Josef Brejcha

O existenci nekonvexních mnohoúhelníků předepsanáho druhu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D61--D66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122796

ČLÁNKY A REFERÁTY

O existenci nekonvexních mnohoúhelníků předepsaného druhu.

Josef Brejcha, Brno.

Ve středoškolské geometrii věnuje se pozornost mnohoúhelníkům,[1]) jejichž všechny vnitřní úhly jsou duté (menší než $2R$). Takovéto mnohoúhelníky nazýváme konvexními. Celkem opomíjeny jsou mnohoúhelníky, u nichž některé vnitřní úhly jsou vypuklé (větší než $2R$), jež nazýváme nekonvexními.

Budiž dán nějaký n-úhelník o vrcholech $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, kde $n \geqq 3$ je přirozené číslo. Přiřaďme každému z těchto vrcholů symbol 0 nebo 1 podle toho, zda k vrcholu příslušný vnitřní úhel α je dutý nebo vypuklý. Tím pro každý n-úhelník dostaneme n-člennou posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, skládající se vesměs ze symbolů 0, 1, což značí, že pro každý index i ($1 \leqq i \leqq n$) je buďto $\varepsilon_i = 0$ nebo $\varepsilon_i = 1$. Snadno lze však nahlédnouti, že v každém n-úhelníku musí existovati nejméně 3 duté úhly, a tudíž v každé posloupnosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, přiřazené právě popsaným způsobem nějakému n-úhelníku, musí existovati nejméně 3 indexy i, pro něž $\varepsilon_i = 0$.[2])

[1]) Definici mnohoúhelníka viz Čech: Geometrie pro 4. třídu měštanských a středních škol, JČMF, Praha 1946; str. 8.

[2]) Čtenáři bude snad příjemno, naznačíme-li důkaz tohoto tvrzení. Jeden důkaz plyne z této věty: Součet všech vnitřních úhlů v n-úhelníku je roven $(n - 2)\, 2R$ (důkaz viz K. Reinhardt, Über die Zerlegung der Ebene in Polygone (disertace, Frankfurt a. M. (1918), R. Noske, Borna-Lipsko, str. 34 a 35; pro konvexní mnohoúhelníky je důkaz ovšem snadný). Počet úhlů větších než $2R$ je tedy menší než $n - 2$, počet dutých úhlů je tedy větší než 2, tedy aspoň 3. Jiný důkaz: Budiž $\mathfrak{M}$ mnohoúhelník. Přímku p nazvu na okamžik T-přímkou, má-li tyto dvě vlastnosti: 1. obsahuje aspoň jeden bod z $\mathfrak{M}$; 2. všechny vnitřní body mnohoúhelníka $\mathfrak{M}$ leží po *téže* straně přímky p. Je zřejmo: Každá T-přímka obsahuje aspoň jeden vrchol z $\mathfrak{M}$; obsahuje-li T-přímka aspoň dva body z $\mathfrak{M}$, obsahuje též aspoň dva vrcholy z $\mathfrak{M}$; leží-li vrchol na T-přímce, je vnitřní úhel u něho dutý. Zvolme nyní libovolnou přímku p, jež neprotíná $\mathfrak{M}$; posouvejme ji rovnoběžně tak dlouho, až z ní vznikne T-přímka p'. Obsahuje-li p' jen jeden bod V z $\mathfrak{M}$, otáčejme ji okolo V tak dlouho, až dostaneme T-přímku p'', obsahující aspoň dva body z $\mathfrak{M}$ a tedy také aspoň dva vrcholy A, B. Snadno vidíme, že existuje ještě jedna T-přímka q rovnoběžná s p'' (celý vnitřek $\mathfrak{M}$ leží mezi p'', q); na q leží aspoň jeden vrchol C. Úhly při A, B, C jsou pak duté.

Red.

Z předešlého je patrno dále, že každý *konvexní* n-úhelník je charakterisován n-člennou posloupností, skládající se ze samých nul (t. j. pro každý index i je $\varepsilon_i = 0$). Naproti tomu n-členná posloupnost, v níž aspoň jeden člen je 1, charakterisuje n-úhelník *nekonvexní* (existuje aspoň jeden index i, pro nějž je $\varepsilon_i = 1$).

Je dále zřejmo, že je-li danému n-úhelníku již přiřazena určitá posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, pak témuž n-úhelníku přísluší celkem n posloupností, které z dané $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ vzniknou cyklickou permutací. Takovéto posloupnosti budeme pokládati za totožné.

