnice jest

$$a\xi + b\eta + c = 0,$$

tu odpovídá jí pomocí rovnic příbuznosti (16) křivka třetího stupně

$$(ax + by + 3c) H - 2p (aK - bpy) = 0$$

mající tři realní asymptoty. Křivka tato rozpadne se v parabolu a přímku úběžnou, je-li základní kuželosečka parabola.

Fysikalní příspěvek k nauce o veličinách imaginárních.

Píše

Dr. J. Plašil v Litomyšli.

Původní pojem veličin pomyslných či imaginarních jest, že jakožto sudá odmocnina z negativních čísel nebo v poslední instanci $\sqrt{-1}$ značí, kdykoli se v počtu objeví, nemožnost nebo nesmyslnost dané úlohy asi v tom smyslu, jako nelze sobě mysliti lichý počet bodů rozdělený ve dvě poloviny. Mnohostranným bádáním seznáno však, že veličiny ty nejsou naprosto bez realního významu a sice ani v mathematice ani ve fysice. Mějme na zřeteli tuto poslední, neboť v mathematice jest význam ten obecně znám, z něho pochází také název veličin *lateralních.*

Realní význam výrazu $\sqrt{-1}$ ve fysice ustanovil poprvé *Fresnel.* Známo, že chvění směrem x naznačiti lze vzorcem