$$\frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = 180^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \text{ a t. d.},$$

jest

$$p = 2r^2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \sin\frac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

a se zřetelem k rovnici (16)

$$p = 2\mathrm{P} \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\delta}{2}. \tag{23}$$

O některých vzorcích goniometrických.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot,**

s. professor v Praze.

Mnohé úlohy, zejmena geometrické, mohou různými spůsoby býti řešeny. Jest-li že úlohy takové připouští řešení jednoznačné, pak ovšem výsledky, jichž se doděláme, musí býti identické. V tom spočívá pak důležitý spůsob, jakým možno zjednati si množství vztahů identických.

V následujícím chceme ukázati, jak možno vyvinouti různým řešením trojúhelníků některé vztahy goniometrické týkající se úhlů, jichž součet rovná se 180^0.

Vztahy ty lze snadno nalézti ze známé úlohy jak řešiti trojúhelník, dány-li jsou jeho úhly a poloměr kružnice opsané aneb vepsané.

Označme vrcholy trojúhelníka písmenami A, B, C; strany nechť jsou a, b, c, úhly α, β, γ, poloměr kružnice opsané R, vepsané r, obvod s a plocha p.

I. Stanovme plochu p, je-li dáno R, α, β, γ.

Plochu trojúhelníka můžeme stanoviti dvojím spůsobem; buď dle relace

$$p = \frac{ab \sin\gamma}{2}$$

aneb tak, že ji vyjádříme jakožto součet tří trojúhelníků rovnoramenných a to $\triangle$ OAB, $\triangle$ OAC, $\triangle$ OBC, při čemž značí O střed kružnice opsané o trojúhelník.

Snadno lze ukázati, že

$$a = 2R \sin \alpha,$$
$$b = 2R \sin \beta,$$

a tudíž

$$(\alpha) \qquad p = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Druhým řešením nalezneme:

$$p = \triangle OAB + \triangle OAC + \triangle OBC$$
$$= \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} + \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin 2\gamma}{2},$$

t. j,

$$(\beta) \qquad p = \frac{R^2}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Z (α) a (β) plyne:

$$(1) \qquad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

a sice pro jakékoli α, β, γ, jen když

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Ještě jiným spůsobem můžeme stanoviti plochu trojúhelníka ABC. Spustíme-li s bodu O kolmice na jednotlivé strany daného trojúhelníka a označíme-li paty těchto kolmic a', b', c', pak plocha $\triangle\, a'b'c'$ jest $\frac{1}{4}$ plochy trojúhelníka ABC.

Tu platí

$$Oa' = R \cos \alpha_1, \quad Ob' = R \cos \beta, \quad Oc' = R \cos \gamma,$$

a

$$\triangle\, a'b'c' = \triangle\, Oa'b' + \triangle\, Oa'c' + \triangle\, Ob'c'.$$

Avšak

$$\triangle Oa'b' = \frac{\overline{Oa'} \,.\, \overline{Ob'}}{2} \sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{Oa'} \,.\, \overline{Ob'}}{2} \sin \gamma = \frac{R^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma}{2};$$

podobně

$$\triangle\, Oa_{,}c' = R^2 \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta,$$
$$\triangle\, Ob'c' = B^2 \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha,$$

a proto

$$(\gamma)\quad \frac{p}{4} = \frac{R^2}{2}(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\gamma).$$

Porovnáním (α) a (γ), plyne

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$$
$$(2)\qquad = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Nahradíme-li tangenty ve výrazu $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$ poměrem $\frac{\sin}{\cos}$, nalezneme:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Čítatel na pravé straně jest však dle (2) roven $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ a tudíž

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

II. Podobně doděláme se i jiných identických rovnic, počítáme-li opět plochu trojúhelníka, dán-li poloměr kruhu vepsaného a úhly.

Plochu trojúhelníka vyjádřeme opět dvojím spůsobem a sice

$$p = \frac{ab\sin\gamma}{2}$$

a za druhé

$$p = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{sr}{2}.$$

Z jednoduchého názoru plyne

$$a = r\cot\frac{\beta}{2} + r\cot\frac{\gamma}{2},$$
$$b = r\cot\frac{\gamma}{2} + r\cot\frac{\alpha}{2},$$
$$c = r\cot\frac{\alpha}{2} + r\cot\frac{\beta}{2},$$

a proto

$$(\delta) \qquad s = 2r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\right)$$

a tedy

$$(\delta') \qquad p = r^2\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\right).$$

Strany daného trojúhelníka můžeme však ještě jiným postupem počítati.

Užijeme-li v trojúhelníku O′BC (kdež O′ střed kružnice o trojúhelník opsané značí), věty sinusové, máme

$$a : \overline{O'B} = \sin\frac{(\gamma+\beta)}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\gamma}{2},$$

z čehož

$$a = \frac{\overline{O'B}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

avšak

$$O'B = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

a proto

$$a = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Podobně

$$b = \frac{r\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$c = \frac{r\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Sečtením těchto rovnic a porovnáním s (δ) plyne

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
&\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Podobně pro plochu p nalezneme:

$$
p=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=r^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.
$$

Porovnáme-li tento výsledek s (δ'), nabudeme:

$$
(5)\qquad \cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.
$$

Ve vzorci

$$
a=\frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},
$$

můžeme r vyjádřiti z podmínky $p=\frac{sr}{2}$; pak

$$
r=\frac{2p}{s}=\frac{ab\sin\gamma}{s},
$$

a

$$
a=\frac{ab\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2}}{s\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},
$$

t. j.

$$
(\varepsilon)\qquad b=\frac{s\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.
$$

Vzorcem tímto stanovena strana b, známe-li s, α, β, γ.

Avšak b můžeme stanoviti ještě spůsobem jiným, dáno-li s, a úhly α, β, γ.

Užijeme-li věty sinusové, máme:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

t. j.

$$(a + b + c) : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = b : \sin\beta;$$

z toho

$$(\varepsilon') \qquad b = \frac{s \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Srovnáním vzorců (ε) a (ε') plyne

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

t. j.

$$(6) \qquad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Relaci (ε) mohli bychom i jiným spůsobem odůvodniti, a sice použitím známého rozboru planimetrického, dle něhož řešíme nejprvé trojúhelník o straně s a přilehlých úhlech $\frac{\alpha}{2}$ a $\frac{\beta}{2}$. Dle sinusové věty ustanovíme velikost strany proti úhlu $\frac{\beta}{2}$; strana b pak jest ramenem rovnoramenného trojúhelníka, jehož základna jest právě vypočtěná strana, a úhel při základně $\frac{\alpha}{2}$. Tímto spůsobem obdržíme též vzorec (ε).

Ukázky z Diofanta.

Žákům středních škol podává

Fr. Hromádko,
professor v Praze.

Nauka o neurčitých rovnicích slove též neurčitá analytika. První její počátky vyskytují se zároveň u dvou současníků,