V semináři elementární geometrie při pedagogické fakultě Masarykovy university v Brně položil prof. Dr. Karel Koutský otázku, *zda k dané n-členné posloupnosti* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $(n > 3)$ *symbolů* 0, 1 *existuje vždy příslušný n-úhelník.*

Tato práce podává positivní odpověď na danou otázku; nalezl jsem konstrukci, platnou obecně pro libovolnou posloupnost těchto symbolů.

Důkaz: Nechť $n \geqq 3$ a nechť $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ je n-členná posloupnost symbolů 0, 1. Když za prvé je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0$, pak podle předešlého jde o konvexní mnohoúhelník, jehož existence je vždy zaručena (viz pravidelné n-úhelníky).

Nechť tedy za druhé je aspoň jeden člen $\varepsilon_i = 1$. Pak běží o nekonvexní n-úhelníky. Zřejmě musí v tomto případě být $n \geqq 4$. Ježto posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ lze cyklicky permutovati, lze bez omezení všeobecnosti předpokládati $\varepsilon_1 = 1$. Rozdělme nyní naši posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ na t neprázdných[3]) skupin $S_1\, S_2 \ldots S_t$ tak, aby skupiny S_j s lichými indexy obsahovaly vesměs pouze symboly 1, kdežto skupiny S_j se sudými indexy pouze symboly 0. Ježto ale aspoň tři ze symbolů ε_i se musí podle předešlého rovnati 0, jistě existuje aspoň jedna skupina S_j se sudým indexem j. Cyklickou permutací lze docíliti toho, aby poslední skupina S_t obsahovala samé 0. Vzhledem k tomu lze o čísle t učiniti tyto dva předpoklady: 1. $t \geqq 2$, 2. t je sudé. Existuje tedy celé číslo $k \geqq 1$ takové, že $t = 2k$.

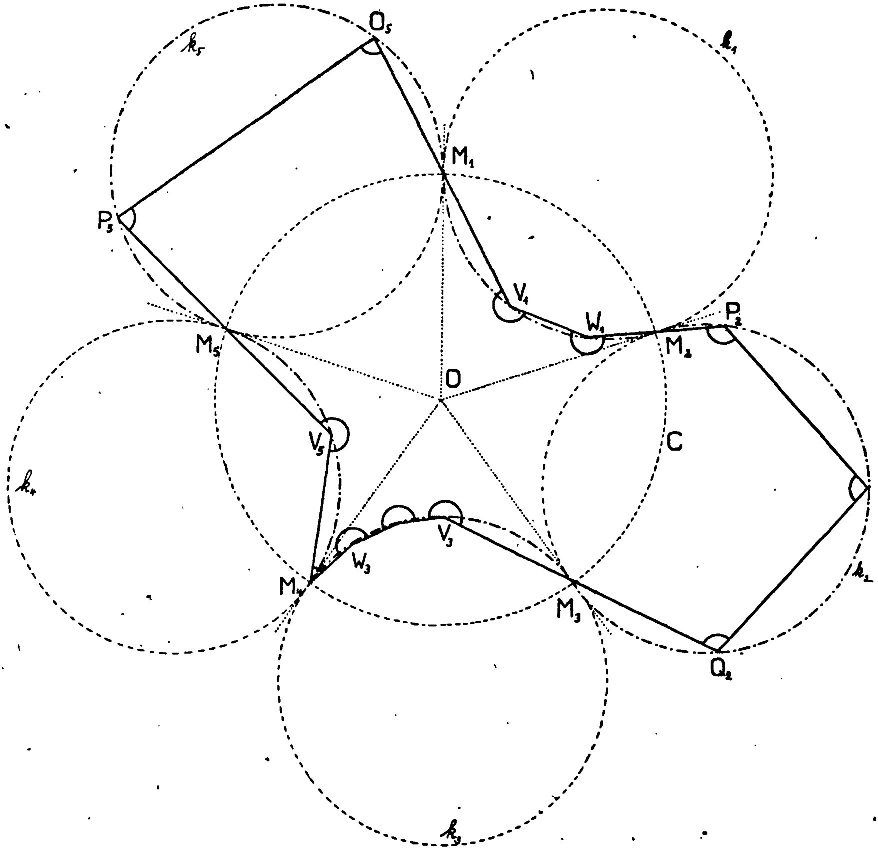
Budiž nyní l počet těch skupin S_j se sudými indexy j, které obsahují právě jeden symbol ε; zřejmě je vždy v těchto skupinách $\varepsilon = 0$. Tudíž počet skupin S_j se sudými indexy j, které obsahují víc než jeden člen, je roven číslu $k - l$ a počet skupin S_j s lichými indexy j je rovén číslu k.

Jistě jest $0 \leqq l \leqq k$, takže také $2k - l \geqq 0$.

A) Když $2k - l \geqq 3$, je pak konstrukce žádaného mnohoúhelníka tato:

Volme v rovině libovolnou kružnici C o středu O a sestrojme

[3]) To značí, že každá taková skupina obsahuje aspoň jeden prvek (symbol ε).



Obr. 1.

pravidelný $(2k - l)$-úhelník do této kružnice vepsaný. Jeho vrcholy označme v přirozeném pořádku $M_1, M_2, \ldots, M_{2k-l}$. Spojme každý bod M_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k - l)$ s bodem O a sestrojme celkem $2k - l$ kružnic k_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k - l)$ tak, aby kružnice k_i se dotýkala přímky $\overline{OM_i}$ v bodě M_i a procházela bodem M_{i+1} (při tom $M_{2k-l+1} \equiv$ $\equiv M_1$). Body $M_1, M_2, \ldots, M_{2k-l}$ rozdělují každou z kružnic k_i na dva oblouky, z nichž ten, který leží uvnitř základní kružnice C, nazveme vnitřním, ten, který leží vně C, nazveme obloukem vnějším. Každé skupině S_j s lichým indexem j přiřadíme nyní jeden z vnitřních oblouků kružnice k_i, kdežto každé skupině S_j se sudým indexem j přiřadíme buď některý z bodů M_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k - l)$, anebo některý z vnějších oblouků kružnic k_i podle toho, zda tato skupina

S_j se skládá pouze z jednoho členu ε, nebo zda se skládá z více než jednoho členu. Toto přiřazení definujeme indukcí:

Skupině S_1 přiřaďme vnitřní oblouk $\widehat{M_1M_2}$ kružnice k_1. Nechť je $r \geqq 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že jsme pro skupiny $S_1, S_2, \ldots, S_r$ již provedli ono přiřazení oblouků kružnic k_i a bodů M_i. Poslední z bodů M_i, k němuž jsme takto došli, budiž M_s. Je-li nyní r číslo liché, tedy $r + 1$ je sudé, pak skupině S_{r+1} přiřaďme buď bod M_s nebo vnější oblouk $\widehat{M_sM_{s+1}}$ kružnice k_s podle toho, zda tato skupina obsahuje pouze jediný člen, nebo zda obsahuje víc než jediný člen; je-li r číslo sudé, pak $r + 1$ je liché a skupině S_{r+1} přiřadíme vnitřní oblouk $\widehat{M_sM_{s+1}}$ kružnice k_s.

Touto konstrukcí sestrojíme jakousi „uzavřenou vlnovku", která se skládá z oblouků kružnic k_i a prochází všemi body M_i. Na této vlnovce budou pak ležeti vrcholy hledaného n-úhelníka.

Pro stručnost označme počet symbolů ε, které se vyskytují ve skupině S_j znakem σ_j; zřejmě je vždy $\sigma_j \geqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, 2k)$.

Vrcholy našeho mnohoúhelníka, příslušné symbolům $\varepsilon = 1$ ve skupinách S_j s *lichými* indexy j, sestrojíme pak takto:

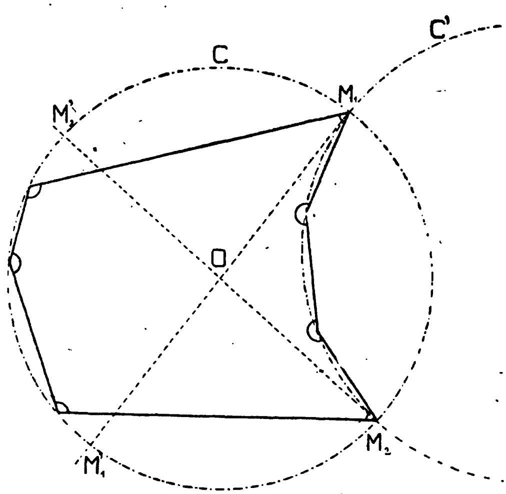
Rozpůlíme vnitřní oblouky těch kružnic k_i, které byly přiřazeny skupinám S_j s lichým indexem a body tak vzniklé označíme V_j. To budou ony body našeho n-úhelníka, které odpovídají *prvnímu* ze symbolů $\varepsilon = 1$ ve skupinách S_j s lichým indexem se vyskytujícímu. Je-li $\sigma_j = 1$, jsme s příslušnou skupinou S_j hotovi. Je-li $\sigma_j > 1$, volme na přiřazeném vnitřním oblouku další bod $W_j \neq V_j$ směrem k tomu z bodů M_i resp. k tomu z vnitřních oblouků kružnic k_i, který byl přiřazen následující skupině S_{j+1}. Bod W_j bude pak ten vrchol našeho mnohoúhelníka, který odpovídá *poslednímu* ze symbolů $\varepsilon = 1$ ve skupině S_j se vyskytujících. Je-li $\sigma_j = 2$, jsme se skupinou S_j hotovi. Je-li $\sigma_j > 2$, pak volme $(\sigma_j - 2)$ body libovolně mezi body V_j a W_j na oblouku $\widehat{V_jW_j}$; tyto body budou zbývajícími vrcholy našeho mnohoúhelníka, jež příslušejí skupině S_j. Touto konstrukcí jsou dány všechny vrcholy hledaného n-úhelníka, při nichž leží vypuklé úhly.

Vrcholy příslušné symbolům $\varepsilon = 0$ ve skupinách S_j se *sudými* indexy j sestrojíme takto:

Když skupina S_j obsahuje pouze jediný symbol ε (t. j. když $\sigma_j = 1$), pak je jí přiřazen jistý bod M_i, který bude vrcholem našeho mnohoúhelníka.

Když $\sigma_j > 1$, pak skupině S_j je přiřazen jistý vnější oblouk $\widehat{M_pM_{p+1}}$ kružnice k_p. Předcházející skupina S_{j-1} a následující skupina S_{j+1} mají liché indexy; jsou jim tedy přiřazeny vnitřní oblouky $\widehat{M_{p-1}M_p}$, resp. $\widehat{M_{p+1}M_{p+2}}$ kružnic k_{p-1} resp. k_{p+1}. Kružnice k_{p-1} a k_p jsou homotetické podle společného dotykového bodu M_p, kružnice k_p, k_{p+1} jsou homotetické podle bodu M_{p+1}. Sestrojme nyní na vnějším oblouku $\widehat{M_pM_{p+1}}$ kružnice k_p body P_p a Q_p takto:

Bod P_p je homotetický buďto s půlícím bodem V_{p-1} nebo s bodem W_{p-1} na vnitřním oblouku $\widehat{M_{p-1}M_p}$ kružnice k_{p-1} podle toho, zda $\sigma_{j-1} = 1$ nebo $\sigma_{j-1} > 1$. Bod Q_p je homotetický s půlícím bodem V_{p+1} vnitřního oblouku $\widehat{M_{p+1}M_{p+2}}$ kružnice k_{p+1}.



Obr. 2.

Z popsaných homotetií kružnic k_{p-1}, k_p resp. kružnic k_p a k_{p+1} se lehce dokáže, že $P_p \neq Q_p$ a že bod Q_p leží blíže bodu M_{p+1} nežli bod P_p. (Stačí uvážiti, že každý z vnitřních oblouků kružnice k_i tvoří méně než půlkružnici, kdežto každý z vnějších oblouků tvoří víc než půlkružnici).

Sestrojené body P_p a Q_p budou vrcholy mnohoúhelníka, které odpovídají prvnímu, resp. poslednímu symbolu $\varepsilon = 0$ ve skupině S_j. Je-li $\sigma_j = 2$, jsme s touto skupinou hotovi; je-li $\sigma_j > 2$, pak volme libovolně $(\sigma_j - 2)$ bodů mezi P_p a Q_p na vnějším oblouku kružnice k_p a to budou další vrcholy našeho n-úhelníka, které přísluší skupině S_j.

Touto konstrukcí lze sestrojiti všechny vrcholy hledaného n-úhelníka, při nichž leží duté úhly.

B) Zbývá ještě vysětřiti případy, kdy $2k - l < 3$.

a) Kdyby $2k - l = 0$, pak z nerovnosti $l \leqq k$ by plynulo $2k \leqq k$ a ježto $k \geqq 1$, následovalo by dále $2 \leqq 1$, což není pravda. Nutně tedy musí být $2k - l > 0$.

b) Kdyby $2k - l = 1$, pak z nerovnosti $l \leqq k$ by plynulo $k \leqq 1$. Ježto je však $k \geqq 1$, musilo by býti $k = 1$ a tedy $l = 2k - 1 = 1 = k$. Existovaly by tedy pouze dvě skupiny S_1, S_2, z nichž skupina S_2 by obsahovala pouze jediný člen $\varepsilon = 0$, kdežto skupina S_1 by obsahovala $(n - 1)$ symbolů $\varepsilon = 1$. Ale posloupnost symbolů $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, v níž se pouze jednou vyskytne symbol $\varepsilon_i = 0$, nemůže náležeti žádnému n-úhelníku. Nutně tedy musí $2k - l > 1$.

c) Kdyby $2k - l = 2$, pak z nerovnosti $l \leqq k$ by plynulo $k \leqq 2$. Ježto však $k \geqq 1$, musí být buď $k = 1$ nebo $k = 2$.

Kdyby $k = 2$, pak $l = 2k - 2 = 2 = k$. Existovaly by 4 skupiny S_1, S_2, S_3, S_4, z nichž S_2 a S_4 by obsahovaly po jediném členu $\varepsilon_i = 0$, kdežto S_1 a S_3 obsahovaly by dohromady $(n - 2)$ symbolů $\varepsilon = 1$. V posloupnosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ by tedy pouze dva členy byly rovny 0, ostatní by byly samé jednotky. Avšak k takové posloupnosti neexistuje žádný n-úhelník. Nutně tedy musí býti $k = 1$ a tedy $l = 2k - 2 = 0$.

V tomto případě existují tedy pouze dvě skupiny S_1, S_2, při čemž skupina S_2 obsahuje více než jeden symbol $\varepsilon = 0$ (jest totiž $l = 0$) a tedy podle poznámky sub[2]) aspoň tři tyto symboly. Skupina S_1 obsahuje pak jeden nebo více než jeden symbol $\varepsilon = 1$.

Konstrukce příslušného mnohoúhelníka je pak tato:

Volme libovolnou základní kružnici C a na ní libovolně dva body M_1 a M_2 tak, aby $\sphericalangle M_1OM_2$ byl úhel dutý. Sestrojme nyní na kružnici C body M'_1, M'_2, diametrálně s body M_1, M_2. Poněvadž každý n-úhelník musí míti nejméně 3 duté úhly a ježto jeho vrcholy, náležející úhlům dutým, odpovídají vesměs symbolům $\varepsilon = 0$ ze skupiny S_2, je $\sigma_2 \geqq 3$. Volme tedy na oblouku $\widehat{M'_1M'_2}$ kružnice C, který neobsahuje bod M_1 (tedy též ani M_2) celkem $(\sigma_2 - 2)$ bodů vzájemně různých a od M'_1 a M'_2 odlišných bodů. Těchto $(\sigma_2 - 2)$ bodů spolu s body M_1 a M_2 budou vrcholy mnohoúhelníka, které odpovídají symbolům $\varepsilon = 0$ ze skupiny S_2, a tedy při každém z nich leží dutý úhel vnitřní.

Sestrojme nyní další kružnici C', aby se dotýkala přímky $\overline{OM_1}$ v bodě M_1 a procházela bodem M_2. Tyto dva body rozdělují kružnici C' na dva oblouky, z nichž ten, který leží uvnitř základní kružnice C nazveme obloukem vnitřním. Na tomto vnitřním oblouku $\widehat{M_1M_2}$ kružnice C' volme nyní, ježto je zřejmě $\sigma_1 \geqq 1$, celkem σ_1 vzájemně různých a od M_1 a M_2 odlišných bodů; to budou vrcholy hledaného mnohoúhelníka, odpovídající symbolům $\varepsilon = 1$ ze skupiny S_1, při nichž leží vnitřní úhly vypuklé.

Tím je i v tomto případě n-úhelník sestrojen.

Jako příklad je v obr. 1 sestrojen mnohoúhelník, příslušný k posloupnosti (1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0), v obr. 2 mnohoúhelník (1 1 0 0 0 0 0).